§ 6. Свойства дифференцируемых функций

6.1. Производная функции в данной точке отражает локальные свойства функции, т. е. свойства, присущие функции в некоторой окрестности данной точки. Вместе с тем есть группа утверждений, позволяющих из свойств производной в каждой точке некоторого промежутка получать те или иные свойства функции на всем промежутке, т. е. глобальные свойства.

Основой перехода от локальных свойств к глобальным служат формулируемые ниже теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

Теорема Ролля. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.*

Теорема Лагранжа. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \tag{6.1}$$

или, иначе,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{6.2}$$

Теорема Коши. *Пусть функции f, g непрерывны на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируемы на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c). \tag{6.3}$$

В случае, если $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$, равенство (6.3) обычно записывают так:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{6.4}$$

Переход от свойств производной к свойствам функции отражен в следующих утверждениях.

Теорема (критерий монотонности функции). *Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на (a, b). Тогда для того чтобы f была возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ (соответственно $f'(x) \leqslant 0$) для любого $x \in (a, b)$. Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) в каждой точке $x \in (a, b)$, то f строго возрастает (убывает) на $[a, b]$.*

Теорема (критерий постоянства функции). *Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f постоянна на $[a, b]$ в том и только в том случае, если $f'(x) = 0$ в каждой точке $x \in (a, b)$.*

Теорема (об оценке приращения). *Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на (a, b). Предположим, что найдутся такие константы m, M, что $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ для каждого $x \in (a, b)$. Тогда*

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a). \tag{6.5}$$

В частности, если $|f'(x)| \leqslant C$ для любого $x \in (a, b)$, то

$$|f(b) - f(a)| \leqslant C|b-a|. \tag{6.6}$$

6.2. Задачи.

1. Дать геометрическую интерпретацию теорем Ролля, Лагранжа и Коши.

2. Доказать тождество

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$$

при $|x| \geqslant 1$.

3. Доказать неравенства

(1) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$,

(2) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y), \quad 0 < y < x,\ p > 1$,

(3) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a-b|$, **(4)** $\dfrac{a-b}{a} < \ln \dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, $0 < b < a$,

6.3. Пусть функция f имеет в точке a производные до порядка n включительно. Тогда полином

$$P_n(x) = P_n(x, a, f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

называют *полиномом Тейлора функции f в точке a*. Равенство

$$f(x) = P_n(x, a, f) + R_n(x, a, f),$$

в котором $R_n(x, a, f) = f(x) - P_n(x, a, f)$, называют *формулой Тейлора*, а $R_n(x, a, f)$ — *остатком в формуле Тейлора*.

При использовании формулы Тейлора большое значение имеют свойства остатка. Такие свойства могут носить локальный или глобальный характер. Здесь мы остановимся на локальных свойствах остатка.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть f имеет n производных в точке a. Тогда $R_n(x) = o(x-a)^n$, т. е.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n. \tag{6.7}$$

Отметим, что асимптотическое представление (6.7) функции f вблизи точки a единственно, т. е. если f представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o(x-a)^n,$$

то $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Если в формулировке задачи встречается предложение разложить какую-то функцию по целым положительным степеням $x-a$ или по степеням x, то имеется в виду необходимость записать формулу Тейлора, в которой в качестве начальной точки выбрана точка a или соответственно точка 0.

Если в качестве начальной берется нулевая точка, т. е. если идет разложение по степеням x, то формулу Тейлора часто называют *формулой Маклорена.*

Мы уже встречались с небольшим списком асимптотических разложений конкретных функций, состоящим из формул (3.11)–(3.15). Напомним и расширим его:

$$\begin{aligned}\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}), \tag{6.9}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \tag{6.10}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n), \tag{6.11}$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \tag{6.12}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n), \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \tag{6.13}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n), \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} + o(x^n), \tag{6.14}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1}). \tag{6.15}$$

6.4. Пример. Разложим функцию $\ln\frac{\sin x}{x}$ по целым положительным степеням x до члена с x^6. Воспользуемся известными разложениями логарифма и синуса:

$$\begin{aligned}
\ln\frac{\sin x}{x} &= \ln\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x} \\
&= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6)\right)\right) \\
&= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{3!}\right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} - \frac{x^4}{2(3!)^2} + \frac{x^6}{3!\cdot 5!} - \frac{x^6}{3\cdot(3!)^3} + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{120}\right)x^4 - \left(\frac{1}{5040} - \frac{2}{720} + \frac{1}{648}\right)x^6 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).
\end{aligned}$$

6.5. Задачи.

1. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$:

(1) $\dfrac{x}{e^x - 1}$, **(2)** $e^{x/\sin x}$, **(3)** $\sin(\operatorname{arctg} x)$. **(4)** $\dfrac{x}{\arcsin x}$.

2. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^5)$:

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$, **(2)** $(1+x)^{\sin x}$.

3. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$:

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$, **(2)** $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+4}$, **(3)** $\dfrac{x^2+1}{2x-3}$, **(4)** $\dfrac{x^3}{x-1}$.

4. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o(x-x_0)^n$:

(1) $\ln(2+x-x^2)$, $x_0=1$; **(2)** $\ln(x^2-7x+12)$, $x_0=1$;

(3) $\dfrac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$, **(4)** $\dfrac{(x-2)^2}{3-x}$, $x_0=2$.

5. Функцию $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ $(x>0)$ разложить по целым положительным степеням дроби $1/x$ до члена с $1/x^3$.

6.6. Пример. Подобрать коэффициенты A, B так, чтобы при $x\to 0$ имело место асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5). \tag{6.16}$$

Воспользуемся разложениями для синуса и косинуса. Равенство (6.16) запишем так:

$$\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)}-\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}=O(x^5),$$

или

$$\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6))(x+Bx^3)-(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7))(1+Ax^2)}{(x+o(x))(x+o(x))} = O(x^5),$$

а это по определению означает, что отношение выражения в левой части последнего равенства к x^5 ограничено. Запишем это отношение, одновременно проведя преобразования:

$$\frac{(B-A-1/3)x^3+(A/6-B/2+1/30)x^5+O(x^7)}{x^7+o(x^7)}.$$

Это выражение ограничено в окрестности нуля в том случае, если члены с x^3 и x^5 отсутствуют, т. е. если

$$B-A-\frac{1}{3}=0,\quad \frac{A}{6}-\frac{B}{2}+\frac{1}{30}=0.$$

Решая эту систему, получим $A = -2/5$, $B = -1/15$.

6.7. Задачи.

1. При каких a и b величина $x-(a+b\cos x)\sin x$ будет бесконечно малой 5-го порядка относительно x?

2. При каких A, B, C, D при $x \to 0$ справедлива формула

$$e^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2} + O(x^5)?$$

3. Найти такие A, B, чтобы при $x \to 0$ были справедливы асимптотические равенства

(1) $Ae^x - \dfrac{B}{1-x} = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$,

(2) $A\arcsin x + B\,\mathrm{arctg}\, x = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{8}x^5 + o(x^6)$.

6.8. Локальная форма остатка в формуле Тейлора дает лишь асимптотическую информацию. По ней невозможно ответить, например, на вопрос об оценке абсолютной погрешности остатка при каком-либо фиксированном x или на каком-то отрезке и на другие вопросы нелокального характера.

Для получения глобальных свойств служат соответствующие формы остатка в формуле Тейлора.

