11. Несобственный интеграл

11.1. Говоря в предыдущем параграфе об определенном интеграле, мы рассматривали ограниченные функции, заданные на ограниченных замкнутых промежутках числовой прямой (если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то интегральные суммы не могут иметь предела в указанном в начале § 8 смысле). Однако при выполнении замены переменной нам доводилось сталкиваться с необходимостью интегрировать в ситуациях, выходящих за рамки указанных ограничений (см. об этом замечание в п. 8.4). Здесь мы рассмотрим подход к интегрированию в случае, когда эти ограничения отсутствуют.

Рассмотрим функцию f, заданную на множестве $X \subset \mathbb{R}$, и пусть ω — предельная точка множества X. Будем говорить, что ω является *особой точкой для функции* f, если либо ω бесконечна, либо f неограниченна в любой окрестности этой точки.

Пусть X — это промежуток такой, у которого правый конец служит особой точкой функции f, т. е. $X = [a, \omega)$, $a \in \mathbb{R}$. Предположим, что для любого $b \in (a, \omega)$ функция f интегрируема на промежутке $[a, b]$. В этой ситуации будем говорить, что рассматривается *несобственный интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ от функции f. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\omega} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то говорят, что *несобственный интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится*, и при этом полагают

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{11.1}$$

Если, в частности, f имеет первообразную F, то равенство (11.1) можно записать так:

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega} F(b) - F(a) \tag{11.2}$$

Если несобственный интеграл не сходится, то говорят, что он *расходится.*

Аналогично можно определить сходимость интеграла по промежутку $(\omega, b]$, в котором особой точкой является левый конец.

Если функция имеет несколько особых точек, то надо всю область интегрирования разбить на промежутки так, чтобы на каждом из них данная функция имела одну особую точку. Интеграл по всему множеству в таком случае понимается как сумма интегралов по отдельным промежуткам. Мы в дальнейшем все теоретические вопросы будем относить к ситуации одной особой точки, обычно в правом конце промежутка.

Основной задачей при изучении несобственных интегралов будет установление их сходимости или расходимости. Поскольку сходимость несобственного интеграла — это существование конечного предела

функции $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \to \omega$, для выяснения сходимости можно использовать результаты, относящиеся к пределу функции. Однако нередко трудно, а иногда в классе элементарных функций невозможно найти функцию $F(b)$. Поэтому задачу исследования сходимости несобственного интеграла можно сформулировать так: *как, используя свойства подынтегральной функции, установить, будет данный несобственный интеграл сходиться или нет*? Поскольку нам надо будет делать заключения о сходимости несобственного интеграла, т. е. по существу о наличии предела первообразной, основываясь на свойствах совсем другого объекта — подынтегральной функции, мы сформулируем и будем использовать утверждения, называемые признаками сходимости и носящие достаточный характер — проверив выполнение их условий, мы получаем сходимость или расходимость данного интеграла (но вместе с тем сходимость не будет гарантировать выполнение условий того или иного признака).

11.2. Сначала сформулируем относящееся к общей теории предела необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла, правда, использующее не подынтегральную функцию, а интеграл от нее.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. *Для сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *необходимо и до-*

статочно, чтобы

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists b \in (a, \omega))(\forall b_1 \in [b, \omega))(\forall b_2 \in [b, \omega)) \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon. \tag{11.3}$$

Отметим, что использование критерия Коши для установления сходимости затруднительно и как правило не применяется. Вместе с тем его нередко используют для доказательства расходимости путем проверки отрицания соотношения (11.3).

При исследовании сходимости несобственного интеграла будем придерживаться следующей процедуры. Сначала находим, какие точки будут особыми, учитывая, что $\pm\infty$ всегда особые. Затем изучаем, будет ли подынтегральная функция сохранять знак в некоторой окрестности особой точки, и если да, то обращаемся к признакам сравнения (п. ??), если нет, то смотрим возможность применения признаков Дирихле или Абеля (п. ??). При этом следует учесть, что если функция знакопеременная, но, например, в случае бесконечно удаленной особой точки стремится к нулю достаточно быстро для наличия абсолютной сходимости, то привлекать признаки Дирихле или Абеля не надо — абсолютная сходимость интеграла гарантирует его сходимость.

11.3. Первая группа признаков будет относиться к тому случаю, когда функция f сохраняет знак в некоторой окрестности точки ω. Для определенности будем считать, что $f(x) \geqslant 0$ для x, близких к ω.

