§ 22. Двойной интеграл

22.1. Мы будем заниматься приобретением навыков по нахождению двойных, а затем и тройных интегралов. Нас не будет интересовать общность теоретической поддержки, за этим можно обратиться к соответствующим теоретическим руководствам. Поэтому мы будем рассматривать непрерывные функции, заданные на замкнутой области в $\mathbb{R}^2$ (т. е. на таком замкнутом множестве, которое совпадает с замыканием своей внутренности). Можно допустить и кусочно непрерывные функции, устроенные так, что их область определения можно представить в виде объединения замкнутых областей, внутренности которых не пересекаются, на внутренности каждой из которых функция непрерывна.

22.2. Определение двойного интеграла. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Напомним конструкцию двойного интеграла (по Риману). Берется разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, каждое из которых имеет площадь (т. е. измеримо по мере Жордана). Затем в каждом из Ω_i, $i = 1, \ldots, n$, берется по точке (x_i, y_i) и составляется *интегральная сумма*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\Omega_i), \tag{22.1}$$

где $m(\Omega_i)$ — площадь множества Ω_i. Если при рассмотрении разбиений таких, что наибольшая из площадей составляющих эти разбиения множеств неограниченно уменьшается, суммы приближаются к некоторому числу, то его и считают интегралом от f по множеству Ω.

Определение. Число I называют (*двойным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Ω на множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, у которого $\max\limits_{i=1,\ldots,n} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \tag{22.2}$$

Интеграл от f по множеству Ω обозначается обычно символом

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy.$$

В этом обозначении фрагмент $dxdy$ указывает на то, что в основе измерения взята площадь прямоугольника как произведение длин его сторон.

22.3. Линейность интеграла. *Двойной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на Ω функций f, g и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy + \beta \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dxdy \tag{22.3}$$

22.4. Аддитивность интеграла. *При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \ldots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$, то*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{D_i} f(x,y)\,dxdy.$$

22.5. Повторный интеграл. Пусть Ω_1 — проекция Ω на ось абсцисс, а Ω_2 — на ось ординат, т. е.

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})\ (x,y) \in \Omega\}, \quad \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})\ (x,y) \in \Omega\}.$$

Для простоты предположим, что обе проекции суть замкнутые промежутки или, на худой конец, объединения некоторого набора замкнутых промежутков. Фиксируем $x \in \Omega_1$, и пусть Ω_x — сечение Ω на уровне x, т. е. множество всех точек $(x,y) \in \Omega$ при фиксированном x. Предположим для простоты, что Ω_x состоит из конечного набора замкнутых промежутков. Тогда, рассматривая при фиксированном x интеграл от $f(x,y)$ только как функции переменной y по множеству Ω_x, получим функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy.$$

Ее интегрирование по множеству Ω_1 приведет нас к интегралу

$$\int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

который называют *повторным* и обычно обозначают так:

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy.$$

Аналогично можно определить и другой повторный интеграл

$$\int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,dx.$$

При наших достаточно жестких ограничениях на область и функцию можно утверждать, что у функции f есть как двойной интеграл, так и оба повторных и она равны между собой:

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy = \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,dx.$$

Равенство двойного и повторных интегралов открывает путь к нахождению двойного интеграла. Надо найти проекцию Ω на какую-либо из координатных осей, например, на ось абсцисс, затем при каждом x из этой проекции найти интеграл от f как функции от y по сечению Ω_x (одномерный интеграл), и затем еще раз найти одномерный интеграл, но теперь уже от получившейся функции от x по проекции Ω_1.

Обратимся к совсем конкретной ситуации. Предположим, что Ω — это криволинейная трапеция, т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют условиям

$$a \le x \le b, \quad \varphi(x) \le y \le \psi(x), \tag{22.5}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, φ, ψ — непрерывные функции, заданные на $[a,b]$. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{22.6}$$

Аналогично, если Ω задается соотношениями

$$c \le y \le d, \quad \eta(y) \le x \le \zeta(y), \tag{22.7}$$

то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\eta(y)}^{\zeta(y)} f(x,y)\,dx. \tag{22.8}$$

Если сама область Ω не является криволинейной трапецией, но ее можно разбить на части, являющиеся криволинейными трапециями, то следует воспользоваться аддитивностью интеграла и свести всё к случаю криволинейной трапеции.

22.6. Замена переменной. Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $(u,v) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u, v на область D. Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{X} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| dudv, \qquad (22.9)$$

где $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$ — якобиан отображения Φ.

Равенство (22.9) называют *формулой замены переменной* в двойном интеграле.

Формула замены переменной позволяет переносить интегрирование с одной области на другую и может оказаться, что в новых переменных область интегрирования проще, однако при этом скорее всего надо будет интегрировать более сложную функцию.

При рассмотрении формулы замены переменной можно заметить, что происходит пересадка функции f в новые переменные и интегрирование по новой области по мере, которая имеет вид $k(u,v)\,dudv$, где $k(u,v)$ — коэффициент искажения меры, показывающий, как площадь малого квадрата, расположенного около (u,v), изменяется при отображении Φ. Эта структура формулы замены переменной (или перехода к новым переменным) будет сопровождать все рассматриваемые ниже интегралы, только выражения коэффициента искажения меры будут разными.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются полярные координаты (r,φ), связанные с (x,y) равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r, \qquad (22.10)$$

где $r > 0$, а φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π,

обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, или обобщенные полярные координаты

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi, \quad y = br\sin^{\alpha}\varphi, \quad r > 0,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi. \tag{22.11}$$

22.7. Пример. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции $f(x, y)$ по треугольнику Ω с вершинами в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ (рис. 1).