Теорема (формы Лагранжа и Коши остатка в формуле Тейлора). *Пусть функция f имеет непрерывные производные до порядка n в каждой точке отрезка I с концами a, x и в открытом промежутке с этими концами имеет производную порядка $n+1$. Тогда*

(Л) *Существует такая точка ξ между a и x, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{6.17}$$

(форма Лагранжа остатка),

(К) *существует такое $\theta \in (0,1)$, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1} \tag{6.18}$$

(форма Коши).

Остаток в форме Лагранжа можно записать и так: найдется такое $\mu \in (0,1)$, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\mu(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (6.19)$$

Глобальные формы остатка уже позволяют ответить, например, на вопрос о величине остатка на данном отрезке при заданном количестве членов в формуле Тейлора или на вопрос о количестве членов для достижения заданной точности в процессе приближенного вычисления значения функции на данном элементе. Для этого мы можем оценить сверху остаток, и такая оценка позволит ответить на поставленный вопрос.

6.9. Пример. Оценим абсолютную погрешность приближенной формулы $\sin x \approx x - x^3/6$ при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (считая, что разложение доводится до x^4) имеем

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{\sin^{(5)}\xi}{120}x^5 = \frac{\cos\xi}{120}x^5,$$

где $\xi \in (0,x)$. Поскольку $|\cos\xi| \leqslant 1$, то

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{x^5}{120} \leqslant \sup_{x\in[0,1/2]} \frac{x^5}{120} = \frac{(1/2)^5}{120} = \frac{1}{3840}.$$

6.10. Пример. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислим $\sqrt[12]{4000}$ и оценим погрешность. Воспользуемся формулой Тейлора для функции $(1+x)^\mu = 1+\mu x+R_1(x)$ с начальной точкой $a = 0$, взяв для простоты всего два члена в формуле Тейлора. Представим $4000 = 2^{12} - 96$. Тогда

$$\sqrt[12]{4000} = (2^{12}-96)^{1/12} = 2\left(1-\frac{96}{2^{12}}\right)^{1/12}.$$

Положим $\mu = 1/12$, $x = -96/2^{12} = -3/128$. Имеем

$$\sqrt[12]{4000} = 2\left(1-\frac{3}{128}\right)^{1/12} = 2\left(1+\frac{1}{12}\left(-\frac{3}{2^7}\right)+R_1(x)\right)$$
$$= 2\left(1-\frac{1}{2^9}+R_1(x)\right) = \frac{2^9-1}{2^8} + 2R_1(x).$$

Оценим остаток $R_1(x)$, воспользовавшись формой Лагранжа остаточного члена: найдется такое $\xi \in (-3/2^7, 0)$, что

$$2|R_1(x)| = 2\left|\frac{((1+\xi)^{1/12})''}{2!}x^2\right| = 2\cdot\frac{1}{12}\frac{11}{12}\frac{(1+\xi)^{-23/12}}{2!}\left(\frac{3}{2^7}\right)^2$$

$$= 2\cdot\frac{11\cdot 3^2}{3^2\cdot 2^{19}(1+\xi)^{23/12}} \leqslant \frac{22}{2^{19}(1-3/128)^{23/12}} \leqslant \frac{22}{10^5}.$$

Такова оценка погрешности.

6.11. Задачи.

1. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить и оценить погрешность:

(1) $\sqrt[3]{30}$, **(2)** $\sqrt[5]{250}$, **(3)** $\operatorname{arctg} 0.8$, **(4)** $\arcsin 0.45$.

2. Вычислить

(1) e с точностью до 10^{-3}, **(2)** $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-6},
(3) $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-3}, **(4)** $\lg 11$ с точностью до 10^{-3}.

6.12. Еще одним применением производной является возможность ее использования при нахождении пределов отношений функций.

Теорема (правило Лопиталя). *Рассмотрим промежуток $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$, предельную точку $a \in \overline{\mathbb{R}}$ промежутка Δ и две функции f, g, определенные и дифференцируемые на Δ всюду, кроме, может быть, точки a, причем $g'(x) \neq 0$ для $x \in \Delta$. Предположим, что либо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, либо $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. При этих условиях если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$ (где K может быть равным ∞), то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.*

Полезно вспомнить, как приводятся к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ неопределенности вида $0\cdot\infty$, ∞^0, 1^∞, $\infty - \infty$. Пусть $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$, $\varphi(x) \to 1$, $h(x) \to \infty$. Тогда можно использовать следующие соотношения:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}, \quad g(x)^{f(x)} = e^{f(x)\ln g(x)},$$

$$\varphi(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln\varphi(x)}, \quad g(x) - h(x) = g(x)\left(1 - \frac{h(x)}{g(x)}\right).$$

В конкретных примерах можно, разумеется, воспользоваться простейшими преобразованиями.

6.13. Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Имеем

$$\frac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2\operatorname{arctg} x}.$$

Поскольку

$$(x-\operatorname{arctg} x)'=\frac{x^2}{1+x^2},\quad (x^2\operatorname{arctg} x)'=\frac{2x(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x^2}{1+x^2},$$

приходим к отношению

$$\frac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)x(2(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x)}=\frac{x}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x}.$$

Снова предел числителя и знаменателя нулевые, так что еще раз воспользуемся правилом Лопиталя. Найдем производную знаменателя: $2((1+x^2)\operatorname{arctg} x+x)'=4x\operatorname{arctg} x+3$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2\operatorname{arctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4x\operatorname{arctg} x+3}=\frac{1}{3}.$$

6.14. Задачи. Воспользовавшись правилом Лопиталя, найти пределы:

(1) $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha \ln^\beta \dfrac{1}{x}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha a^x$, $a>0$, $a\neq 1$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$,

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$, **(6)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})^{1/\ln x}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$, **(8)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$.

6.15. Использование производной для нахождения экстремумов основано на следующем утверждении.

Теорема. *Пусть f — дифференцируемая на (a,b) функция и $x\in(a,b)$ — такая точка, что $f'(x)=0$ (так называемая стационарная, или критическая точка). Тогда если в некоторой окрестности слева от точки x производная положительна, а в некоторой окрестности* *справа отрицательна, то x — точка максимума, если же в некоторой окрестности слева от точки x производная отрицательна, а в некоторой окрестности справа положительна, то x — точка минимума функции f.*

Теорема. *Если f — дважды дифференцируемая на (a, b) функция. Тогда если $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$), то x — точка минимума (максимума) функции f.*

Как известно, всякая непрерывная на замкнутом ограниченном промежутке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Для их нахождения можно найти все (локальные) максимальные и минимальные значения f на $[a, b]$ и выбрать наибольшее (соответственно наименьшее) значение среди максимальных (минимальных) значений и значений $f(a)$ и $f(b)$ на концах промежутка.

6.16. Задача. Находя наибольшие и наименьшие значения соответствующих функций, доказать неравенства

(1) $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ p > 1;$

(2) $x^m(a-x)^n \leqslant \dfrac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}, \quad m > 0,\ n > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a;$

(3) $\dfrac{x+a}{2^{(n-1)/n}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a, \quad x \geqslant 0,\ a > 0,\ n > 1;$

(4) $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$

6.17. Выше мы отметили основные возможности использования производной для установления некоторых свойств функций. Теперь, собрав эту информацию, займемся возможно полным исследованием свойств функций и построением их графиков.

В первую очередь научимся делать прикидку графиков на основе исследования простейших свойств функции. Для определенности и единообразия будем проводить исследование функции и последующее построение графика путем выполнения пожеланий пунктов следующего ниже перечня, хотя в каких-то ситуациях, возможно, от этого перечня будем отклоняться. Все процедуры, требуемые для выполнения пожеланий каждого из пунктов, подробно описаны выше. Привлечение производных на первом этапе необязательно.