Признак сравнения. *Пусть функции f, h таковы, что $0 \leqslant h(x) \leqslant f(x)$ для x из некоторой окрестности точки ω. Тогда если интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^\omega h(x)\,dx$ также сходится, а если интеграл $\int\limits_a^\omega h(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ тоже расходится.*

В случае, если существуют такие ненулевые положительные постоянные C_1, C_2, что $C_1 f(x) \leqslant h(x) \leqslant C_2 f(x)$ для x, близких к ω, сходимость интегралов $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\omega h(x)\,dx$ одновременна, т. е. сходимость одного из них равносильна сходимости другого.

В частности, если существует ненулевой конечный предел $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f(x)}{h(x)}$, *то и в этом случае сходимость рассматриваемых интегралов одновременна.*

Использование признаков сравнения эффективно, если имеется набор функций, для которых известна сходимость или расходимость несобственных интегралов от них в данной особой точке. Наиболее широко используемым при сравнении является набор функций вида x^α, если $\omega = +\infty$, и функций вида $(\omega - x)^\alpha$, если $\omega \in \mathbb{R}$. А именно, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^\alpha\,dx$, где $a > 0$, сходится при $\alpha < -1$ и расходится при $\alpha \geqslant -1$. Для конечной особой точки утверждение таково: интеграл $\int\limits_a^{\omega}(\omega - x)^\alpha\,dx$, $a < \omega < +\infty$, сходится при $\alpha > -1$ и расходится при $\alpha \leqslant -1$. Те же факты немного в другой форме можно выразить так: интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$, $0 < a < +\infty$, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$, а интеграл $\int\limits_a^{\omega}\dfrac{dx}{(\omega - x)^p}$, $a < \omega < +\infty$, сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

11.4. Примеры.

1. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$. Здесь две особые точки: 0 и $+\infty$. Изучим сходимость интеграла отдельно в каждой из них, т. е. сходимость интегралов $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$ и $\int\limits_0^{a}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$, где a — некоторое строго положительное число. Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \pi/2,$$

имеем

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^\alpha}$$

при $x \to +\infty$ и сходимость на бесконечности интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$

равносильна сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, которая имеет место при $\alpha > 1$. Далее, $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$, поэтому

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

при $x \to 0$, и сходимость в нуле интеграла $\int\limits_0^a \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$, а последний сходится при $\alpha - 1 < 1$, т. е. при $\alpha < 2$. Итак, исходный интеграл сходится при $1 < \alpha < 2$.

2. Изучим сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Здесь также две особые точки: 1 и $+\infty$. Фиксируем произвольно $a > 1$. Сначала рассмотрим интеграл $\int\limits_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 1} x^p = 1$, а $\ln x \sim x - 1$ при $x \to 1$, то

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x-1)^q}$$

при $x \to 1$, значит, сходимость интеграла $\int\limits_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_1^a \frac{dx}{(x-1)^q}$, а он сходится при $q < 1$.

Обратимся к интегралу $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Соображения при исследовании его сходимости таковы. Поскольку на бесконечности логарифм растет медленнее степенной функции, то основную роль в сходимости будет играть поведение функции $1/x^p$, так что ожидается сходимость при $p > 1$ независимо от q. Если же $p = 1$, то сходимость будет определяться значением q, а при $p < 1$ скорее всего будет расходимость снова при любом q.

Проведем подробное обоснование. Пусть $p > 1$. Возьмем какое-либо $\alpha \in (1, p)$ и покажем, что при достаточно далеких x выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^\alpha}.$$

Действительно, последнее неравенство равносильно такому:

$$\frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} < 1,$$

в котором $p - \alpha > 0$. Но, как известно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\gamma} = 0 \tag{11.4}$$

при любом β и любом $\gamma > 0$. В частности,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} = 0,$$

поэтому найдется такое $\Delta > 0$, что

$$\frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} < 1$$

для всех $x > \Delta$. Итак, мы получили при далеких x оценку

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 1$. Поскольку интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, то и интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ сходится (при любом q).

Пусть $p = 1$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \int\limits_a^{+\infty} \frac{d\ln x}{\ln^q x} = \int\limits_{\ln a}^{+\infty} \frac{dy}{y^q},$$

так что интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x}$ сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leqslant 1$.

