§ 24. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода

24.1. Пусть f — функция n переменных $x_1, \dots, x_n$, определенная по крайней мере в точках некоторой кривой γ в $\mathbb{R}^n$. Не оговаривая особо, в дальнейшем для простоты будем считать все рассматриваемые функции непрерывными или по крайней мере кусочно непрерывными. Пусть $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — параметризация кривой γ, т. е. гладкое невырожденное взаимно однозначное отображение промежутка $\langle a, b\rangle$ числовой прямой на γ. Определим *интеграл от f по кривой γ первого рода*, (будем также говорить *интеграл от f вдоль γ по элементу длины*), полагая

$$\int\limits_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n)\, ds = \int\limits_a^b f(x_1(t), \dots, x_n(t)) k(t)\, dt, \qquad (24.1)$$

где $k(t) = \sqrt{(x_1')^2(t) + \dots + (x_n')^2(t)}$ — коэффициент искажения длины, связанный с данной параметризацией. Нетрудно заметить, что коэффициент искажения длины равен модулю вектора скорости при движении по кривой, или, иначе, длине вектора $(x_1'(t), \dots, x_n'(t))$, касательного к кривой γ в точке $t \in \langle a, b\rangle$.

В определении криволинейного интеграла 1-го рода участвует параметризация кривой. Однако значение интеграла не зависит от параметризации и тем самым полностью определяется кривой γ и функцией f. Символ ds в обозначении интеграла указывает на то, что интеграл берется по элементу длины кривой.

Для размерностей $n = 2$ и $n = 3$ для точек $(x_1, \dots, x_n)$ используют более привычные обозначения (x, y) и (x, y, z) соответственно.

Согласно определению интеграла для его нахождения следует параметризовать кривую (если она задана не параметрически), перенести функцию в область параметров и найти интеграл вида (24.1) по промежутку.

24.2. Криволинейный интеграл обладает обычными для интеграла свойствами линейности (относительно функции при фиксированной кривой) и аддитивности (относительно кривой при фиксированной функции). Приведем точную формулировку.

Утверждение 1 (линейность интеграла). *Пусть даны кривая*

$\gamma \subset \mathbb{R}^n$ *и заданные на ней функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $g(x_1, \ldots, x_n)$. *Тогда*

$$\int\limits_\gamma (\alpha f(x_1, \ldots, x_n) + \beta g(x_1, \ldots, x_n))\, ds$$
$$= \alpha \int\limits_\gamma f(x_1, \ldots, x_n)\, ds + \beta \int\limits_\gamma g(x_1, \ldots, x_n)\, ds. \quad (24.2)$$

Утверждение 2 (аддитивность интеграла). *Пусть кривая* γ *представлена в виде объединения конечного набора попарно не пересекающихся кривых* $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. *Тогда для функции* f, *заданной на* γ, *имеет место равенство*

$$\int\limits_\gamma f(x_1, \ldots, x_n)\, ds = \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{\gamma_l} f(x_1, \ldots, x_n)\, ds. \quad (24.3)$$

24.3. Пример. Найдем интеграл $\int\limits_\gamma \sqrt{2y^2 + z^2}\, ds$, где γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

24.4. Задачи. Найти интегралы от заданных функций по указанным кривым:

(1) $\int\limits_\gamma (x + y)\, ds$, γ — граница треугольника с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;

(2) $\int\limits_\gamma xy\, ds$, где γ — четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте;

(3) $\int\limits_\gamma y^2\, ds$, где γ — арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

(4) $\int\limits_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$, где γ — часть винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

24.5. С геометрической точки зрения криволинейный интеграл первого рода от единичной функции равен длине кривой, по которой происходит интегрирование.

24.6. Задачи. Найти длины кривых:

(1) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ от $O(0,0,0)$ до $A(3,3,2)$;

(2) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$ при $0 < t < +\infty$.

24.7. Рассмотрим поверхность S в трехмерном пространстве переменных (x,y,z) и определенную на S функцию $f(x,y,z)$. Для простоты будем, не оговаривая, считать, что f кусочно непрерывна. Предположим, что S допускает параметризацию, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$, — какая-либо параметризация S. Число

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_\Omega f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))k(u,v)\,dudv, \tag{24.4}$$

где $k(u,v)$ — коэффициент искажения площади при параметризации Φ, называют *поверхностным интегралом первого рода от функции f по поверхности S*.