Приведем перечень действий для исследования функции в целях построения ее графика.

1. Найти область определения.

2. Исследовать особенности функции, упрощающие построение графика, а именно установить, будет ли она четной, нечетной, периодической.

3. Найти нули функции или установить их отсутствие, указать промежутки ее знакопостоянства.

4. Изучить поведение функции на концах области определения и характер ее обращения в нуль.

5. Исследовать монотонность и экстремумы.

Покажем, как работает предложенный перечень на примерах несложно задаваемых функций. Оказывается, что и в простых ситуациях могут быть неожиданности. Постараемся ограничиваться элементарными средствами, не предполагающими использование производной, но и пренебрегать совсем этим техническим средством не будем, так что при острой необходимости привлечем и производную.

6.18. Пример. Построим график функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Функция определена при всех действительных x. Она непериодическая, например потому, что значение 1 она принимает единственный раз, при $x = 0$. Функция четна:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Ввиду четности дальнейшее изучение пройдет для $x \geqslant 0$.

На множестве $[0, +\infty)$ функция x^2+1, стоящая в знаменателе, при увеличении x неограниченно возрастает, следовательно, наша функция убывает и неограниченно приближается к нулю. Тем самым на правом конце области определения, при далеких положительных x ее график будет прижиматься к оси абсцисс и выглядеть так, как показано на рис. 4.1(a).

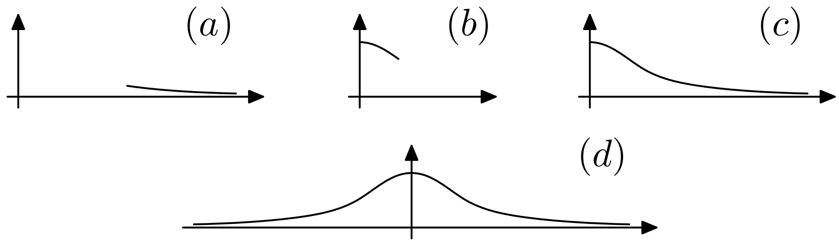


Рис. 4.1.

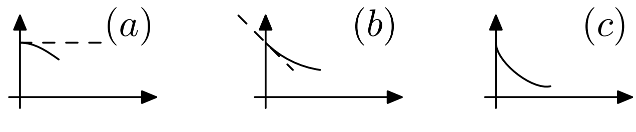


Рис. 4.2.

На другом конце рассматриваемого множества, т. е. при $x = 0$, она равна 1. Однако приблизиться к единице она могла разными способами — с горизонтальной, наклонной или вертикальной касательной, т. е. одним из указанных на рис. 4.2 способов. Обычно такое исследование проводится с помощью производной, однако в нашем случае можно обойтись и без нее. Обратим внимание на то, что выражение $\dfrac{1}{x^2+1}$ для $|x| < 1$ равно сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $-x^2$:

$$\frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots .$$

Поскольку нас интересует, как будет выглядеть график около нуля оси абсцисс, естественно считать x малыми, близкими к 0. А тогда значения x^4, x^6 и т. д. существенно меньше, чем x^2, значит, если «пожертвовать» этими малыми по сравнению с x^2 слагаемыми, то можно считать, что наша функция близка к функции $1 - x^2$, вид которой около нуля известен. Вместе с тем нетрудно понять, что $f(x) > 1 - x^2$ и $f(x) \leqslant 1$. Тем самым график нашей функции будет между графиками функций $y = 1 - x^2$ и $y = 1$ и вид его показан на рис. 4.1(b). Изображая рис. 4.1(a) и 4.1(b) на одной координатной плоскости, получим эскиз графика функции f для положительных x (рис. 4.1(c)) а распространив картинку по четности на всю числовую прямую, придем к эскизу всего графика функции (рис. 4.1(d)).

По-видимому, у нее будет меняться направление выпуклости, но это можно исследовать, привлекая вторую производную, что в наши планы пока не входит.

6.19. Пример. Построим график функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

Отличие функции этого примера от функции предыдущего лишь в том, что здесь в знаменателе стоит знак минус, тогда как там — плюс. Однако различия в свойствах функций и их графиках существенны.

Функция определена на всем множестве $\mathbb{R}$, кроме точек -1 и 1. Она четная и непериодическая, так что изучать ее можно лишь на множестве неотрицательных действительных чисел.

Функция не обращается в нуль, и неравенство $\dfrac{1}{x^2-1} > 0$ выполнено на множестве $|x| > 1$, т. е. на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. На оставшемся множестве $(-1, 1)$ она отрицательна.

Изучим поведение функции на концах области определения. При увеличении x знаменатель возрастает и неограниченно увеличивается, так что функция, убывая, приближается к нулю. Это отражено на рис. 4.3(a). Если аргумент приближается к значению 1, оставаясь справа от этой точки, то знаменатель приближается к нулю, а график функции, положительной справа от 1, неограниченно приближается к вертикальной прямой $x = 1$ справа (рис. 4.3(b)). Если подходить к 1 слева, то приближение знаменателя к нулю останется, а знак изменится, стало быть, значения функции около 1 слева будут большими по абсолютной величине, но отрицательными, а ее график «прильнет» к вертикальной прямой $x = 1$ слева, как показано на рис. 4.3(c).

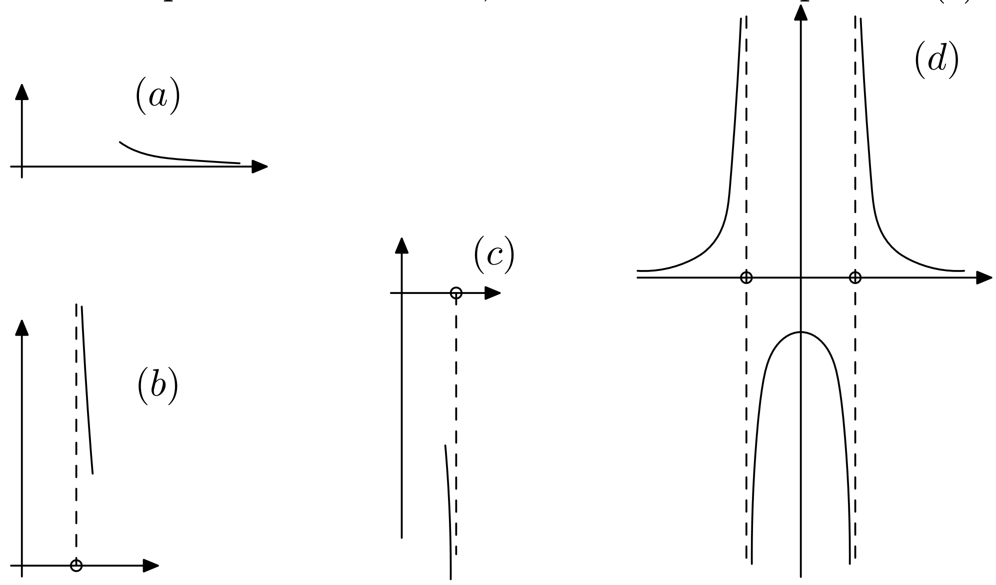


Рис. 4.3.