Пусть теперь $p < 1$. Возьмем какое-либо $\beta \in (p, 1)$ и докажем, что при далеких x будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^\beta} < \frac{1}{x^p \ln^q x}$$

Действительно, последнее неравенство равносильно такому: $\dfrac{\ln^{-q} x}{x^{\beta - p}} < 1$, которое выполняется для далеких x при $\beta - p > 0$, или $\beta > p$ (см. (11.4)). Следовательно, если $p < 1$, то, взяв β так, что $p < \beta < 1$, можно ограничить снизу подынтегральную функцию $\dfrac{1}{x^p \ln^q x}$ функцией $\dfrac{1}{x^\beta}$, интеграл от которой на бесконечности расходится, тем самым и интеграл от исходной функции также расходится.

Соберем воедино полученные результаты. Исследуемый интеграл сходится в особой точке 1 при $q < 1$ и любом p, а на бесконечности сходится при $p > 1$ и любом q, а также при $p = 1$ и $q > 1$, и расходится при $p < 1$ и любом q. Окончательно, весь интеграл сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$.

11.5. Задачи. Исследовать сходимость интегралов:

(1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$, **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\ln x}$, **(3)** $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$, **(4)** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\ln(1+x)}$,

(5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$, **(6)** $\displaystyle\int\limits_0^{1} x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx$, **(7)** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\, dx,\ n \geqslant 0$,

(8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\, dx$, **(9)** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$, **(10)** $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$,

(11) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$, **(12)** $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}\, dx$,

11.6. Теперь снимем предположение о том, что подынтегральная функция f сохраняет знак вблизи особой точки ω. В этом случае для изучения сходимости несобственного интеграла используют (достаточные) признаки Абеля и Дирихле, которые позволяют судить о сходимости в особой точке интеграла от произведения двух функций.

Теорема (признак Дирихле). *Пусть функция $\varphi(x)$ монотонна вблизи точки ω и $\lim\limits_{x \to \omega} \varphi(x) = 0$, а функция $g(x)$ имеет ограниченную* *первообразную на* $[a,\omega)$, *т. е. интегралы* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *ограничены при* $b\in[a,\omega)$. *Тогда интеграл* $\int\limits_a^\omega \varphi(x)g(x)\,dx$ *сходится (в точке* ω*).*

Теорема (признак Абеля). *Пусть функция* $\varphi(x)$ *монотонна и ограничена на* $[a,\omega)$, *а интеграл* $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ *сходится. Тогда интеграл* $\int\limits_a^\omega \varphi(x)g(x)\,dx$ *сходится (в точке* ω*).*

Применение одного из сформулированных признаков начинается с представления подынтегральной функции в виде произведения двух функций, причем такого, что одна из функций монотонна (вблизи особой точки), после чего о монотонной части надо установить либо сходимость ее к нулю и пойти на дальнейшую проверку условий признака Дирихле, либо ограниченность и тогда нацелиться на признак Абеля.

Важно учитывать, что признаки Дирихле и Абеля, хоть и не предусматривают ограничений на знак функции вблизи особой точки, обычно недостаточно эффективны при исследовании интегралов от положительных функций. Для знакопеременных функций наиболее эффективно применение признаков к таким произведениям $\varphi(x)g(x)$ (на промежутке $[a,+\infty)$), где функция g имеет «ощутимые» промежутки сохранения знака. Если же длины таких промежутков стремятся к нулю, полезно заменой переменной интегрирования прийти к указанной ситуации.

Наконец, обратим внимание на то, что признаки Дирихле и Абеля дают только достаточные условия сходимости (в то время как некоторые варианты признака сравнения гарантируют равносильность сходимости интегралов).

11.7. Говорят, что несобственный интеграл от функции f сходится в особой точке ω *абсолютно*, если сходится интеграл от ее модуля, т. е. интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$. Если интеграл сходится абсолютно, то он и просто сходится, обратное неверно. Если интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно.*

11.8. Пример. Исследуем абсолютную и условную сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} x^p \sin x^q\,dx$, рассматривая $p \in \mathbb{R}$, $q > 0$. Иными словами, ответим на вопрос: при каких значениях p, q он сходится абсолютно, а при каких условно.