Коэффициент искажения $k(u,v)$ находится следующим образом. Рассмотрим векторы

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right), \\ \boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)\end{gathered} \tag{24.5}$$

Найдем скалярные произведения

$$E = \langle \boldsymbol{r}_1 | \boldsymbol{r}_1 \rangle, \quad F = \langle \boldsymbol{r}_1 | \boldsymbol{r}_2 \rangle, \quad G = \langle \boldsymbol{r}_2 | \boldsymbol{r}_2 \rangle, \tag{24.6}$$

т. е.

$$\begin{gathered}E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)^2, \\ F = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\frac{\partial z}{\partial v}(u,v), \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)^2,\end{gathered} \tag{24.7}$$

и тогда

$$k(u,v) = \sqrt{EG - F^2}. \tag{24.8}$$

Можно найти $k(u,v)$ и по такой формуле:

$$k(u,v) = \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2}. \tag{24.9}$$

Сопоставляя последние формулы с материалом п. 22.18, можно заметить, что они выражают площадь малого куска поверхности вблизи точки $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Как и криволинейный интеграл первого рода, поверхностный интеграл также обладает свойствами линейности и аддитивности. Точные формулировки аналогичны соответствующим для криволинейного интеграла, и мы оставляем их читателю.

24.8. Пример. Вычислим интеграл $\iint\limits_S xyz\,dS$, где S — часть параболоида $z = x^2 + y^2$, выделяемая условием $z \leqslant 1$.

24.9. Задачи. Найти поверхностные интегралы первого рода от заданных функций по указанным поверхностям:

(1) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dS$, где

(a) S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

(b) S — поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$;

(2) $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$, где

(a) S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

(b) S — поверхность куба $|x| \le a$, $|y| \le a$, $|z| \le a$,

(3) $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,dS$, где S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенная внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$;

(4) $\iint\limits_S z^2\,dS$, где S — поверхность $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $u \in [0,1]$, $v \in [0, 2\pi]$.

24.10. Ответы. К п. 24.4. (1) $1+\sqrt{2}$; (2) $ab(a^2+ab+b^2)/(3(a+b))$; (3) $\frac{256}{15}a^3$; (4) $\frac{2\pi}{3}(3a^2 + 4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2 + b^2}$. К п. 24.6. (1) 5; (2) $\sqrt{3}$. К п. 24.9. (1) (a) $8\pi\frac{R^4}{3}$, (b) $\pi\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; (2) (a) $4\pi R^4$, (b) $40a^4$; (3) $\frac{64\sqrt{2}}{15}$; (4) $\pi^3(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$.

§ 25. Криволинейный и поверхностный

интегралы второго рода

25.1. Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода будем рассматривать в рамках более общей ситуации, а именно как проявления интегрирования дифференциальных форм.

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $\omega(x; v_1, \ldots, v_k)$ — функция, зависящая от точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ и набора $v_1, \ldots, v_k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Если ω обладает следующими свойствами:

(α) при фиксированном $x \in \Omega$ она полилинейна и кососимметрична по $v_1, \ldots, v_k$, т. е. линейна по каждому из $v_1, \ldots, v_k$ при фиксированных остальных и меняет знак при перемене мест любых двух векторов этого из набора;

(β) при каждом фиксированном наборе $v_1, \ldots, v_k$ она гладкая как функция от x (т. е. имеет в Ω непрерывные все частные производные первого порядка),

то ее называют *дифференциальной формой порядка k* или *k-формой на области Ω*.

В дальнейшем мы будем подразумевать, что переменная x изменяется в некотором открытом множестве, как правило не оговаривая этого отдельно.

В обозначении дифференциальной формы векторную группу обычно не указывают, более того, и пространственную переменную нередко тоже не указывают.

Совокупность k-форм снабжается обычными (поточечными) операциями сложения форм и умножения их на вещественные числа. Относительно этих операций множество k-форм становится векторным пространством.

Нас будут интересовать дифференциальные формы первого, второго и третьего порядков в $\mathbb{R}^3$. Мы будем использовать для переменных привычные обозначения (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

25.2. Начнем с форм первого порядка. Поскольку для форм 1-го порядка полилинейность несколько условна (в векторной группе всего один вектор и говорить о перестановке местами векторов вряд ли имеет смысл), форма 1-го порядка — это линейный по вектору функционал. Размерность векторного пространства 1-форм равна трем. Его базис может быть составлен из трех проекторов dx, dy, dz, а именно из функционалов, действующих для любого $\xi \in \mathbb{R}^3$ по формулам

$$dx(\xi; v) = v_x, \; dy(\xi; v) = v_y, \; dz(\xi; v) = v_z, \quad v = (v_x, v_y, v_z).$$

Тем самым любая 1-форма ω^1 может быть представлена в виде разложения по указанному базису, т. е. в виде

$$\omega_1 = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Форма ω_1 полностью характеризуется коэффициентами $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ в ее разложении по базису. Отображение, которое сопоставляет каждому вектору $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ вектор с координатами $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, называют *векторным полем.* Таким образом, каждой 1-форме можно сопоставить векторное поле $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Нетрудно понять, что и обратно, каждому векторному полю $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ можно сопоставить 1-форму, у которой коэффициенты в разложении по (каноническому) базису суть координатные функции данного векторного поля.

Учитывая указанную связь между 1-формами и векторными полями, мы в зависимости от удобства или традиций будем говорить либо о 1-форме, либо о векторном поле, называя его при этом *силовым полем* (причина такого наименования кроется глубоко в физике и мы не будем пытаться ее оттуда достать). Если поле обозначить через $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, то связанную с ним 1-форму будем обозначать через $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$.