Осталось, по существу, понять, как выглядит функция около точки $x = 0$. Аналогично предыдущему можно сказать, что

$$\frac{1}{x^2 - 1} = -1 - x^2 - x^4 - \ldots,$$

и, пренебрегая сравнительно малыми величинами $x^4, \ldots$, можно написать приближенное равенство $\dfrac{1}{x^2 - 1} \approx -x^2 - 1$, а вид этой функции около нуля известен. Осталось, соединив информацию рис. 4.3(a)–(c) и приняв во внимание четность функции, изобразить график самой функции (рис. 4.3(d)).

6.20. Пример. Построим график функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Данная функция определена на множестве $|x| \geqslant 1$, т. е. на множестве $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Функция четная, так что при ее исследовании можно ограничиться множеством $[1, +\infty)$. Функция обращается в нуль в точках ± 1 и возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Если x неограниченно возрастает, то при больших значениях x вычитание единицы практически незаметно, так что при таких x функция будет близка к функции $y = \sqrt{x^2} = x$, оставаясь меньше функции $y = x$. Это наблюдение говорит о том, что при далеких x график нашей функции будет «прижиматься» к графику функции $y = x$ снизу так, как показано на рис. 4.4(a).

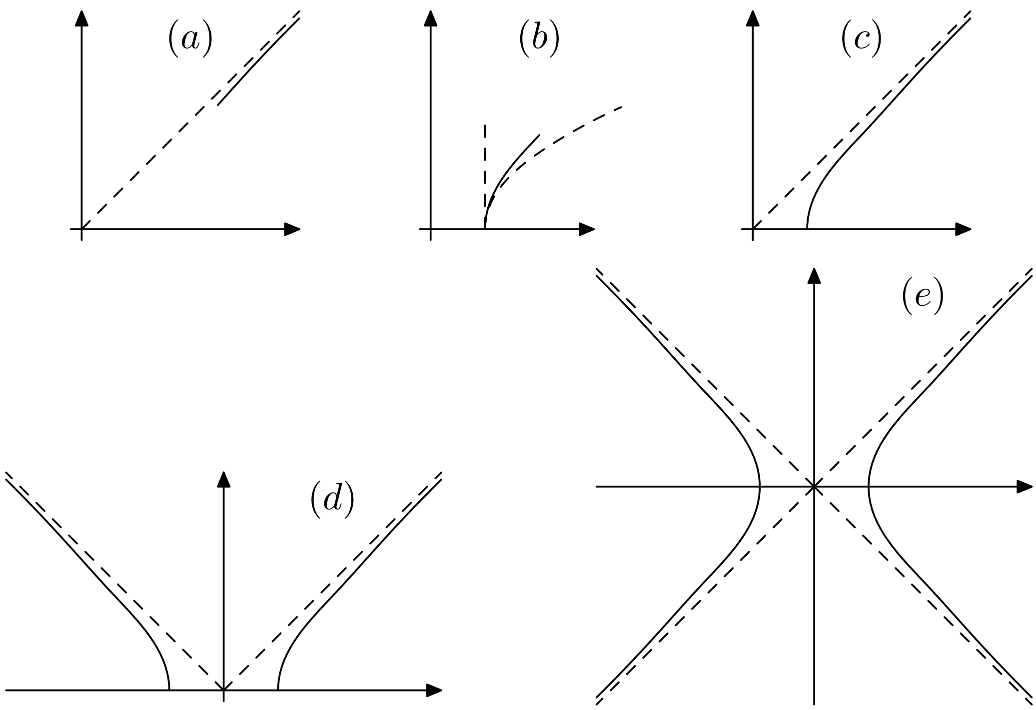


Рис. 4.4.

Будем теперь приближаться к точке 1 (естественно, справа). Как узнать характер входа в нуль функции $f(x)$? Можно найти ее производную, а можно пока обойтись и простыми наблюдениями. Представим функцию в виде $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ и заметим, что из двух сомножителей под корнем один обращается в нуль, а другой нет, поэтому характер обращения функции в нуль будет определяться только одним из этих сомножителей, а именно $x - 1$, второй множитель (под корнем) будет примерно равен 2. Поэтому около точки $x = 1$ можно написать, что $f(x) \approx \sqrt{2(x-1)}$, а вид этой функции понятен — это сдвинутый и немного растянутый по оси Oy корень квадратный (рис. 4.4(b)). Наша функция будет немного больше функции $\sqrt{2(x-1)}$. Вспомнив, что функция возрастает на $[1, +\infty)$, и соединив фрагменты графика, изображенные на рис. 4.4(a),(b), получим эскиз графика функции при положительных x (рис. 4.4(c)). График всей функции получится из построенной части распространением по четности, т. е. симметрией относительно оси ординат (рис. 4.4(d)).

Кстати, можно заметить, что это части гиперболы, но не той, которую мы привыкли видеть как график функции $y = \dfrac{1}{x}$, а повернутой по часовой стрелке на угол $\pi/4$ (рис. 4.4(e)).

6.21. Пример. Построим график функции $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Функция определена на всем $\mathbb{R}$. Она четная, поэтому можно исследовать ее при $x \geqslant 0$. В нуль она не обращается и на промежутке $[0, +\infty)$ возрастает.

При далеких положительных x влиянием единицы под корнем можно пренебречь, так что получим $\sqrt{x^2+1} \approx x$, но $\sqrt{x^2+1} > x$. Тем самым график нашей функции будет «приклеиваться» сверху к графику функции $y = x$ при далеких x (рис. 4.5(a)).

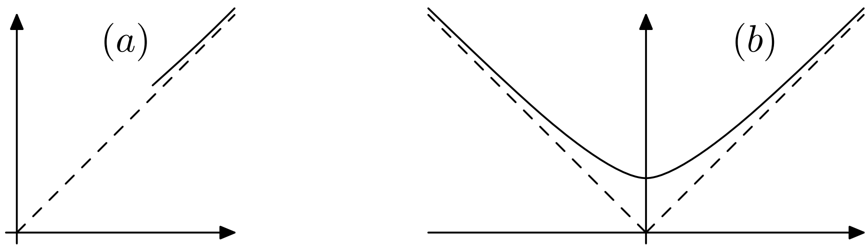


Рис. 4.5.

Ее поведение вблизи точки $x = 0$ исследовать без привлечения производной затруднительно, так что найдем производную:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Видим, что она равна нулю при $x = 0$, значит, у графика горизонтальная касательная. Ясно, что в точке $x = 0$ функция достигает своего наименьшего значения, равного 1. Это позволяет изобразить эскиз графика при положительных x и затем, распространив его с учетом свойства четности, получить на рис. 4.5(b) график всей функции. Кстати, и на этот раз мы получили гиперболу, но только повернутую по сравнению с привычной на угол $\pi/4$ против часовой стрелки.

6.22. Пример. Построим график функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Функция определена на промежутке $[-1, 1]$. Она четная и, разумеется, непериодическая. Будем приближаться слева к правому концу ее области определения, т. е. к точке $x = 1$. Представив функцию в виде $f(x) = \sqrt{(1+x)(1-x)}$, как и в примере 3, находим, что около единицы можно написать $f(x) \approx \sqrt{2(1-x)}$, и выходит, что функция

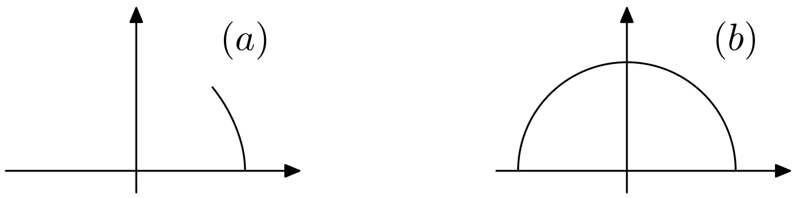


Рис. 4.6.