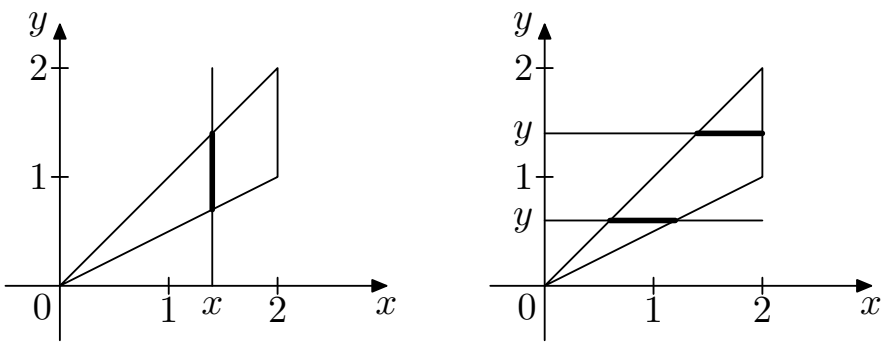

Рис. 1.

Ясно, что его проекция на ось Ox — это отрезок $[0, 2]$. Фиксировав $x \in [0, 2]$ и двигаясь снизу вверх при заданном x, мы войдем в область Ω, пройдя график функции $y = x/2$, и выйдем из Ω через график функции $y = x$, т. е. при каждом фиксированном x сечение Ω на элементе x представляет собой отрезок $[x/2, x]$. Значит, внутренний интеграл от $f(x, y)$ по сечению на элементе x имеет вид $\int\limits_{x/2}^{x} f(x, y)\,dy$. Сделав теперь x переменным, получаем функцию от x, интеграл от которой по отрезку $[0, 2]$ и приведет к одному из повторных интегралов, а именно к интегралу

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x, y)\,dy.$$

Обратимся к другому из повторных интегралов. Проекция Ω на ось Oy — это отрезок $[0, 2]$. Фиксируем $y \in [0, 2]$ и будем двигаться слева направо при этом фиксированном y. В область Ω мы войдем через график функции $x = y$, а вот выход будет зависеть от расположения y, а именно, если $0 \le y \le 1$, то выходим через график функции $x = 2y$, а если $1 \le y \le 2$, то через график функции $x = 2$. Это указывает

на то, что нам придется разбить Ω на две части, соответственно с $0 \le y \le 1$ и $1 \le y \le 2$. Тогда двойной интеграл будет равен сумме двух повторных интегралов:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx.$$

22.8. Пример. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции $f(x,y)$ по области Ω, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2 - 2x$. Ясно, что эти графики пересекаются в точках $(0,0)$, $(3,3)$, и из нескольких получающихся областей только одна, а именно при $x \in [0,3]$, ограничена (рис. 2).

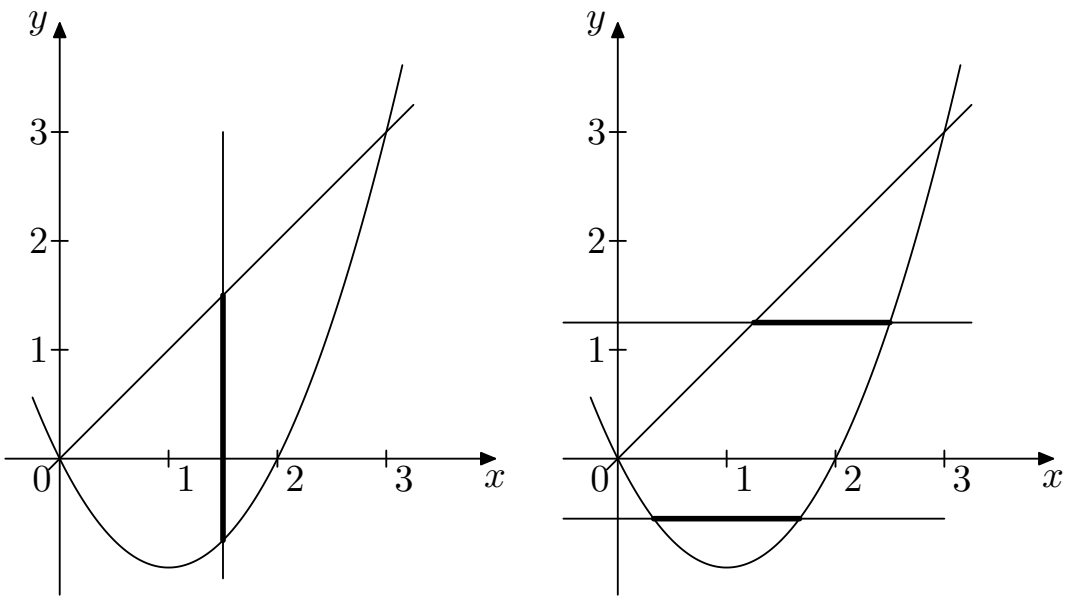

Рис. 2.

При фиксированном $x \in [0,3]$, двигаясь снизу вверх, мы войдем в область Ω через график функции $y = x^2 - 2x$, а выйдем через $y = x$ (см. рис. 2(а)), так что в результате получим следующий повторный интеграл:

$$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} f(x,y)\,dy.$$

Проекция этой области на ось ординат представляет собой отрезок $[-1,3]$, но здесь придется разбить область на две части, соответству-

ющие $-1 \le y \le 0$ и $0 \le y \le 3$, и интеграл представится в виде суммы

$$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{y}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx.$$

22.9. Задачи.