Пусть γ — гладкое одномерное ориентированное многообразие, расположенное в области задания 1-формы $\omega_1 = \omega^1_{\boldsymbol{F}}$. Пусть $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$ — какая-то параметризация γ, согласованная с заданной на γ ориентацией. Тогда интеграл от формы ω^1 по многообразию (кривой) γ, обозначаемый через

$$\int\limits_\gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

определяется так:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \\
&= \int\limits_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\
&+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\,dt
\end{aligned} \tag{25.1}$$

Известно, что число (25.1) не зависит от выбора параметризации и тем самым может выступать в качестве определения.

В определении интеграла от 1-формы (или, иначе говоря, от векторного поля $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, или *криволинейного интеграла второго рода*) заложен способ нахождения таких интегралов. При заданных поле F и кривой γ следует параметризовать γ, проверить согласование параметризации с заданной на γ ориентацией и затем, составив выражение (25.1), найти одномерный интеграл по отрезку.

Если параметризация φ не согласована с заданной на γ ориентацией, то в (25.1) следует поставить знак минус перед интегралом.

Ориентация одномерного многообразия (кривой) задается указанием ее начала и конца. Если при параметризации φ значения $\varphi(a), \varphi(b)$ совпадают соответственно с заданными началом и концом кривой, то параметризация согласована с ориентацией, в противном случае не согласована. Ориентация на кривой может быть также определена заданием на кривой непрерывного поля касательных векторов.

В краткой форме определение интеграла от 1-формы можно описать с помощью операции переноса 1-формы из $\mathbb{R}^3$ в пространство параметров (замены переменных в дифференциальной форме). Пусть дана 1-форма $\omega^1_{\boldsymbol{F}} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, где $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$. Пересадим ее в пространство параметров. Пусть $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, — параметризация кривой γ. Определим в пространстве параметров форму $\varphi^*\omega$, полагая

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega(t) &= P(x(t), y(t), z(t))dx(t) + Q(x(t), y(t), z(t))dy(t)\\ &\qquad + R(x(t), y(t), z(t))dz(t)\\ &= (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)\\ &\qquad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))\,dt \qquad (25.2)\end{aligned}$$

В терминах формы $\varphi^*\omega$ определение интеграла от $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ выглядит так:

$$\int\limits_\gamma \omega^1_{\boldsymbol{F}} = \int\limits_I \varphi^*\omega^1_{\boldsymbol{F}}. \qquad (25.3)$$

Укажем связь между интегралами первого и второго рода. Пусть даны векторное поле $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ и ориентированная кривая γ (разумеется, лежащая в области определения поля $\boldsymbol{F}$). Тогда

$$\int\limits_\gamma P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F}(x, y, z) | \tau(x, y, z)\rangle\,ds, \qquad (25.4)$$

где τ — (ориентирующий) касательный вектор в точке (x, y, z).

25.3. Пример.

25.4. Задачи.

1. Вычислить криволинейные интегралы по кривым γ, пробегаемым в направлении возрастания параметра:

(1) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{y}{x}\,dx + dy$, γ — кривая $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$;

(2) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} 2xy\,dx - x^2\,dy$, γ — дуга параболы $y = \sqrt{x/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

2. Вычислить криволинейные интегралы по кривым, пробегаемым от точки A до точки B:

(1) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{3x}{y}\,dx - \frac{2y^3}{x}\,dy$, γ — дуга параболы $x = y^2$, $A(4,2)$, $B(1,1)$;

(2) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} x\,dy$, γ — полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $A(0,-a)$, $B(0,a)$.

3. Вычислить криволинейные интегралы по отрезкам AB, ориентированным в направлении от точки A до точки B:

(1) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} (2x - y)\,dx + (4x + 5y)\,dy$, $A(3,-4)$, $B(1,2)$;

(2) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} (4x + 5y)\,dx + (2x - y)\,dy$, $A(1,-9)$, $B(4,-3)$.

4. Вычислить криволинейные интегралы по кривым, пробегаемым в направлении возрастания параметра:

(1) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} (2a - y)\,dx + (y - a)\,dy$, γ — дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

(2) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, γ — дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

5. Вычислить криволинейные интегралы по кривым, пробегаемым в направлении возрастания параметра:

(1) $\int\limits_{\gamma} yz\,dx + z\sqrt{a^2-y^2}\,dy + xy\,dz$, γ — дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \dfrac{a}{2\pi}t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

(2) $\int\limits_{\gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, γ — окружность

$$x = a\cos\alpha\cos t, \quad y = a\cos\alpha\sin t, \quad z = a\sin\alpha \quad (\alpha = \mathrm{const}).$$

6. Вычислить криволинейные интегралы по отрезкам AB, ориентированным в направлении от точки A до точки B:

(1) $\int\limits_{\gamma} x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$, $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$;

(2) $\int\limits_{\gamma} \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, $A(1,1,1)$, $B(4,4,4)$.