обращается в нуль при $x = 1$ так, как показано на рис. 4.6(a), т. е. касаясь вертикальной прямой $x = 1$.

Ясно, что наибольшее значение, равное 1, функция примет при $x = 0$. Чтобы понять, с какой касательной это произойдет, найдем производную:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В точке $x = 0$ она обращается в нуль, значит, касательная в этой точке горизонтальна, и получается, что график, скорее всего, выглядит так, как изображено на рис. 4.6(b).

Кстати, если возвести в квадрат обе части равенства $y = \sqrt{1-x^2}$ и учесть ограничения на y, то получим, что график нашей функции — это множество, описываемое следующим образом:

$$\{(x, y) : y = \sqrt{1-x^2}\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0\},$$

а это верхняя часть единичной окружности с центром в начале координат.

6.23. Пример. Построим график функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Функция определена на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Она нечетная как сумма двух нечетных функций. Функция непериодическая хотя бы потому, что в области ее определения нет всего одного числа, а именно нуля.

Будем исследовать функцию на множестве $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Она положительна во всех точках этого множества. Если x становится большим, то слагаемое $1/x$ в определяющей функцию формуле становится малым и тем самым на величину значения $f(x)$ окажет малое влияние. Иначе говоря, при больших x имеем $f(x) \approx x$ и $f(x) > x$. Это наблюдение на рисунке выглядит как «прилипание» графика функции f сверху к графику функции $y = x$ при далеких положительных значениях x (рис. 4.7(a)). Пусть теперь x приближается к нулю. Тогда из двух слагаемых x и $1/x$ основной вклад в величину значения функции внесет $1/x$, так что при малых положительных x имеем $f(x) \approx 1/x$ и при этом $f(x) > 1/x$. Это выглядит так, как изображено на рис. 4.7(b).

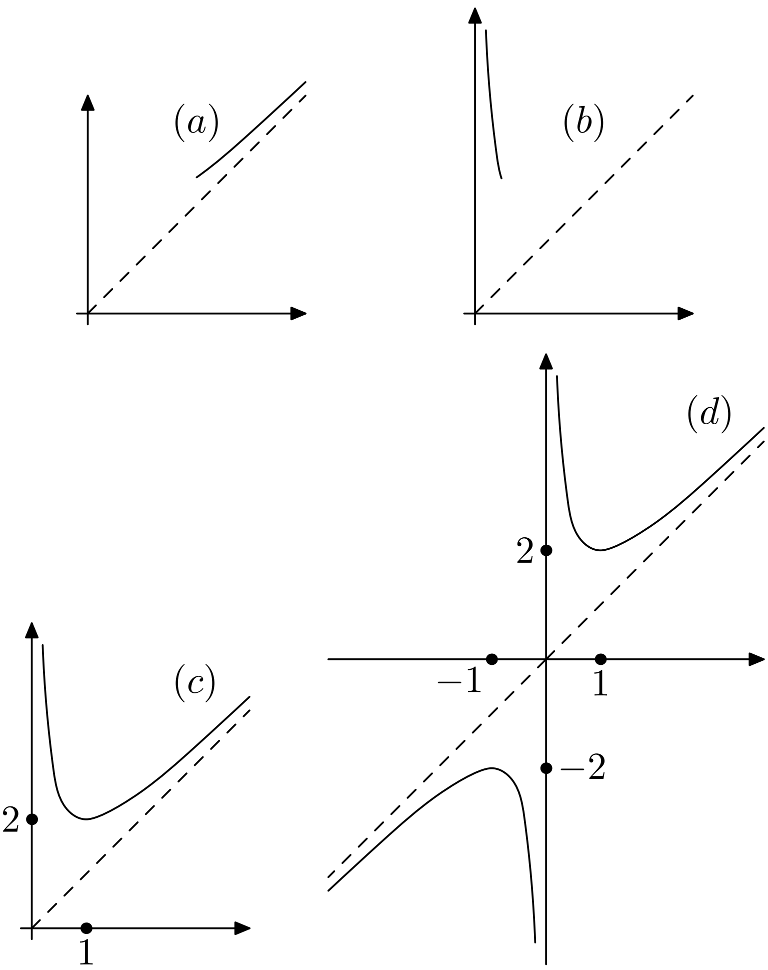


Рис. 4.7.

Из рис. 4.7(a), (b) ясно, что где-то при $x > 0$ будет минимум функции. Его легко найти с помощью производной, но мы ради того, чтобы воспользоваться некоторым простым полезным техническим средством, сделаем это иначе. Представляя слагаемые x и $1/x$ как квадраты каких-то величин, выделим в функции полный квадрат и оценим ее снизу:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x - 2 + \frac{1}{x} + 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Поскольку при этом $f(1) = 2$, становится понятно, что 2 — наименьшее значение функции, достигаемое при $x = 1$. На промежутке $(0, 1]$ функция убывает, на $[1, +\infty)$ — возрастает (что можно обосновать с помощью производной). График функции на положительной полуоси изображен на рис. 4.7(c), а весь график — на рис. 4.7(d).

6.24. Пример. Построим график функции $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

Функция определена на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Она нечетная и непериодическая.

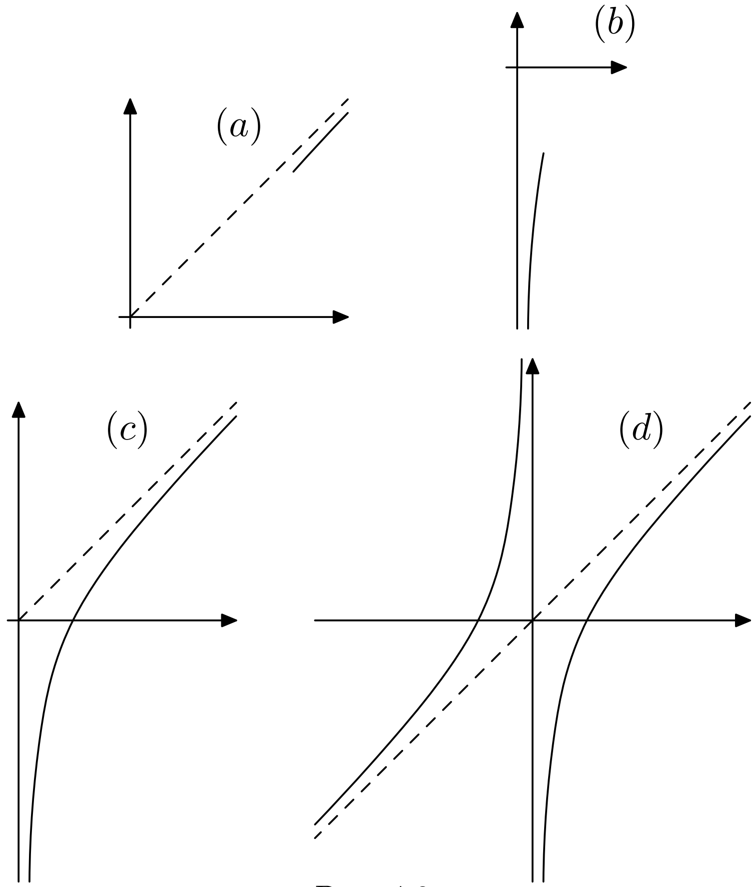


Рис. 4.8.