1. В интеграле $\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для областей, ограниченных указанными линиями или заданных неравенствами:

(1) $y = 0$, $y = a$, $x + y = 0$, $x + y = 2a$;

(2) $2y = x$, $2y = x + 6$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$;

(3) $y = x^2$, $x + y = 2$; **(4)** $x = 0$, $x = 1$, $x = y^2$, $y = e^x$;

(5) $x^2 + y^2 \le 2ax$; **(6)** $x^2 + y^2 \le 4x$, $y \ge x$;

2. Записать повторный интеграл или сумму повторных интегралов в виде двойного и изобразить множество интегрирования:

(1) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f(x,y)\,dx$; **(2)** $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$;

(3) $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{-2}^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{2x-4}^{x} f(x,y)\,dy$;

(4) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$

3. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

(1) $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)\,dy$, $a > 0$; **(2)** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2+y} f(x,y)\,dx$;

(3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x,y)\,dy$, **(4)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$;

(5) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$; **(6)** $\int\limits_{0}^{2\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy$.

4. Вычислить интегралы

(1) $\iint\limits_{\Omega} x^2y^2\,dxdy$, Ω ограничена линиями $x = y^2$, $x = 1$;

(2) $\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0\}$;

(3) $\iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \le 25,\ 3x + y \ge 5\}$;

(4) $\iint\limits_{\Omega} x\,dxdy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \le 2,\ x^2 - y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;

(5) $\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy$, $\Omega = \{0 \le y \le 6,\ x \le 6,\ xy \ge 3\ y - x - 2 \le 0\}$;

(6) $\iint\limits_{\Omega} x^2y^2\,dxdy$, $\Omega = \{y \ge 0,\ xy \le 1,\ x^2 - 3xy + 2y^2 \le 0\}$.

22.10. Пример. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, где Ω — круг $x^2 + y^2 \le 2x$, перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования.

Подставляя выражения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ в соотношение, задающее область Ω, получим неравенство $r^2 \le 2r\cos\varphi$, или $r \le 2\cos\varphi$, характеризующее соответствующую Ω область D в координатах (φ, r) (здесь нам удобно ставить координаты именно в указанном порядке, а не в противоположном, как это удобно при нахождении якобиана). Ограничение $r \ge 0$ приводит к ограничению $\cos\varphi \ge 0$, или же $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Можно для наглядности изобразить зависимость $r = r(\varphi)$ в рамках исходных декартовых координат (x, y) (рис 3), а также изобразив пары (φ, r) как декартовы координаты (рис. 4).

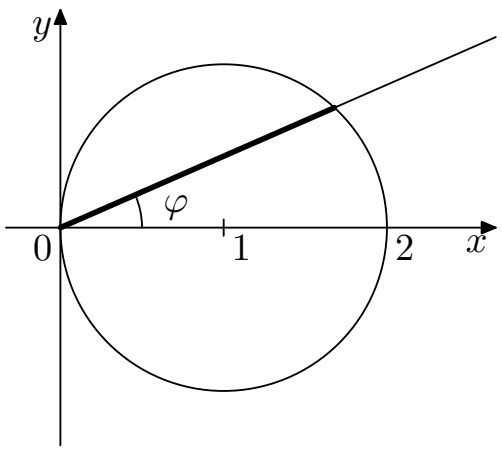

Рис. 3.

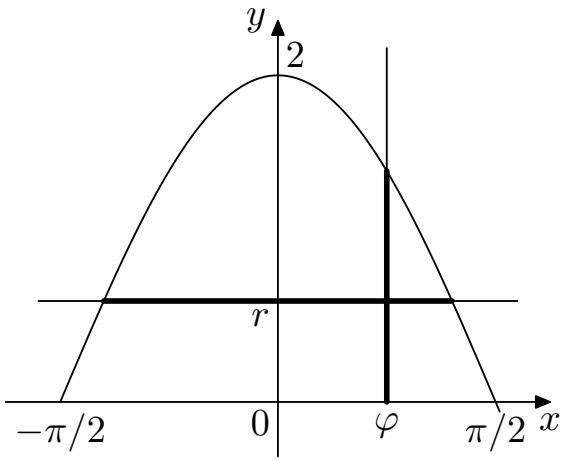

Рис. 4.

Ясно, что

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,d\varphi dr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr.$$

Запишем повторный интеграл при другом порядке следования переменных. Проекция области D на ось Or — это отрезок $[0,2]$, и если при фиксированном r идти слева направо (при той интерпретации φ, r, где они изображены в виде прямоугольной системы координат), то для нахождения зависимости $\varphi = \varphi(r)$, при которой мы войдем в область D, надо решить уравнение $r = 2\cos\varphi$ с учетом ограничения $-\pi/2 \le \varphi \le 0$, или же $\cos\varphi = r/2$, $-\pi/2 \le \varphi \le 0$, или

$$\varphi = \pm \arccos\frac{r}{2} + 2\pi k, \quad -\pi/2 \le \varphi \le 0,$$

откуда $\varphi = -\arccos\dfrac{r}{2}$. Выйдем из D на графике функции $\varphi = \arccos\dfrac{r}{2}$. Тем самым приходим к повторному интегралу

$$\int\limits_{0}^{2} r\,dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

22.11. Задачи.

1. В интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов:

(1) $\Omega = \{x^2+y^2 \le a^2,\ y \ge x\}$, **(2)** $\Omega = \{x^2+y^2 \le 2ay\}$,

(3) $\Omega = \{x^2+y^2 \le 2ax,\ y \ge x\}$,

(4) $\Omega = \{x^2+y^2 \le a^2,\ x+y+a \le 0\}$,

(5) $\Omega = \{x^2+y^2 \le 2ay \le 2a^2,\ x \ge 0\}$, **(6)** $\Omega = \{2x \le x^2+y^2 \le 2\}$.

2. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

(1) $\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0\}$.

(2) $\iint\limits_{\Omega} y^2 e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$,

(3) $\iint\limits_{\Omega} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le ax\},\ a > 0$,

(4) $\iint\limits_{\Omega} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2 \le 2y\}$,

(5) $\iint\limits_{\Omega} x^2\,dxdy,\ \Omega = \{(x^2+y^2)^2 \le 2xy,\ x \ge 0\}$,

(6) $\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy,\ \Omega = \{0 \le x \le (x^2+y^2)^{3/2} \le 1,\ y \ge 0\}$.

22.12. Из определения двойного интеграла легко усмотреть, что если мы проинтегрируем единичную функцию по данной области (в переменных (x,y)), то получим величину площади этой области:

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$

22.13. Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = cy^2, \quad x^3 = dy^2, \quad 0 < a < b,\ 0 < c < d,$$

воспользовавшись подходящей заменой переменных.

Заметим, что выражения $\dfrac{x^2}{y}$ и $\dfrac{x^3}{y^2}$ меняются в постоянных пределах, поэтому, если мы введем новые переменные u, v, полагая $u = \dfrac{x^2}{y}$ и $v = \dfrac{x^3}{y^2}$, то область D изменения переменных u, v составляет прямоугольник $a \le u \le b$, $c \le v \le d$. Для нахождения якобиана $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ можно сначала выразить x, y через u, v, а затем считать якобиан, а можно попробовать найти якобиан $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и потом из него получить требуемый якобиан. Пойдем сначала вторым путем, потому что выражения u, v через x, y проще, чем выражения x, y через u, v. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{x^3}{y^3},$$

так что

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2\dfrac{x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ 3\dfrac{x^2}{y^2} & -2\dfrac{x^3}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{x^4}{y^4}.$$

Заметив, что $\dfrac{x}{y} = \dfrac{v}{u}$, находим, что

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\right| = \left(\frac{u}{v}\right)^4.$$

Тем самым

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \int\limits_a^b du \int\limits_c^d \frac{u^4}{v^4}\, dv = \int\limits_a^b u^4\, du \int\limits_c^d v^{-4}\, dv$$
$$= \frac{u^5}{5}\bigg|_a^b \cdot \frac{u^{-3}}{-3}\bigg|_c^d = \frac{b^5 - a^5}{15}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right).$$

22.14. Задачи.

1. Используя (обобщенные) полярные координаты, найти площадь области, ограниченной кривыми:

(1) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$, $b > a > 0$;

(2) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$;

(3) $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^4+y^4)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

(4) $(x^2+y^2)^2 = a(x^3+y^3)$;

(5) $(x+y)^4 = 6xy^2$, $y \geq 0$; **(6)** $x^3+y^3 = axy$.

2. Найти площадь области, ограниченной данными кривыми, используя подходящую замену:

(1) $x = 2y$, $y = 3x$, $3x = 2-y$, $x = 4-2y$;

(2) $x+y = a$, $x+y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$;

(3) $xy = a^2$, $xy = b^2$, $x^2 = py$, $x^2 = qy$, $b > a > 0$, $q > p > 0$;

(4) $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$, $x^{2/3}+y^{2/3} = b^{2/3}$, $y = x$, $y = 8x$, $b > a > 0$.

22.15. Из определения двойного интеграла можно усмотреть его геометрическую интерпретацию: если $z = f(x,y)$ — некоторая неотрицательная функция на области Ω, то интеграл $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dxdy$ равен объему подграфика функции f, т. е. множества $\{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$. Если f_1, f_2 — функции, заданные на Ω, такие, что $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$ для всех $(x,y) \in \Omega$, то объем части пространства $\{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega,\ f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$, находящегося между графиками f_1, f_2, равен интегралу

$$\iint\limits_\Omega (f_2(x,y) - f_1(x,y))\,dxdy.$$

22.16. Пример. Найдем объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = x^2+y^2$.

Здесь тело представляет собой часть пространства, заключенную между графиками функции $z = 0$ и $z = x^2+y^2$, рассматриваемых на области $\Omega = \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 1\}$. Тем самым его объем равен интегралу

$$\iint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=x^2}^{y=1} = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx$$

$$= 2\left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^1 = \frac{88}{105}.$$

22.17. Задачи. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

(1) $x^2+y^2=ax$, $z=x^2+y^2$, $z=0$;

(2) $x+y+z=a$, $4x+y=a$, $4x+3y=3a$, $y=0$, $z=0$, $a>0$;

(3) $x^2+y^2=ay$, $z=xy$, $z=0$ $(x>0)$;

(4) $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

22.18. Пусть M — гладкая поверхность, заданная параметрически посредством непрерывно дифференцируемых функций

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in\Omega.$$

Тогда площадь $S(M)$ поверхности M может быть найдена по формуле

$$S(M)=\iint\limits_M k(u,v)\,dudv,$$

где величина $k(u,v)$ (коэффициент искажения площади) может быть найдена либо по формуле

$$k(u,v)=\sqrt{EG-F^2}, \tag{22.12}$$

где

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

либо по формуле

$$k(u,v)=\sqrt{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right|^2}. \tag{22.13}$$

Если же поверхность M является графиком функции $z=z(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$, то

$$S(M)=\iint\limits_\Omega\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{22.14}$$

22.19. Задачи.

1. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

2. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

3. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

4. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

§ 23. Тройной интеграл и многократный интеграл

23.1. Пусть f — непрерывная функция трех переменных (x, y, z), заданная на ограниченной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тройной интеграл создается аналогично двойному: берут разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, каждая из которых имеет объем (т. е. измерима, например, по мере Жордана), затем в каждой из частей разбиения Ω_i, $i = 1, \ldots, k$, берут по точке (x_i, y_i, z_i) и составляют интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i), \tag{23.1}$$

где $m(\Omega_i)$ — объем множества Ω_i. Число I называют (*тройным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ области Ω на измеримые части такие, что $\max\limits_{i=1,\ldots,k} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \ldots, k$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \tag{23.2}$$

Для тройного интеграла используют обозначение $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$. Здесь символ $dxdydz$ указывает на то, что в основу измерения объема взят объем параллелепипеда как произведение его линейных размеров.

23.2. Если взять непрерывную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на замкнутой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то аналогично двойному или тройному определяется многократный интеграл, для которого используется обозначение $\int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$.

23.3. Свойства интеграла.

Линейность интеграла. *Тройной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на* Ω *функций* f, g *и любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$\iiint\limits_{\Omega} (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\,dxdydz = \alpha \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz + \beta \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\,dxdydz \quad (23.3)$$

Аддитивность интеграла. *При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если* $D_1, \ldots, D_k$ *— конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и* $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$*, то*

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{i=1}^{k} \iiint\limits_{D_i} f(x,y,z)\,dxdydz. \quad (23.4)$$

23.4. Повторный интеграл. При переходе от тройного интеграла к повторному можно сначала фиксировать либо одну координату, оставляя переменными другие две, либо две координаты, оставляя переменной оставшуюся одну. В зависимости от типа фиксации координат получаются различные способы перехода к повторному интегрированию.

Итак, для $(x,y,z) \in \Omega$ пусть $\Omega_0 = \{(x,y) : (x,y,z) \in \Omega\}$ — проекция Ω на плоскость xOy. Фиксируем $(x,y) \in \Omega_0$, и пусть $\Omega_{(x,y)} = \{z : (x,y,z) \in \Omega\}$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Omega_0} \left(\int\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Обычно интеграл в правой части записывают так:

$$\iint\limits_{\Omega_0} dxdy \int\limits_{\Omega_{(x,y)}} f(x,y,z)\,dz. \quad (23.5)$$

Если при этом для каждой пары $(x,y) \in \Omega_0$ множество $\Omega_{(x,y)}$ — это отрезок $[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Omega_0} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \quad (23.6)$$

В результате первого интегрирования (по z) мы получаем двойной интеграл, разбираться с которым учились раньше.

Ясно, что аналогичные соотношения получаются при фиксации сначала какой-либо другой координатной плоскости — yOz или zOx.

Теперь обсудим другой способ разбиения. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y, z \in \mathbb{R})\ (x, y, z) \in \Omega\}$ — проекция области Ω на ось Ox. При каждом $x \in \Omega$ пусть $\Omega_x = \{(y, z) : (x, y, z) \in \Omega\}$ — сечение области Ω при данном x. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{\Omega_1} \left(\iint\limits_{\Omega_x} f(x, y, z)\, dydz \right) dx.$$

Здесь внутренний интеграл двойной, с которым мы умеем разбираться, внешний — обычный одномерный интеграл. В частности, если Ω_1 — это отрезок $\Omega_1 = [a, b]$, а при фиксированном $x \in [a, b]$ множество Ω_x — это криволинейная трапеция, ограниченная функциями $z = \lambda(x, y)$, $z = \mu(x, y)$, где $c(x) \le y \le d(x)$, то в обычных обозначениях

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c(x)}^{d(x)} dy \int\limits_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{23.7}$$

Как и выше, подобные формулы будут при первоначальном обращении к какой-либо из других координатных осей.

23.5. Замена переменной. Как отмечено при обсуждении замены переменных в двойном интеграле, при замене надо перенести функцию в область новых переменных и проинтегрировать по мере, в которой учтен коэффициент искажения, вносимый реализующим замену диффеоморфизмом.

Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^3$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $(u, v, w) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u, v, w на область D. Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz \\ &= \iiint\limits_{X} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw, \end{aligned} \tag{23.8}$$

где $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ — якобиан отображения Ф.

Равенство (23.8) называют *формулой замены переменной* в тройном интеграле.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются *сферические координаты* φ, ψ, r, связанные с исходными переменными x, y, z равенствами

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\psi,r)} = r^2\cos\psi.$$

Здесь переменная φ может меняться в каком-либо промежутке длиной 2π, обычно $0 \leq \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Бывают удобны также *цилиндрические координаты* r, φ, h, связанные с x, y, z равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,h)} = r.$$

Здесь $r > 0$, φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π, обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, а $h \in \mathbb{R}$.

В подходящих случаях используются *обобщенные сферические координаты* φ, ψ, r, связанные с x, y, z равенствами

$$x = ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad y = br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi, \quad z = cr\sin^\beta\psi,$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\psi,r)} = \alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

Здесь область изменения переменной φ зависит от показателя α и ограничивается возможностью возведения в степень α, но во всяком случае это область лежит в каком-либо промежутке длиной не более 2π, обычно $0 \leq \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

23.6. Пример. Запишем интеграл $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ в виде повторного, где Ω — область, ограниченная поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$. При этом рассмотрим разный порядок следования переменных.