Ответы. **1.** (1) $3/2$; (2) $12/5$. **2.** (1) -11; (2) $\pi a^2/2$. **3.** (1) 8; (2) 6. **4.** (1) πa^2; (2) $3\pi a^{4/3}/16$. **5.** (1) 0; (2) $-\pi a^2\cos^2\alpha$. **6.** (1) 13; (2) $3\sqrt{3}$.

25.5. Займемся интегрированием форм второго порядка. Формы второго порядка образуют 3-мерное векторное пространство, но для того чтобы описать его канонический базис, нам потребуется еще одно понятие.

Рассмотрим какие-либо две 1-формы из канонического базиса, например dx и dy. Дифференциальную 2-форму, обозначаемую через $dx \wedge dy$ и действующую при любом $\xi = (x,y,z)$ на векторах $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ следующим образом:

$$dx \wedge dy(\xi; u, v) = \begin{vmatrix} dx(u) & dy(u) \\ dx(v) & dy(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix},$$

называют *внешним произведением форм* dx, dy (здесь u_x, u_y и т. п. означают проекции вектора на соответствующие координатные оси, а не производные по x или по y). Иначе говоря, для нахождения внешнего произведения форм dx, dy следует взять соответствующие координаты векторов и составить из них определитель (т. е. найти площадь проекции векторов u, v на указываемые базисными формами координаты). Подобным образом определяются произведения $dy \wedge dz$ и $dz \wedge dx$. Эти три 2-формы и образуют канонический базис векторного пространства 2-форм в $\mathbb{R}^3$.

Для каждой точки (x, y, z) запишем разложение 2-формы по каноническому базису:

$$\omega^2(x, y, z) = P(x, y, z)\, dy \wedge dz + Q(x, y, z)\, dz \wedge dx + R(x, y, z)\, dx \wedge dy.$$

Из этого разложения видно, что каждой 2-форме сопоставляется векторное поле $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ или, если не указывать координаты точки пространства, поле (P, Q, R). Обратно, каждому векторному полю соответствует 2-форма, в которой координатные функции этого поля служат коэффициентами в разложении формы по каноническому базису. Указанное взаимно однозначное соответствие позволяет вместо 2-форм обращаться к векторным полям, а также вместо векторных полей рассматривать в подходящей постановке 2-формы. При сопоставлении полю (P, Q, R) 2-формы поле называют *полем потока* и нередко вместо (P, Q, R) используют обозначение $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Но об этом несколько позже.

А сейчас перейдем к определению интеграла от 2-формы, т. е. определим интеграл

$$\iint\limits_S \omega^2_{\boldsymbol{a}} = \iint\limits_S P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx + R(x, y, z)\, dxdy$$

(как правило, знак $\wedge$ внешнего умножения будем опускать, если это не вызовет недоразумений).

Рассмотрим ориентированную поверхность S и будем считать, что она может быть параметризована одной параметризацией, т. е. пусть существуют область $D \subset \mathbb{R}^2$ и гладкое невырожденное взаимно однозначное отображение $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ области D на S. Будем предполагать, что параметризация φ согласована с заданной на поверхности ориентацией, т. е. векторы

$$d\varphi(u, v)(e_1) = (x'_u(u, v), y'_u(u, v), z'_u(u, v)),$$
$$d\varphi(u, v)(e_2) = (x'_v(u, v), y'_v(u, v), z'_v(u, v))$$

ориентированы положительно (в смысле заданной на поверхности ориентации). Если поверхность ориентирована заданием вектора нормали $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ в точке $(x, y, z) \in S$, то согласованность параметризации с заданной на поверхности ориентацией означает, что определитель матрицы

$$(\boldsymbol{n}(x, y, z), d\varphi(u, v)(e_1), d\varphi(u, v)(e_2)) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ \cos\beta & y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \\ \cos\gamma & z'_u(u, v) & z'_v(u, v) \end{pmatrix}$$

положителен (здесь и в аналогичных ситуациях $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\beta$ суть компоненты единичного вектора нормали $\boldsymbol{n}$, называемые его *направляющими косинусами*). Для выяснения знака определителя можно рассмотреть его в какой-то одной точке поверхности, т. е. можно взять какие-то конкретные значения параметров u, v и посчитать определитель для этих значений, в других точках знак будет тот же.

