10. Определенный интеграл

10.1. Пусть f — ограниченная функция, заданная на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Разбиением* отрезка $[a,b]$ называют такой набор точек $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \in [a,b]$, что $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Число $|\tau| = \max\limits_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$ называют *модулем разбиения* τ. В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, разбиения τ возьмем по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ называют *интегральной суммой* (*Римана*), *соответствующей разбиению* τ *промежутка* $[a,b]$. Число I такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения τ, у которого $|\tau| < \delta$, и для любого выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon, \tag{10.1}$$

называют *определенным интегралом от функции* f *по промежутку* $[a,b]$ и обозначают символом $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Левый конец a промежутка интегрирования называют *нижним пределом интегрирования*, правый конец b промежутка интегрирования называют *верхним пределом интегрирования* и говорят, что *берется* (*рассматривается*) *интеграл от функции* f *в пределах от* a *до* b. Функцию, у которой существует интеграл, называют *интегрируемой на* $[a,b]$. Отметим, что непрерывные функции и монотонные функции на $[a,b]$ интегрируемы на этом промежутке.

Допуская небольшую вольность речи, можно сказать, что определенный интеграл от функции f по промежутку $[a,b]$ — это предел, к которому стремятся интегральные суммы при стремлении к нулю модуля разбиения.

Определение интеграла распространяют на тот случай, когда $a > b$, полагая

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx, \quad b < a. \tag{10.2}$$

10.2. Теорема (линейность интеграла). *Если* f, g *интегрируемы от* a *до* b, *то для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *линейная комбинация* $\alpha f(x) + \beta g(x)$

интегрируема от a до b и

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

10.3. Теорема (формула интегрирования по частям). *Пусть функции f, g дифференцируемы на отрезке с концами a, b. Тогда если функция $f'(x)g(x)$ интегрируема от a до b, то этим свойством обладает и функция $f(x)g'(x)$ и имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\, dx, \tag{10.3}$$

или, в иной форме записи,

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g(x)\, df(x). \tag{10.4}$$

10.4. Теорема (о подстановке и замене переменной). *Пусть f — интегрируемая от a до b функция и φ — дифференцируемая функция, отображающая отрезок с концами α, β на отрезок с концами a, b, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема от a до b и*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt. \tag{10.5}$$

Если при этом φ имеет дифференцируемую обратную, то из интегрируемости $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ от α до β следуют интегрируемость $f(x)$ от a до b. и справедливость (5.3).

Замечание. Иногда, пользуясь подстановкой или заменой переменной при нахождении интеграла от a до b, мы будем использовать такие функции $\varphi(t)$, которые отображают бесконечный промежуток, например $[\alpha, +\infty)$, на заданный ограниченный, но не замкнутый промежуток $[a, b)$. В таком случае полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{y \to b} \int\limits_a^y f(x)\, dx$$

и при замене следует воспользоваться формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{10.5a}$$

Более подробно с интегралами по промежуткам, у которых по крайней мере один из концов не входит в промежуток (в частности, по неограниченным промежуткам), мы познакомимся позже.

10.5. Теорема (аддитивность интеграла). *Пусть точка c лежит между точками a и b. Тогда f интегрируема от a до b в том и только в том случае, если она интегрируема от a до c и от c до b, при этом*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{10.6}$$

Принимая во внимание равенство (10.2), распространяющее определение на случай, когда нижний предел интегрирования больше верхнего, можно заметить, что равенство (10.6) верно для любых трех точек a, b, c.

10.6. При нахождении определенного интеграла, как правило, используется формула Ньютона — Лейбница.

Теорема (формула Ньютона — Лейбница). *Пусть функция f непрерывна на отрезке с концами a, b, и пусть F — ее первообразная на этом промежутке (которая заведомо существует для непрерывной функции). Тогда имеет место формула Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{10.7}$$

которая с использованием для приращения $F(b) - F(a)$ обозначения $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$ может быть записана в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b. \tag{10.8}$$

10.7. Пример. В интеграле $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ выполним замену $\sin x = t$.