Поверхности $x = 1$ и $y = x$ — это параллельные оси Oz плоскости, проходящие через соответствующие прямые плоскости xOy. Поверхность $z = xy$ — это седло, проходящее через оси координат Ox, Oy. Поскольку поверхность $x = 1$ должна участвовать в формировании области, у поверхности $z = xy$ надо брать ту часть, где $x > 0$.

Равенства $z = xy$ и $z = 0$ говорят о том, что ограничивающими поверхностями будут также $x = 0$ и $y = 0$. Исходя из этих наблюдений, находим, что проекцией области Ω на плоскость xOy будет треугольник Δ: $0 \le x \le 1$, $y \le x$. Для каждой точки $(x, y) \in \Delta$ точка (x, y, z) будет в Ω при $0 \le z \le xy$. Тем самым, сразу расставляя пределы интегрирования по Δ, получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Delta} dxdy \int\limits_{0}^{xy} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{xy} f(x,y,z)\,dz.$$

Поступим теперь иначе. Заметим, что условия $0 \le x \le 1$, $y \le x$, $0 \le z \le xy$ приводят к ограничению $0 \le z \le 1$ на z. Фиксировав $z \in [0,1]$, получаем при каждом таком z область в плоскости xOy, ограниченную кривыми $xy = z$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 1).

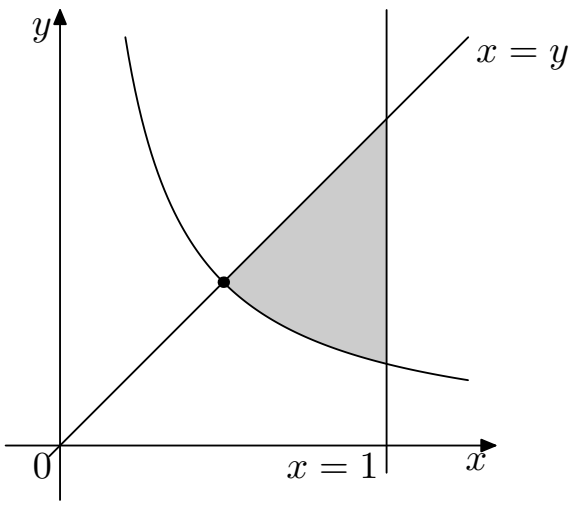

Рис. 1.

Этими линиями ограничивается выделенная на рис. 23.1 область. Найдем точку пересечения кривых $y = x$ и $xy = z$: $z = x^2$, $x = \sqrt{z}$. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{\sqrt{z}}^{1} dx \int\limits_{z/x}^{x} f(x,y,z)\,dy.$$

23.7. Задачи.

1. Тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ записать в виде повторного с указанным порядком следования переменных и расставить пределы интегрирования для указанных областей:

(1) $\Omega = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4 \geq z \geq 0,\ 2x + y \leq 2\}$, (а) (y,z,x), (б) (x,y,z);

(2) $\Omega = \{x \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ y^2 + z^2 \leq a^2\}$, (а) (y,z,x), (б) (x,z,y);

(3) $\Omega = \{x^2+y^2+z^2 \leq 2z,\ x^2+y^2 \geq z^2\}$, (а) (x,y,z), (б) (x,z,y);

(4) $\Omega = \{y^2+z^2 \leq x^2,\ y^2+x^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$, (а) (x,y,z), (б) (y,z,x);

2. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

(1) $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{h} f(x,y,z)\,dz, \quad (z,y,x);$

(2) $\int\limits_{0}^{4} dz \int\limits_{0}^{3-\frac{3}{4}z} dy \int\limits_{0}^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x,y,z)\,dx, \quad (x,y,z);$

(3) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-\frac{x}{2}} dy \int\limits_{0}^{2-y-\frac{x}{2}} f(x,y,z)\,dz, \quad (z,x,y);$

(4) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz, \quad (x,z,y),\ (z,y,x);$

3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ для следующих функций и областей:

(1) $f(x,y,z) = y$, Ω — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 4$;

(2) $f(x,y,z) = x+z$, область Ω ограничена плоскостями $x+y = 1$, $x - y = 1$, $x + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$;

(3) $f(x,y,z) = x^2-z^2$, область Ω ограничена плоскостями $y = -x$, $z = x$, $z = y$, $z = 1$;

(4) $f(x,y,z)=xy$, область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$;

(5) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$, область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $z=1$;

(6) $f(x,y,z)=xyz$, область Ω ограничена поверхностями $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$.

23.8. Пример. В интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$, где

$$\Omega=\{x^2+y^2+z^2\le 2az,\ x^2+y^2\ge z^2\},$$

перейдем к сферическим координатам и запишем его в виде повторного.

Подставляя $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$ в неравенства, характеризующие область, получим неравенства

$$r^2\le 2ar\sin\psi,\quad r^2\cos^2\psi\ge r^2\sin^2\psi,$$

или

$$r\le 2a\sin\psi,\quad |\cos\psi|\ge|\sin\psi|,$$

характеризующие соответствующую Ω область D в сферических координатах. Положительность r вместе с ограничением из сферической замены дает ограничение $0\le\psi\le\pi/2$. Далее, среди $\psi\in[0,\pi/2]$ неравенство $|\cos\psi|\ge|\sin\psi|$ выполняется при $\psi\in[0,\pi/4]$. Итак, мы приходим к интегралу по области

$$0\le\psi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le r\le 2a\sin\psi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

сферических переменных. Переход к повторному интегралу дает равенство

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz\\ &\quad=\iiint\limits_{D} f(r\cos\varphi\cos\psi,r\sin\varphi\cos\psi,r\sin\psi)r^2\cos\psi\,drd\varphi d\psi\\ &=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}d\psi\int\limits_0^{2a\sin\psi} f(r\cos\varphi\cos\psi,r\sin\varphi\cos\psi,r\sin\psi)r^2\cos\psi\,dr.\end{aligned}$$