Пересадим форму w в пространство параметров, т. е. сделаем замену переменной в форме ω и перейдем к форме $\varphi^*\omega$. Делается это так: на места переменных x, y, z ставятся значения $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ соответствующих координатных функций параметризации φ, на места dx, dy, dz ставятся дифференциальные формы первого порядка $dx(u, v)$, $dy(u, v)$, $dz(u, v)$, представляющие собой дифференциалы координатных функций, после чего раскрываются скобки во внешних произведениях. Получается форма второго порядка вида $g(u, v)\, du \wedge dv$ на области D в $\mathbb{R}^2$, интеграл от которой есть интеграл от функции g по области D. В случае, если параметризация не согласована с заданной ориентацией, то перед интегралом ставится знак минус. Проделав намеченные действия для согласованной с ориентацией параметризацией φ можно получить выражение для интеграла:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_S \omega^2_{\boldsymbol{a}} = \iint\limits_S P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx + R(x, y, z)\, dxdy \\
&= \int\limits_D \varphi^*\omega^2_{\boldsymbol{a}} = \iint\limits_D \Bigg(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \\ z'_u(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix} \\
&+ Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} z'_u(u, v) & z'_v(u, v) \\ x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \end{vmatrix} \\
&+ R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix} \Bigg)\, dudv.
\end{aligned}$$

Укажем связь между поверхностными интегралами первого и второго рода. Пусть S — поверхность, ориентированная вектором нормали $\boldsymbol{n}$, и пусть $\omega^2_{\boldsymbol{a}} = P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx + R(x, y, z)\, dxdy$ — 2-форма, порожденная полем $\boldsymbol{a}$. Тогда

$$\int\limits_S \omega^2_{\boldsymbol{a}} = \int\limits_S \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{n} \rangle\, dS, \tag{25.5}$$

или, подробнее,

$$\begin{gathered}\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy \\ = \int\limits_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\,dS,\end{gathered} \tag{25.6}$$

где $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

25.6. Задачи. Вычислить интегралы

(1) $\iint\limits_S (2z-x)\,dydz+(x+2z)\,dzdx+3z\,dxdy$, S — верхняя сторона треугольника $x+4y+z=4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$;

(2) $\iint\limits_S yz\,dydz + zx\,dzdx + xy\,dxdy$, S — внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$;

(3) $\iint\limits_S y\,dzdx$, S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

(4) $\iint\limits_S (x^5+z)\,dydz$, S — внутренняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\leqslant 0$;

Ответы. (1) $128/3$; (2) 0; (3) $4\pi R^3/3$; (4) $-2\pi R^7/105$.

§ 26. Формулы Грина, Стокса, Гаусса — Остроградского

26.1. Будем отталкиваться от общей *формулы Стокса для гладких многообразий с краем.* Начнем с определения используемой в этой формуле операции дифференцирования форм, подробно определив дифференцирование для 1-форм в $\mathbb{R}^3$ и сопроводив определение словами, вполне пригодными для проведения дифференцирования форм любого порядка.

Пусть $\omega^1 = f(x,y,z)dx$ — одна из базисных 1-форм в $\mathbb{R}^3$. Определим форму $d\omega^1$ следующим образом: возьмем дифференциал $df(x,y,z)$, рассмотрим его как 1-форму, разложенную по базисным формам, т. е. запишем

$$df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\,dx + f'_y(x,y,z)\,dy + f'_z(x,y,z)\,dz,$$

и положим

$$
\begin{aligned}
df(x,y,z) &= df(x,y,z)\wedge dx \\
&= (f'_x(x,y,z)\,dx + f'_y(x,y,z)\,dy + f'_z(x,y,z)\,dz)\wedge dx. \qquad (26.1)
\end{aligned}
$$

Если раскрыть скобки в последнем выражении формулы (26.1), то получаем разложение формы $d\omega^1$ по базисным 2-формам:

$$
df(x,y,z)\wedge dx = f'_z(x,y,z)\,dz\wedge dx + f'_y(x,y,z)\,dx\wedge dy.
$$

Аналогично определяется дифференцирование других базисных 1-форм, дифференциал произвольной 1-формы задается как сумма дифференциалов базисных 1-форм в ее разложении по базису. Запишем результат дифференцирования подробнее:

$$
\begin{aligned}
d\omega^1_{\boldsymbol{F}} &= d(P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz) \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (26.2)
\end{aligned}
$$

Поле, координаты которого получились в разложении формы $d\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ по базисным, называют *ротором поля* $\boldsymbol{F}$ и обозначают через $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$. В терминах ротора равенство (26.2) можно записать так:

$$
d\omega^1_{\boldsymbol{F}} = \omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{F}}. \qquad (26.3)
$$

Общая формула Стокса. *Пусть M — гладкое ориентированное k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, $k<n$, с краем ∂M, ориентация которого индуцирована ориентацией многообразия, и пусть ω — гладкая форма, заданная на всем многообразии M. Тогда имеет место равенство*

$$
\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega. \qquad (26.4)
$$

Самый простой случай $n=2$, $k=1$. В этом случае из общей формулы Стокса получается

Формула Грина. Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$ с (кусочно) гладкой границей γ, при этом обход границы осуществляется так, что для каждой точки $(x,y)\in\gamma$ близлежащая часть области остается слева от γ. Пусть $\omega^1 = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ — гладкая 1-форма на D. Тогда

$$
\int\limits_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy.
$$

Следующий случай $n = 3$, $k = 1$.