Будем исследовать функцию на множестве $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. На этом множестве она обращается в нуль при $x = 1$. Далее, $f(x) > 0$ при $x > 1$ и $f(x) < 0$ при $0 < x < 1$.

Если x становится большим, то часть $-1/x$ в задающей функцию формуле становится малой, отсюда $f(x) \approx x$, $f(x) < x$ для далеких положительных x и фрагмент ее графика при таких x изображен на рис. 4.8(a). Если же x приближается к нулю, то $f(x) \approx -1/x$ и $f(x) > -1/x$. Соответствующий фрагмент графика дан на рис. 4.8(b).

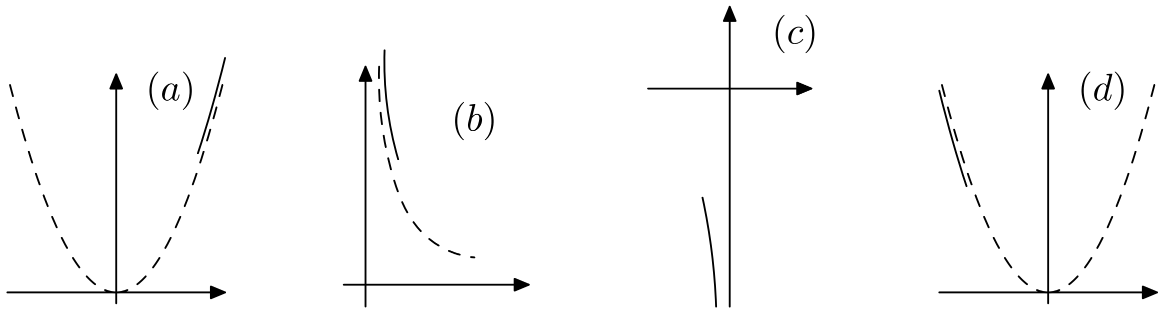
Функция f возрастает на $(0, +\infty)$ как сумма возрастающих функций x и $-\dfrac{1}{x}$.

Соединяя полученные ранее детали графика, изобразим его часть, соответствующую положительным значениям аргумента (рис. 4.8(c)). Весь график получится из этого распространением по нечетности, т. е. отражением относительно начала координат (рис. 4.8(d)).

6.25. Пример. Построим график функции $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Функция определена на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Она общего вида, т. е. не обладает свойствами четности, нечетности, периодичности. Поэтому изучать ее надлежит на всей области определения.

Решая уравнение $f(x) = 0$, легко найти его единственный корень $x = -1$. Решая неравенство $f(x) > 0$, получаем, что функция положительна на множестве $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ и отрицательна на $(-1, 0)$.



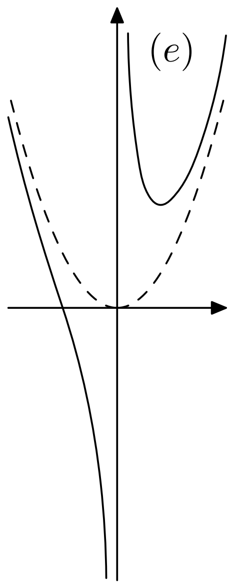


Рис. 4.9.

Изучим ее поведение на концах области определения. Если x далекое положительное, то $f(x) \approx x^2$ и $f(x) > x^2$ для таких x, тем самым можем отметить соответствующий фрагмент ее графика (рис. 4.9(a)). Если x приближается к нулю справа, т. е. оставаясь положительным, то часть x^2 пренебрежимо мала (по сравнению с $1/x$), поэтому $f(x) \approx 1/x$ и $f(x) > 1/x$ (рис. 4.9(b)). Если теперь x по-прежнему близкое к нулю, но слева от него, т. е. отрицательное, то аналогично предыдущему $f(x) \approx 1/x$ и $f(x) > 1/x$ (рис. 4.9(c)). Наконец, если x оказывается большим по абсолютной величине и отрицательным, то $f(x) \approx x^2$ и $f(x) < x^2$ (рис. 4.9(d)).

В принципе уже ясно, как будет выглядеть график всей функции, и мы можем нарисовать его эскиз (рис. 4.9(e)). Однако для уточнения, в какой точке будет минимум, можно обратиться к производной: $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$. Ясно, что $f(x) = 0$ при $x_0 = 1/\sqrt[3]{2}$, причем слева от x_0 для значений x, близких к x_0, будет $f'(x) < 0$, а справа — $f'(x) > 0$. Изменение знака производной с минуса на плюс при переходе через точку x_0 говорит о том, что это точка минимума. Можно найти значение функции в этой точке: $f(x_0) \approx 1.89$.

6.26. Пример. Построим график функции $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Функция определена на множестве $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Она нечетная и непериодическая. Изучим ее на множестве $\{x \in D(f) : x \geqslant 0\}$.

Решая уравнение $f(x) = 0$, легко найти его единственный корень $x = 0$. Решая неравенство $f(x) > 0$, получаем, что среди $x \geqslant 0$ функция положительна на множестве $(1, +\infty)$ и отрицательна на $(0, 1)$.

Изучим ее поведение на концах области определения. Если x далекое положительное, то вычитание единицы в знаменателе не окажет существенного влияния на значения функции, так что $f(x) \approx 1/x$, $f(x) > 1/x$ для таких x и мы можем отметить соответствующий фрагмент ее графика (рис. 4.10(a)). Если x приближается к 1 справа, т. е. остается большим чем 1, то числитель близок к 1, а в знаменателе $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ часть $x - 1$ близка к нулю, а $x + 1 \approx 2$. Кроме того, знаменатель положителен, следовательно, вся дробь оказывается большой положительной, стало быть, ее график «прилипает» справа к вертикальной прямой $x = 1$ (рис. 4.10(b)). Если x переходит через точку 1 и остается близкой к 1, то, рассуждая, как и выше, получаем соответствующий фрагмент графика (рис. 4.10(c)). Наконец, при x, близких к 0, знаменатель близок к -1, поэтому можно понять, как функция входит в нуль: $f(x) \approx -x$ при малых x, т. е. можно изобразить деталь графика около нуля справа (рис. 4.10(d)).

Уже понятен вид графика всей функции, и мы может нарисовать его эскиз (рис. 4.10(e)). Однако, чтобы иметь гарантии отсутствия точек экстремума и подтверждения свойств монотонности, найдем производную и используем ее для исследования: $f'(x) = -\dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2}$. Находим, что $f'(x) < 0$ для всех $x \in D(f)$. Но было бы большой неосмотрительностью делать отсюда вывод, что функция убывает на области определения, — это просто неверно. Можно лишь утверждать, что она убывает на каждом из промежутков, составляющих область определения, и это свойство вполне согласуется с нашим эскизом графика (рис. 4.10(f)).

6.27. Пример. Построим график функции $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Функция определена на всем $\mathbb{R}$. Она нечетная, стало быть, достаточно построить ее график на множестве $x \geqslant 0$ и затем отразить его симметрично относительно начала координат. Функция, очевидно, непериодическая.

Ясно, что $f(x) = 0$ только при $x = 0$. При $x > 0$ будет $f(x) > 0$.