23.9. Пример. Совершая подходящую замену, вычислим интеграл $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz$, где Ω расположена в октанте $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ и ограничена поверхностями

$$z = \frac{x^2+y^2}{m},\ z = \frac{x^2+y^2}{n}, \quad xy = a^2,\ xy = b^2, \quad y = \alpha x,\ y = \beta x$$

$$(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta,\ 0 < m < n).$$

Учитывая наблюдения из примера 22.13, положим

$$u = \frac{x^2+y^2}{z}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x}.$$

Тогда при переходе к переменным u, v, w области Ω соответствует прямоугольник

$$m \leq u \leq n, \quad a^2 \leq v \leq b^2, \quad \alpha \leq w \leq \beta.$$

Найдем якобиан $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$, замечая, что выражения u, v, w через x, y, z проще, чем выражения для координатных функций обратного отображения. Имеем

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z} & -\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{x^2+y^2}{z^2}\begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = -2\frac{y}{x}\frac{x^2+y^2}{z^2}.$$

Выразим переменные x, y, z через u, v, w. Переменнные x, y, z положительны по условию. Из двух последних равенств замены получаем

$$y = \sqrt{vw}, \quad x = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad x^2+y^2 = vw + \frac{v}{w} = \frac{v(w^2+1)}{w},$$

$$z = \frac{x^2+y^2}{u} = \frac{v(w^2+1)}{uw}.$$

Теперь

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{z^2}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}\cdot z\cdot\frac{z}{x^2+y^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{v(w^2+1)}{uw}\cdot\frac{1}{u} = -\frac{1}{2}\frac{v(w^2+1)}{u^2w^2}.$$

Переходим к нахождению интеграла:

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz$$
$$= \int\limits_m^n du \int\limits_{a^2}^{b^2} dv \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{vw}\sqrt{\frac{v}{w}}\frac{v(w^2+1)}{uw}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v(w^2+1)}{u^2w^2}\,dw$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_m^n \frac{du}{u^3}\int\limits_{a^2}^{b^2} v^3\,dv\int\limits_\alpha^\beta \frac{(w^2+1)^2}{w^3}\,dw$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{u^2}\Big|_m^n\cdot\frac{1}{4}v^4\Big|_{a^2}^{b^2}\cdot\left(\frac{1}{2}w^2+2\ln w-\frac{1}{2w^2}\right)\Big|_\alpha^\beta$$
$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left(\beta^2-\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

23.10. Задачи.

1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ от следующих функций f по следующим областям Ω:

(1) $f(x,y,z)=z$, Ω ограничена поверхностями $R^2z^2=h^2(x^2+y^2)$, $z=h$, $h>0$;

(2) $f(x,y,z)=\sqrt{y^2+z^2}$, Ω ограничена поверхностями $y^2+z^2=R^2$, $y+x=R$, $y-x=R$, $R>0$;

(3) $f(x,y,z)=x^2-y^2$, $\Omega=\{x^2+y^2+z^2\le a^2,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$;

(4) $f(x,y,z)=x+z$, $\Omega=x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$;

(5) $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$, $\Omega=\{x^2+y^2\le 2x,\ 0\le z\le y\}$;

(6) $f(x,y,z)=xz^2$, $\Omega=\{(3x-4)^2\le y^2+z^2\le x^2\}$;

(7) $f(x,y,z)=xyz$, $\Omega=\{x<yz\le 2x,\ y\le zx\le 2y,\ z\le xy\le 2z\}$;

(8) $f(x,y,z)=x^2$, область Ω ограничена поверхностями

$$z=ay^2,\ z=by^2,\ y>0,\quad z=\alpha x,\ z=\beta x,\quad z=h,$$

$$0<a<b,\quad 0<\alpha<\beta,\quad 0<h.$$

2. Найти

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} x^m y^n z^p\,dxdydz,$$

где m,n,p — целые неотрицательные числа.

3. Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dxdydz,$$

где область V ограничена плоскостями

$$x+y+z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,$$

полагая

$$x+y+z=\xi,\quad y+z=\xi\eta,\quad z=\xi\eta\zeta.$$

23.11. Аналогично двойному, тройной интеграл $\iiint\limits_\Omega dxdydz$ по Ω от единичной функции равен объему тела $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

23.12. Задачи. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

(1) $x^2+y^2=R^2$, $x+y+z=a$, $x+y+z=-a$;

(2) $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$;

(3) $z=xy$, $z=x+y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$;

(4) $z=x^2+y^2$, $z=x+y$;

(5) $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=x^2+y^2$, $z=0$;

(6) $x^2+y^2=1$, $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$;

(7) $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$, $a>0$;

(8) $x^2+y^2+z^2=2az$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(z>\sqrt{x^2+y^2})$;

(9) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{p}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$;

(10) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$;

(11) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\ln\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}$, $x=0$, $z=0$, $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$;

(12) $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

23.13. Многократный интеграл. При определении и вычислении многократного интеграла мы будем руководствоваться соображениями и утверждениями, аналогичными высказанным для двойных или тройных интегралов.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ переменных $x=(x_1,\dots,x_n)$. (Многократный) интеграл от функции f, определяемый в той же манере, что и тройной (или двойной) интеграл, обозначается через

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n.$$

Переход от многократного интеграла к повторному осуществляется аналогично тому, как это делается для тройных интегралов. Если мы выделили проекцию $D_1=[a_1,b_1]$ области Ω на первую координатную составляющую, т. е.