Классическая формула Стокса. Пусть S — ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с краем γ, ориентация которого индуцирована ориентацией поверхности S. Пусть $\omega^1 = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ — 1-форма на S. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
$$= \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{26.5}$$

Формулу (26.5) называют (*классической*) *формулой Стокса.* Используя связь между интегралами первого и второго рода, формулу Стокса можно записать так:

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \tag{26.6}$$

(в формуле (26.6) определитель в последнем интеграле понимается так: надо раскрывать его по первой строке, на пустые места в операции взятия производных ставить соответствующие функции из третьей строки и совершать нахождения производных)

Можно записать формулу Стокса с использованием операции ротора векторного поля:

$$\int\limits_{\gamma} \omega^1_{\boldsymbol{F}} = \iint\limits_{S} \omega^2_{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}}. \tag{26.7}$$

Этот вид формулы иногда сопровождается такими словами: циркуляция векторного поля по ограничивающему поверхность контуру равен потоку ротора этого поля через поверхность.

Последний частный случай общей формулы Стокса в $\mathbb{R}^3$ представляется значениями $n = 3$, $k = 2$.

Формула Гаусса — Остроградского. Рассмотрим трехмерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ с краем, или, иначе говоря, замкнутую область D, ограниченную (кусочно) гладкой поверхностью S, снабженной индуцированной ориентацией (выбирается внешняя нормаль к поверхности). Пусть на D задана 2-форма $\omega^2_{\boldsymbol{a}} = P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy$. Ее дифференциал равен

$$d\omega^2_{\boldsymbol{a}} = dP(x,y,z) \wedge dy \wedge dz + dQ(x,y,z) \wedge dz \wedge dx + dR(x,y,z) \wedge dx \wedge dy$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{26.8}$$

Общая формула Стокса в рассматриваемом случае примет вид

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy$$
$$= \iiint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{26.9}$$

Равенство (26.9) называют *формулой Гаусса — Остроградского.*

Для векторного поля $\boldsymbol{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ скалярное поле (т. е. функцию) $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$, называют *дивергенцией поля* $\boldsymbol{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ и обозначают символом $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. В терминах дивергенции формула Гаусса — Остроградского выглядит так:

$$\int\limits_S \omega^2_{\boldsymbol{a}} = \iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\, dxdydz. \tag{26.10}$$

Формула (26.9) (или (26.10)) с физической точки зрения говорит о том, что поток векторного поля через ограничивающую тело поверхность равен объемному интегралу от дивергенции этого поля.

26.2. Пункт с примером применения формулы Грина.

26.3. Задачи. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева:

(1) $\displaystyle\int\limits_\gamma (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$, $\quad(a)$ γ — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, (b) γ — окружность $x^2+y^2 = ax$;

(2) $\displaystyle\int\limits_\gamma (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$, γ — граница треугольника с вершинами $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,5)$;

(3) $\displaystyle\int\limits_\gamma (y-x^2)\,dx + (x+y^2)\,dy$, γ — граница кругового сектора $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha \leqslant \pi/2$;

(4) $\displaystyle\int\limits_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))\,dx$, γ — окружность $x^2+y^2 = R^2$;

Ответы. (1) (a) 0, (b) $-\pi a^3/8$; (2) $-140/3$; (3) 0; (4) $\pi R^4/4$.

26.4. Пункт с примером применения формулы Стокса.

26.5. Задачи. Используя формулу Стокса, вычислить интегралы:

(1) $\displaystyle\int\limits_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, где L — граница треугольника с вершинами в точках $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0,1,0)$;

(2) (a) $\displaystyle\int\limits_L y\,dx+z\,dy+x\,dz$, ($b$) $\displaystyle\int\limits_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+z\,dz$, где L — окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0,0,1)$;

(3) $\displaystyle\int\limits_L y\,dx-z\,dy+x\,dz$, где L — кривая $x^2+y^2+2z^2=2a^2$, $y-x=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(1,0,0)$;

(4) $\displaystyle\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, где L — кривая $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $z>0$, $0<b<a$, ориентированная положительно относительно вектора $(0,0,1)$.

Ответы. (1) $-a^3$; (2) (a) $\pi\sqrt{3}R^2$, (b) 2π; (3) $2\pi a^2$; (4) $2\pi ab^2$.

26.6. Пункт с примером применения формулы Гаусса — Остроградского.

26.7. Задачи. 1. С помощью формулы Гаусса — Остроградского вычислить интегралы:

(1) $\displaystyle\iint\limits_S z\,dxdy+(5x+y)\,dydz$, где S:

(a) внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2\leqslant z^2$, $0\leqslant z\leqslant 4$;

(b) внутренняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$;

(c) внешняя сторона границы области $1<x^2+y^2+z^2<4$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_S x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dxdy$, где S:

(a) внешняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z\leqslant a$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$;

(b) внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Ответы. 1. (1) (a) 128π, (b) -48π, (c) 56π; (2) (a) $3a^5/20$, (b) $12\pi R^5/5$.