Изучим, как ведет себя функция при неограниченном возрастании аргумента. При больших значениях x прибавление единицы в знаменателе окажет пренебрежимо малое влияние на ее значения, тем

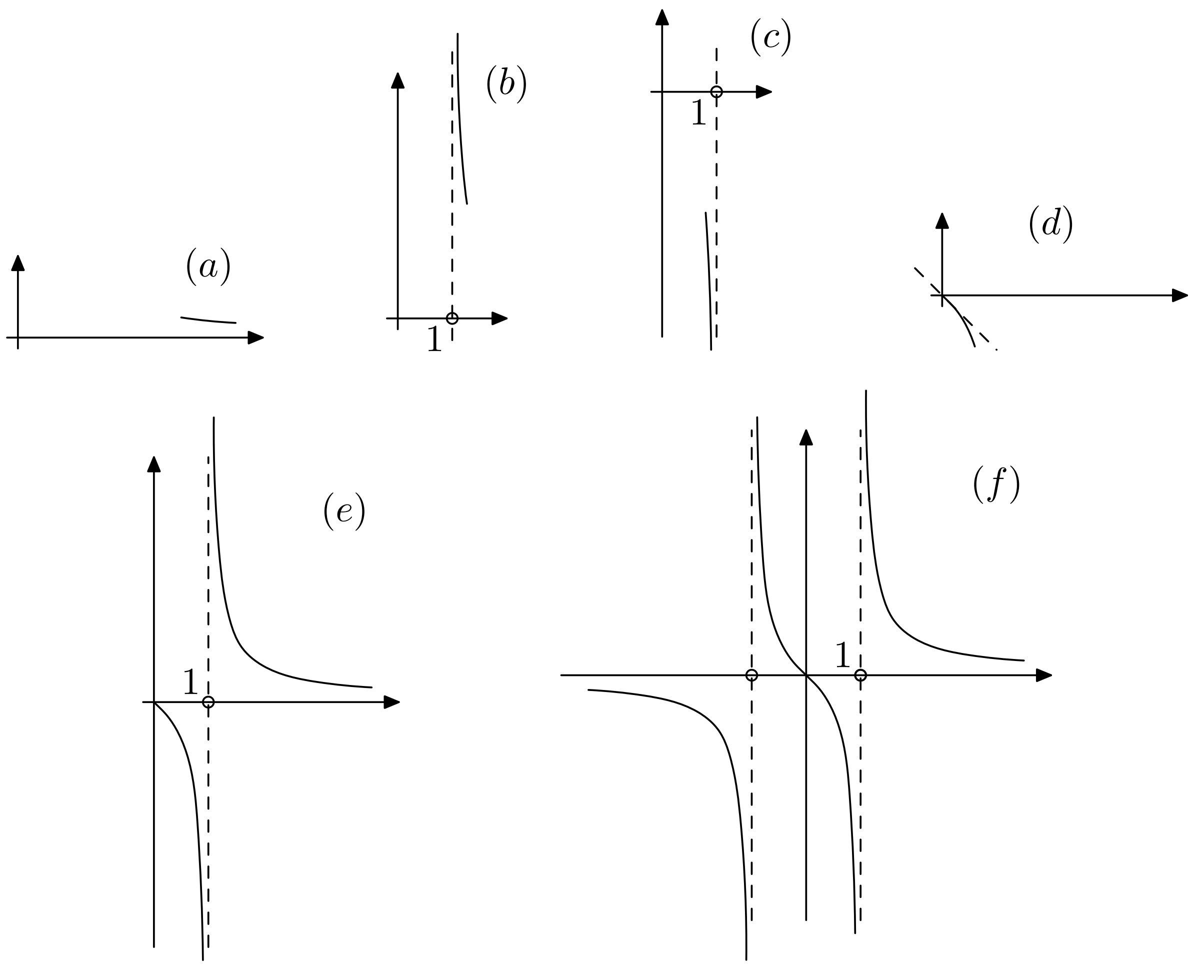


Рис. 4.10.

самым при больших x имеем

$$f(x) \approx \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x},$$

при этом $f(x) < \dfrac{2}{x}$. Это наблюдение позволяет изобразить график f при далеких положительных значениях x (рис. 4.11(a)).

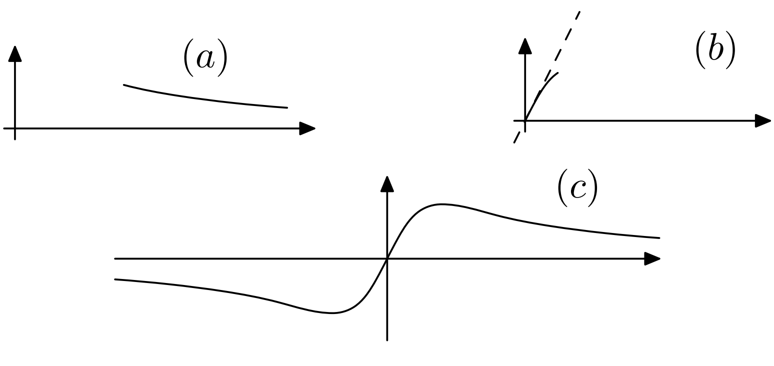


Рис. 4.11.

Посмотрим, как функция будет подходить к нулю при приближении значений аргумента к нулю. Ясно, что знаменатель около нуля примерно равен 1, тем самым можно написать, что $f(x) \approx 2x$ при малых x, при этом $f(x) < 2x$. Эта информация отражена в виде фрагмента графика около нуля на рис. 4.11(b).

В принципе, ясно, как можно перейти от одного фрагмента графика к другому. Сначала, около нуля, функция будет возрастать, затем достигнет максимума, потом будет убывать и неограниченно приближаться к нулю при удалении x вправо. Для уточнения места, в котором будет максимум, и нахождения максимального значения обратимся к производной:

$$f'(x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Находим, что среди положительных значений x производная обращается в нуль при $x = 1$, более того, $f(x) > 0$ при $x \in (0,1)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (1,+\infty)$, следовательно, на промежутке $(0,1)$ функция возрастает, на $(1,+\infty)$ убывает, стало быть, при $x = 1$ она достигает максимума, равного 1.

Теперь можно изобразить график $f(x)$ (рис. 4.11(c)).

6.28. Задачи.

1. Провести простейший анализ функций и изобразить эскизы их графиков:

(1) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, (2) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$, (3) $\dfrac{1}{\sin x}$, (4) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, (5) $\sin^2 x$,
(6) $\operatorname{tg}^2 x$, (7) $\sin\dfrac{1}{x}$, (8) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$, (9) $x\sin x$, (10) $x^2\cos x$.

2. Провести простейший анализ композиций двух функций и изобразить эскизы их графиков:

(1) $2^{1/x}$, (2) $\dfrac{1}{2^{1/x}}$, (3) $2^{\frac{1}{x^2}}$, (4) $2^{\operatorname{tg} x}$, (5) $2^{\sin x}$, (6) $2^{\arcsin x}$.
(7) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, (8) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$, (9) $\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$, (10) $\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$,
(11) $\lg\dfrac{x-1}{x+1}$, (12) $2^{\frac{x-1}{x+1}}$, (13) $\arcsin\dfrac{x-1}{x+1}$, (14) $\arccos\dfrac{x-1}{x+1}$.