$$[a_1,b_1]=\{t\in\mathbb{R}:(\exists x_2,\dots x_n\in\mathbb{R})\ (t,x_2,\dots,x_n)\in\Omega\},$$

и при каждом фиксированном $x_1\in D_1$ обозначим через Ω_{x_1} сечение области Ω на уровне x_1, т. е. множество $\{(x_2,\dots,x_n):(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega\}$, то

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=\int\limits_{a_1}^{b_1}dx_1\int\limits_{\Omega_{x_1}}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,dx_2\dots dx_n.$$

В частности, если Ω имеет вид

$$\begin{gathered}a_1\le x_1\le b_1,\\ a_2(x_1)\le x_2\le b_2(x_1),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_n(x_1,\dots,x_{n-1})\le x_n\le b_n(x_1,\dots,x_{n-1}),\end{gathered}$$

где a_1, b_1, $a_1 < b_1$, — числа, а a_i, b_i, $a_i < b_i$, $i = 2, \ldots, n$, — функции от соответствующих переменных, то

$$\int\limits_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} dx_2 \cdots \int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_2(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

При нахождении многомерных интегралов надо иметь в виду, что исполнение одного шага на пути уменьшения размерности области интегрирования может привести к рекуррентной по размерности n формуле понижения, согласно которой исходный интеграл I_n как-то сводится к такому же интегралу I_{n-1} по такого же, как и исходный, типу множества, но уже меньшей размерности. Продолжая так далее, можно прийти к одномерному интегралу.

Для многомерного интеграла имеет место формула замены переменной. Если

$$(x_1, \ldots, x_n) = (x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n))$$

— диффеоморфизм, при котором замкнутая область D пространства переменных $(u_1, \ldots, u_n)$ переводится на область Ω, и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная на Ω непрерывная функция, то

$$\int\limits_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int\limits_{D} \cdots \int f(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)) \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{(u_1, \ldots, u_n)} \right| du_1 \ldots du_n. \tag{23.9}$$

Из конкретных многомерных замен отметим сферическую. Она задается равенствами

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \cos_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \end{aligned} \tag{23.10}$$

где

$$r > 0, \quad 0 < \varphi_i < \pi,\ i = 1, \ldots, n-2, \quad 0 < \varphi_{n-1} < 2\pi,$$

а ее якобиан находится по формуле

$$\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}.$$

23.14. Задачи.

1. Найти объем n-мерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1}+\dots+\frac{x_n}{a_n}\le 1,\quad x_i\ge 0,\ a_i>0\ (i=1,\dots,n).$$

2. Найти объем n-мерного конуса, ограниченного поверхностями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\dots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\quad x_n=a_n.$$

3. Найти объем n-мерного шара

$$x_1^2+\dots+x_n^2\le a^2.$$

4. Найти $\int\limits_\Omega\cdots\int x_n^2\,dx_1\dots dx_n$, где область Ω определяется неравенствами

$$x_1^2+\dots+x_{n-1}^2\le a^2,\quad -\frac{h}{2}\le x_n\le\frac{h}{2}.$$

23.15. Несобственные кратные интегралы. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Последовательность Ω_k, $k\in\mathbb{N}$, называют *исчерпывающей множество* Ω, если

1) $\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Omega_k=\Omega$;

Будем рассматривать только такие функции на Ω, которые интегрируемы на любом открытом множестве D таком, что $\overline{D}\subset\Omega$.

Если для любой последовательности исчерпывающих множеств Ω_k, $k\in\mathbb{N}$, существует не зависящий от выбора последовательности Ω_k, $k\in\mathbb{N}$, предел

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

его называют *несобственным интегралом от функции f по области* Ω и используют обозначение

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k}\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

а f называют *интегрируемой в несобственном смысле на* Ω.

Сходящиеся несобственные интегралы обладают свойствами линейности, положительности и аддитивности по множествам интегрирования, для них справедлива формула замены переменной в обычном виде.

Для исследования сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции достаточно использовать какую-либо одну последовательность исчерпывающих множеств — для таких функций существование соответствующего предела и его величина не зависит от выбора последовательности исчерпывающих множеств.

Несобственный интеграл называют *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл от модуля функции. Известно, что *если кратный интеграл при условии $n\geq 2$ на размерность пространства n сходится, то он и абсолютно сходится.* Это утверждение подчеркивает различие подходов к несобственным интегралам в одномерном и в многомерном случаях.

23.16. Задачи.

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha}}$, **(2)** $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^4+y^4)^{\alpha}}$,

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{x^{\alpha}+y^{\beta}}$, $\Omega=\{x>0,\ y>0,\ x^{\alpha}+y^{\beta}>1\}$, $\alpha,\beta>0$,

(4) $\displaystyle\iint\limits_{y>1+x^2}\frac{dxdy}{(x+y)^{p}}$,

(5) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha}}$, $\Omega=\{x^2+y^2<1,\,x>0,\,0<y<x^2\}$,

(6) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{\alpha}}$, $\Omega=\{x>0,\,y>0,\,x+y<1\}$,

(7) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$, **(8)** $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

2. Показать, что интеграл

$$\iint\limits_{\substack{x>1,\\ y>1}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$\int\limits_1^\infty dx \int\limits_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy, \quad \int\limits_1^\infty dy \int\limits_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

сходятся.

3. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|<n,\\ |y|<n}} \sin(x^2+y^2)\,dxdy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2<2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dxdy = 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

4. Доказать, что повторные интегралы

$$\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dy, \quad \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dx$$

сходятся и имеют одинаковое значение. Найти это значение.