При выполнении указанной замены мы должны совершить такие действия, чтобы сохранилось равенство $\sin x = t$ на отрезке $[0, 2\pi]$ изменения переменной x. Выразить однозначно x через t, когда $x \in [0, 2\pi]$, невозможно, поэтому разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на такие части, где синус будет обратимым (строго монотонным), воспользуемся аддитивностью интеграла и выполним замену в интегралах по каждому из участков монотонности синуса. Ясно, что в качестве точек, разбивающих $[0, 2\pi]$ на участки монотонности синуса, можно выбрать $\pi/2$ и $3\pi/2$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(x)\cos x\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\cos x\,dx + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx.$$

Рассмотрим каждый интеграл по отдельности. На $[0, \pi/2]$ равенство $\sin x = t$ равносильно такому: $x = \arcsin t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если x меняется от $\pi/2$ до $3\pi/2$, то равенство $\sin x = t$ равносильно равенству $x = \pi - \arcsin t$, где t меняется от 1 до -1. Наконец, если $x \in [3\pi/2, 2\pi]$, то равенство $\sin x = t$ равносильно такому: $x = 2\pi + \arcsin t$, где t меняется от -1 до 0. Учитывая, что $\cos x\,dx = d\sin x$, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int\limits_0^{1} f(\arcsin t)\,dt + \int\limits_1^{-1} f(\pi - \arcsin t)\,dt + \int\limits_{-1}^{0} f(2\pi + \arcsin t)\,dt.$$

10.8. Задачи.

1. Найти интегралы

(1) $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$, **(3)** $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$,

(4) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$, $0 < \alpha < \pi$, **(5)** $\displaystyle\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$,

(6) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$, **(7)** $\displaystyle\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, **(8)** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$,

(9) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, **(10)** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$,

(11) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, **(12)** $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$.

2. Доказать, что если функция f интегрируема от 0 до 1, то

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx,$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx.$$

3. Доказать, что для интегрируемой на $[-l, l]$ функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 2\int_0^{l} f(x)\, dx,$$

если f четная, и

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 0,$$

если f нечетная.

4. Доказать, что если f — непрерывная периодическая на $\mathbb{R}$ функция с периодом T, то

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^{T} f(x)\, dx$$

при любом $a \in \mathbb{R}$.

5. С помощью рекуррентных формул вычислить интегралы

(1) $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, **(2)** $\displaystyle J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$.

10.9. Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \subset \mathbb{R}$, и пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — дифференцируемые функции такие, что $\varphi(x), \psi(x) \in [a, b]$. Тогда согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x)), \tag{10.9}$$

где F — первообразная функции f на $[a, b]$. Дифференцируя (10.9) по x, получим *формулу дифференцирования определенного интеграла как функции от пределов интегрирования*:

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x), \tag{10.10}$$

где символ $\dfrac{d}{dx}$ указывает на операцию дифференцирования по переменной x.

10.10. Задачи.

1. Найти

(1) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$, **(2)** $\displaystyle \frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$, **(3)** $\displaystyle \frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$.

2. Найти

(1) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$, **(2)** $\displaystyle \frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt$.

3. Найти

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$, **(2)** $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$,

(3) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$.

4. Доказать, что $\displaystyle\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ при $x \to +\infty$.

10.11. Теорема (монотонность интеграла). *Если $a \leqslant b$ и f, g — интегрируемые на $[a, b]$ функции такие, что $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{10.11}$$

10.12. Теорема (1-я теорема о среднем). *Пусть f — непрерывная, а g — интегрируемая на $[a, b]$ функции, причем g знакопостоянная на $[a, b]$. Тогда найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{10.12}$$

Теорема (2-я теорема о среднем). *Пусть f — монотонная, а g — интегрируемая на $[a, b]$ функции. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx. \tag{10.13}$$

Если, кроме того, f убывает и неотрицательна, то

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx, \tag{10.14}$$

а если f возрастает и неположительна, то

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx \tag{10.15}$$

для некоторого $\xi \in [a, b]$.

10.13. Задачи.

1. Определить знаки следующих интегралов:

(1) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx$, **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

2. Какой из интегралов больше:

(1) $\int\limits_0^1 e^{-x}\,dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$?

(2) $\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ или $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$?

3. Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интегралы

(1) $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$, **(2)** $\int\limits_0^1 e^{-x^n}\,dx$, $n>1$.