3. Изобразить эскизы графиков функций, связанных с обратными тригонометрическими функциями, и сформированных с участием модуля:

(1) $\sin(\arcsin x)$, (2) $\cos(\arccos x)$, (3) $\arcsin(\sin x)$,
(4) $\arccos(\cos x)$, (5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, (6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$,

(7) $\sin(\arccos x)$, (8) $\cos(\arcsin x)$. (9) $|x^2 - x|$, (10) $|1 - 2^x|$,
(11) $1 - 2^{|x|}$, (12) $|x - 1/x|$, (13) $\arcsin |x|$, (14) $\arccos |x|$,

В дополнение к развитым средствам применим производную для анализа функции и более точного изображения ее графика. Для этого, вычислив производную, найдем участки монотонности и точки экстремума, а затем, вычислив (если это не составляет больших технических трудностей) вторую производную, найдем участки выпуклости, вогнутости и точки перегиба. По завершении исследования применим всю найденную информацию для построения графика.

Напомним основные сведения об асимптотах. Рассмотрим функцию f, у которой какая-то из бесконечно удаленных точек $+\infty$, $-\infty$ является предельной для области определения. Пусть для определенности это $+\infty$. Тогда прямую $y = kx + b$ такую, что

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0,$$

называют *асимптотой функции f на $+\infty$*. Для ее нахождения можно воспользоваться тем, что

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx), \tag{6.20}$$

при условии существования пределов в (6.20). Если при этом $k = 0$, то асимптоту называют *горизонтальной*, а если $k \neq 0$, то *наклонной.* В частности, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то положительная часть оси абсцисс является горизонтальной асимптотой.

Аналогичное можно сказать и для точки $-\infty$.

Если в некоторой конечной точке a оказывается, что предел $f(x)$, хотя бы какой-либо односторонний, бесконечен, то прямую $x = a$ называют *вертикальной асимптотой* функции f.

6.29. Пример. Построим график функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$.

Функция определена при всех x, кроме $x = 0$, обращается в нуль при $x = -1$. Отметим, что функция всюду неотрицательна. Ясно, что никакими свойствами четности или периодичности она не обладает.

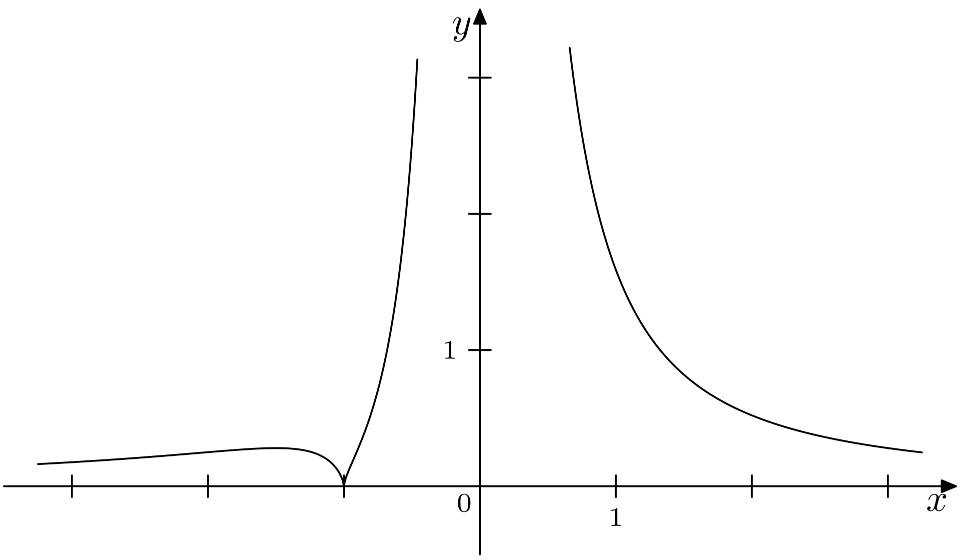
Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$, так что прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота. Вместе с тем $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = +\infty$, так что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Найдем участки монотонности и экстремумы функции. Вычислим ее производную: $y' = 2\dfrac{-2x - 3}{3x^3(x+1)^{1/3}}$. Она обращается в нуль в точке $x=-3/2$, если же $x\in(-\infty,-3/2)$, то $y'(x)>0$ и функция возрастает, если $x\in(-3/2,-1)$, то $y'(x)<0$, и функция убывает. В точке $x=-1$ конечной производной нет, однако для односторонних производных имеем $y'_-(-1)=-\infty$, $y'_+(-1)=+\infty$. На промежутке $(-1,0)$ будет $y'(x)>0$ и функция возрастает, а на $(0,+\infty)$ имеем $y'(x)<0$ и функция убывает. Ясно, что точка $x=-3/2$, в которой производная обратилась в нуль, будет точкой максимума, а точка $x=-1$, в которой производной нет, оказывается точкой минимума функции, кроме того, в этой точке функция имеет вертикальную касательную. Отметим, что $y(-1)=0$.

Изучим наличие точек перегиба. Найдем

$$y''(x)=-\frac{2}{3}\frac{14x^2+42x+27}{x^4(x+1)^{4/3}}$$

и отметим, что $y''(x)=0$ при $x=\dfrac{-42\pm\sqrt{252}}{28}\approx\dfrac{-42\pm16}{28}$. Таким образом, $y''(x)=0$ в точках $x_1\approx-58/28\approx-2.07$, $x_2\approx-24/28\approx-0.86$. Ясно, что при $x<x_1$ и при $x>x_2$ будет $y''(x)>0$ и $y(x)$ выпукла вниз, а при $x\in(x_1,x_2)$ имеем $y''(x)<0$ и $y(x)$ выпукла вверх. Отметим, что $y(x_1)\approx0.24$, $y(x_2)\approx0.37$. Теперь изобразим график:



6.30. Задачи. Применяя различные средства, построить графики функций

(1) $y=x+\sqrt{x^2-1}$,

(2) $x\sqrt{x+1}$, **(3)** $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1+x}}$, **(4)** $y=|x|\sqrt{1-x^2}$,

(5) $y=x\sqrt{|x^2-1|}$, **(6)** $y=x^2e^{-x}$, **(7)** $e^{\frac{1-x}{1+x}}$,

(8) $y = x^2 \ln x$,   **(9)** $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$,   **(10)** $y = xe^{-x^2}$,

6.31. Ответы. К п. 6.5. 1. (1) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4)$; (2) $e + \frac{e}{6}x^2 + \frac{e}{30}x^4 + o(x^4)$; (3) $x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$; (4) $1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{360}x^4 + o(x^4)$. **2.** (1) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$; (2) $1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)$. **3.** (1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{3}((-1)^{k+1} - 2^{-(k+1)})x^k + o(x^n)$; (2) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(1 + 4^{(k+1)})x^k + o(x^n)$; (3) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{13}{12}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k + o(x^n)$; (4) $-\sum\limits_{k=3}^{n} x^k + o(x^n)$. **4.** (1) $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^{-k}-1}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$; (2) $\ln 6 - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$; (3) $3 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k(x-2)^k + o((x-2)^n)$; (4) $\sum\limits_{k=2}^{n}(x-2)^k + o((x-2)^n)$. **5.** $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

К п. 6.6. 1. $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. **2.** $A = -\frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{15}$; **3.** (1) $A = 1$, $B = 1$; (2) $A = 1$, $B = -1$.

К п. 6.11. 1. (1) 3.1072; (2) 3.0171; (3) 0.67474; (4) 0.46676. **2.** 2.718; (2) 0.017452; (3) 2.236; (4) 1.041.

К п. 6.14. (1) 0; (2) 0 при $0 < a < 1$ (α любое), $+\infty$ при $a > 1$ (α любое); (3) $\frac{1}{2}$; (4) $-\frac{1}{3}$; (5) $e^{-2/\pi}$; (6) e; (7) $e^{-1/6}$; (8) e^{-1}.