2. Доказать объем V тела, ограниченного гладкой поверхностью S, равен любому из следующих выражений:

$$V=\left|\frac{1}{3}\iint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy\right|$$

$$=\iint\limits_S x\,dydz=\iint\limits_S y\,dzdx=\iint\limits_S z\,dxdy.$$

3. Используя формулу из предыдущей задачи, найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$x=(b+a\cos u)\cos v,\ \ y=(b+a\cos u)\sin v,\ \ z=a\sin u,\quad b\geqslant a>0.$$

4. Доказать, что если S — замкнутая гладкая поверхность, $\boldsymbol{n}$ — ее внешняя нормаль, $\boldsymbol{l}$ — некоторый постоянный вектор, то

$$\iint\limits_S \cos(\widehat{\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}})\,dS=0.$$

5. Пусть $G\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей S, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к S, $\boldsymbol{r}=(x-\xi)\boldsymbol{i}+(y-\eta)\boldsymbol{j}+(z-\zeta)\boldsymbol{k}$, где (ξ,η,ζ) — фиксированная точка в $\mathbb{R}^3$.

(1) Доказать формулу

$$\iint\limits_S \cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\,dS=\iiint\limits_G\frac{dxdydz}{|\boldsymbol{r}|}.$$

(2) Вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x,y,z)=\iint\limits_S\frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})}{\boldsymbol{r}^2}\,dS,\quad (\xi,\eta,\zeta)\notin S.$$

6. Доказать, что если $G\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей S, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к S, $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в G функции, то

$$\iiint\limits_G\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdydz=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}} & \frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\\ u & v\end{vmatrix}dS.$$

7. Доказать, что если $u(x, y, z)$ — гармоническая функция в ограниченной замкнутой области G с гладкой границей S, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к S, $\boldsymbol{r} = (x-\xi)\boldsymbol{i} + (y-\eta)\boldsymbol{j} + (z-\zeta)\boldsymbol{k}$, где (ξ, η, ζ) — внутренняя точка области G, то

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(u \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})}{\boldsymbol{r}^2} + \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS.$$

8. Доказать, что если $u(x, y, z)$ — функция, гармоническая внутри сферы S радиусом R с центром в точке (x_0, y_0, z_0), то

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_S u(x, y, z)\, dS.$$

26.8. Мы выше определили операцию дифференцирования форм, которая k-форму переводит в $k+1$-форму (порядок формы повышается на единицу. Нетрудно посчитать, что $d(d\omega) = 0$ для любой формы ω, т. е. формы, представляющие собой дифференциалы каких-то формы, выделяются среди других форм.

Форму ω называют *замкнутой*, если ее дифференциал равен нулю, и *точной*, если она является дифференциалом некоторой формы. Равенство нулю результата повторного дифференцирования говорит о том, что всякая точная форма замкнута. Оказывается (и это составляет результат выдающейся теоремы Пуанкаре), что замкнутая в открытой связной области форма точна, т. е. является дифференциалом некоторой формы.

Рассмотрим вопросы связи замкнутых и точных форм только для простейшего случая форм первого порядка, причем преимущественно в терминологии связанных с формами полей (скалярных или векторных).

Форма $\omega^1_{\boldsymbol{F}} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ точна в области $D \subset \mathbb{R}^3$, если в этой области существует такая функция U, что $\omega^1_{\boldsymbol{F}} = dU$, т. е.

$$P(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (26.11)$$

Функцию U называют *потенциалом* формы ω или поля $\boldsymbol{F}$, а о поле $\boldsymbol{F}$ говорят, что оно *потенциально*. Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\boldsymbol{F}$ в связной области пространства является обращение в нуль ротора этого поля: $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$.

Если рассматривается форма в области из $\mathbb{R}^2$, то необходимым и достаточным условием существования ее потенциальности является выполнение равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{26.12}$$

в каждой точке области.

Для точной (или замкнутой) формы ω в связной области интеграл от этой формы по любому замкнутому контуру равен нулю. Это приводит к такому результату. Пусть A, B — произвольные точки данной области. Тогда интегралы по любым кривым с началом в точке A и концом в точке B равны между собой. В таком случае говорят, что интеграл не зависит от пути интегрирования и для его обозначения иногда используют символ $\int\limits_{AB} \omega$.

Если о данном векторном поле ставится вопрос, потенциально ли оно, и если да, то найти его потенциал, во-первых, надо в связной области проверить, будут ли выполнены условия (26.11) или (26.12), гарантирующие его потенциальность, а затем найти потенциал, используя независимость интеграла от пути интегрирования. Поступают так: фиксируют точку A_0 в данной области, рассматривают переменную точку A и интеграл $\int\limits_{A_0 A} \omega$ даст искомый потенциал как функцию от A. В качестве путей интегрирования обычно выбирают наиболее простые пути, например, ломаные с началом в точке A_0 и концом в A, звенья которых параллельны координатным осям (в таком случае получаются легко параметризуемые отрезки, интегралы по которым представляют собой обычные одномерные интегралы).

26.9. Задачи.

1. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой γ с началом в точке A и концом в точке B:

(1) $\int\limits_\gamma x\,dx + y\,dy, \quad A(-1,0),\ B(-3,4);$

(2) $\int\limits_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy,\ A(2,-1),\ B(1,0).$

2. Найти функцию u по заданному полному дифференциалу этой функции:

(1) $du = (e^{2y} - 5y^3e^x)\,dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)\,dy;$

(2) $du = e^{x-y}((1+x+y)\,dx + (1-x-y)\,dy);$

(3) $du = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$;

(4) $du = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$.

Ответы. 1. (1) 12; (2) 1. **2.** (1) $u = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$; (2) $u = e^{x-y}(x+y) + C$; (3) $u = \ln|x+y+z| + C$; (4) $u = \mathrm{arctg}(xyz) + C$.

§ 27. Физические приложения

27.1. В этом пункте напомним физическую терминологию, сопровождающую рассмотренные выше понятия.

Пункт с сообщениями о физической терминологии — поле работы, поле потока, работа силового поля, поток векторного поля через поверхность;

27.2. Задачи.

1. Найти работу поля $\boldsymbol{F} = (-y, x)$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(-1,0)$ (1) вдоль ломаной $AMNB$, где $M(1,1)$, $N(-1,1)$; (2) вдоль верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 1$; (3) вдоль ломаной APB, где $P(0,1)$.

2. Найти работу поля $\boldsymbol{F}$ вдоль контура γ, если

(1) $\boldsymbol{F}(yz, zx, xy)$, γ — ломаная $ABCD$ с вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(2,3,1)$, $D(2,3,4)$;

(2) $\boldsymbol{F} = (x+z, x, -y)$, γ — замкнутая ломаная $ABCA$ с вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$;

(3) $\boldsymbol{F} = (xy, yz, zx)$, γ — замкнутая ломаная $ABCDA$ с вершинами $A(1,1,-1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-1,-1,-1)$, $D(1,-1,1)$;

(4) $\boldsymbol{F} = (z, x, y)$, γ — окружность $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x+y+z = R$, ориентированная против часовой стрелки со стороны оси Oz.

4. Найти циркуляцию поля $\boldsymbol{F}$ вдоль контура γ, ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если

(1) $\boldsymbol{F} = z^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$, $\gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$;

(2) $\boldsymbol{F} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$, $\gamma = \{4(x^2+y^2) = z^2,\ x+y+z = 1\}$;

(3) $\boldsymbol{F} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$, $\gamma = \{z = x^2 + y^2,\ z + y = 2\}$;

(4) $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0\}$.

Ответы. 1. (1) 4; (2) π; (3) 2. **2.** (1) 23; (2) 1/2; (3) $-4/3$; (4) $2\pi R^2/\sqrt{3}$. **3.** (1) $-\pi a^2$; (2) $2\pi ab$. **4.** (1) $4\pi\sqrt{3}/9$; (2) 0; (3) 0; (4) -4π.

27.3. Пример нахождения потока.

27.4. Задачи.

1. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через ориентированную нормалью $\boldsymbol{n}$ поверхность S:

(1) $\boldsymbol{a} = (x - 2z, x + 3y + z, 5x + y)$, S — противоположная началу координат сторона плоского треугольника с вершинами $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;

(2) $\boldsymbol{a} = (x^2, y^2, z^2)$, S — внешняя сторона полной поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

(3) $\boldsymbol{a} = (y^2, x^2, z^2)$, S — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, расположенная в первом октанте между плоскостями $z = 0$ и $z = a$, $a > 0$;

(4) $\boldsymbol{a} = (0, y^2, z)$, S — ограниченная часть внешней стороны параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченная плоскостью $z = 2$;

(5) $\boldsymbol{a} = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 - 1})$, S — часть внешней стороны гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = \sqrt{3}$;

(6) $\boldsymbol{a} = ((y, z, x)$, S — часть внутренней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в области $x > |z|$;

(7) $\boldsymbol{a}(3x, -y, -z)$, S — часть внешней стороны параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, расположенная в первом октанте;

(8) $\boldsymbol{a} = (xy, yz, zx)$, S — часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенная в первом октанте.

2. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность S непосредственно и по теореме Гаусса — Остроградского:

(1) $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$, S — внешняя поверхность куба $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < a$;

(2) $\boldsymbol{a} = (z-y)\boldsymbol{i} + (x-z)\boldsymbol{j} + (y-x)\boldsymbol{k}$, S — полная внешняя поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z = 1$, $x+y-z = 1$, $y = 0$, $x = 0$;

(3) $\boldsymbol{a} = y^2z\boldsymbol{i} - yz^2\boldsymbol{j} + x(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$, S — полная внешняя поверхность цилиндра $y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant x \leqslant a$;

(4) $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$, S — полная внешняя поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant H$.

Ответы. 1. (1) $5/3$; (2) $1/4$; (3) $2a^4/3$; (4) -2π; (5) $2\sqrt{3}\pi$; (6) 0; (7) $81\pi/8$; (8) $3\pi/16$. **2.** (1) $24a^5$; (2) 0; (3) $-\pi a^5/4$; (4) πH^3.