10.14. Остановимся на двух геометрических приложениях определенного интеграла — нахождении площадей плоских фигур и длин плоских или пространственных кривых.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две функции, определенные на $[a,b]$, такие, что $f(x)\leqslant g(x)$, $x\in[a,b]$. Тогда площадь S криволинейной трапеции, ограниченной слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, а снизу и сверху — графиками функций $f(x)$, $g(x)$ соответственно, равна

$$S=\int\limits_a^b (g(x)-f(x))\,dx. \tag{10.16}$$

Рассмотрим две функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, заданные на промежутке $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ и такие, что в каждой точке этого промежутка их производные не обращаются в нуль одновременно. Определяемое этими функциями отображение $\Phi(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ отрезка $[\alpha,\beta]$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ называют *гладким* (*параметризованным*) *путем на плоскости* $\mathbb{R}^2$. Если отображение $\Phi(t)$ взаимно однозначно на интервале (α,β), будем говорить о нем как о (*простой параметризованной*) *гладкой кривой* на плоскости. Образ $\Gamma=\{(\varphi(t),\psi(t)) : t\in[\alpha,\beta]\}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ при отображении Φ называют *носителем* пути (кривой).

Длина l определяемого функциями φ,ψ гладкого пути может быть найдена по формуле

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \tag{10.17}$$

Если добавить к двум функциям φ, ψ еще одну, т. е. рассмотреть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \eta(t)$ с сохранением налагаемых условий, то полученное отображение $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t), \eta(t))$ называют путем (кривой) *в пространстве* $\mathbb{R}^3$, длина в этом случае находится по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \tag{10.18}$$

Если кривая на плоскости задается как график явно заданной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то ее длина может быть найдена по формуле

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{10.19}$$

10.15. Задачи.

1. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах:

(1) $ax = y^2$, $ay = x^2$, $a > 0$, **(2)** $y = \sin^2 x$, $y = x \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

(3) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$,

(4) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

2. Найти длины кривых:

(1) $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$, $y \geqslant 0$,

(2) $x = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

10.16. Положение точки (x, y) на координатной плоскости может быть полностью определено не только ее декартовыми координатами, т. е. значениями x и y, но и другими числовыми характеристиками. В качестве таких характеристик можно взять, например, угол φ, на который надо сместиться относительно положительного направления оси абсцисс, чтобы попасть в данную точку, и расстояние r от начала координат до данной точки. В таком случае декартовы координаты можно выразить через r, φ так:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Величины r, φ в указанном контексте называют *полярными координатами* точки (x, y).

Если задана зависимость $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — дифференцируемая функция аргумента φ, то этим задается некоторая кривая в полярных координатах на декартовой плоскости, и можно либо находить площади фигур, в формировании которых участвует данная кривая, либо искать ее длину. Укажем формулы для обоих указанных возможностей. Площадь S фигуры, ограниченной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi, \tag{10.20}$$

а длина l пути $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, — по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \tag{10.21}$$

10.17. Задачи.

1. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

(1) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, **(2)** $r = a(1+\cos\varphi)$, **(3)** $r = a\sin 3\varphi$.

2. Найти длины кривых, заданных в полярных координатах:

(1) $r = a\sin\varphi$, **(2)** $r = a(1-\cos\varphi)$,

(3) $r = a(1-\sin\varphi)$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant -\pi/6$, **(4)** $r = a\varphi^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$.

10.18. Ответы. К п. 10.9. 1. (1) 2; (2) π; (3) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$; (4) $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$; (5) 1; (6) $\frac{1}{6}$; (7) $\frac{\pi a^4}{16}$; (8) $\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; (9) $-\frac{\pi}{3}$; (10) $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; (11) $2\pi\sqrt{2}$; (12) $\frac{3}{5}(e^\pi - 1)$. **5.** (1) $I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, если $n = 2k$; $I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, если $n = 2k+1$; (2) $J_n = I_n$, см. (1).

К п. 10.11. 1. (1) 0; (2) $-\sin a^2$; (3) $\sin b^2$. **2.** (1) $2x\sqrt{1+x^4}$; (2) $(\sin x - \cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$. **3.** (1) 1; (2) $\frac{\pi^2}{4}$; (3) 0.

К п. 10.13. 1. (1) $-$; (2) $+$. **2.** (1) Второй; (2) первый. **3.** (1) между $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{10}$; (2) между $1 - \frac{1}{n+1}$ и 1.

К п. 10.16. 1. (1) $\frac{a^2}{3}$; (2) $\frac{\pi}{2}$; (3) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$; (4) $\sqrt{2} - 1$. **2.** (1) $48a$; (2) $\frac{1}{4}(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}))$.

К п. 10.18. 1. (1) a^2; (2) $\frac{3\pi a^2}{2}$; (3) $\frac{\pi a^2}{4}$. **2.** (1) πa; (2) $8a$; (3) $2a$; (4) $\frac{8}{3}a(5\sqrt{5} - 1)$.