Начнем со сходимости самого интеграла, абсолютную сходимость изучим позже. Поскольку нет знакоопределенности подынтегральной функции, будем ориентироваться на признаки Абеля и Дирихле. Монотонная составляющая в подынтегральной функции очевидна — это функция x^p. Присмотревшись к множителю $\sin x^q$, можем заметить, что в случае $q \neq 1$ длины участков знакопостоянства этой функции при удалении x изменяются, и чтобы исключить негативное влияние этого эффекта, сделаем замену $x^q = y$, т. е. совершим подстановку $x = y^{1/q}$. Тогда сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} y^{(p+1)/q-1} \sin y\,dy$. Обозначим $(p+1)/q - 1 = \alpha$ и изучим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} y^{\alpha} \sin y\,dy$. Функция y^{α} монотонна, а $\sin y$ имеет ограниченную первообразную $-\cos y$, так что последний интеграл сходится, если $\lim\limits_{y\to+\infty} y^{\alpha} = 0$, что будет при $\alpha < 0$. Итак, при $\dfrac{p+1}{q} - 1 < 0$, т. е. при $p + 1 < q$, интеграл сходится.

Поскольку примененный здесь признак Дирихле не гарантирует расходимость при значениях $\alpha \geqslant 0$, требуется отдельно показать, что при таких α интеграл расходится. Для этого воспользуемся критерием Коши, согласно которому расходимость нашего интеграла на бесконечности равносильна тому, что

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall b \in [1, +\infty))(\exists b_1 \in [b, +\infty))(\exists b_2 \in [b, +\infty)) \qquad \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} y^{\alpha} \sin y\,dy \right| > \varepsilon.$$

Значит, надо суметь при любой удаленности находить такие промежутки $[b_1, b_2]$, интеграл на которых ощутимо большой. Ясно, что такими участками могут оказаться промежутки, на которых синус положителен, т. е. в качестве b_1, b_2 будем брать точки вида $2n\pi$, $(2n+1)\pi$.

Тогда ввиду положительности α получим

$$\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} y^\alpha \sin y \, dy \geqslant \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin y \, dy = 2,$$

и в качестве требуемого $\varepsilon > 0$ можно взять любое меньшее двух число, например, $\varepsilon = 1$. Таким образом, взяв любое $b > 1$, подберем n так, чтобы $2n\pi > b$, и, взяв $b_1 = 2n\pi$, $b_2 = (2n+1)\pi$, получим, что $\int\limits_{b_1}^{b_2} y^\alpha \sin y \, dy > 1$, следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} y^\alpha \sin y \, dy$ при $\alpha \geqslant 0$ расходится. Итак, исходный интеграл сходится при $p + 1 < q$, при остальных значениях p, q он расходится.

Исследуем абсолютную сходимость, т. е. изучим сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} y^\alpha |\sin y| \, dy$. Поскольку $y^\alpha \geqslant y^\alpha |\sin y|$, наш интеграл сойдется при $\alpha < -1$, т. е. исходный интеграл сойдется абсолютно при $\dfrac{p+1}{q} - 1 < -1$, или $\dfrac{p+1}{q} < 0$. Пусть теперь $-1 \leqslant \alpha < 0$ (при $\alpha \geqslant 0$, как установлено выше, интеграл расходится, тем более он абсолютно расходится). Ориентируясь на применение признака сравнения, желательно было бы ограничить снизу функцию $y^\alpha |\sin y|$ функцией вида y^α. Однако этого сделать не удастся (нули синуса мешают), значит, придется для доказательства расходимости придумывать что-то отличное от непосредственного использования признака сравнения. Заметим, что имеет место очевидное неравенство $|\sin y| \geqslant \sin^2 y$. Воспользовавшись им, получим оценку снизу:

$$y^\alpha |\sin y| \geqslant y^\alpha \sin^2 y = y^\alpha \frac{1 - \cos 2y}{2} = \frac{1}{2}(y^\alpha - y^\alpha \cos 2y), \qquad (11.6)$$

и займемся изучением сходимости интегралов от каждой из функции в правой части (11.6). При рассматриваемых $\alpha \in [-1, 0)$ интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} y^\alpha \, dy$$

расходится, а интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} y^\alpha \cos 2y \, dy$$

сходится согласно признаку Дирихле. В итоге интеграл

$$\int_1^{+\infty} (y^\alpha - y^\alpha \cos 2y)\, dy$$

расходится как разность расходящегося и сходящегося интегралов. Тем самым расходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} y^\alpha |\sin y|\, dy$ ввиду оценки (11.6) и признака сравнения.

Подведем итог всем нашим исследованиям: интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^p \sin x^q\, dx$ сходится абсолютно при $\dfrac{p+1}{q} < 0$, условно при $0 \leqslant \dfrac{p+1}{q} \leqslant 1$ и расходится при $\dfrac{p+1}{q} > 1$.

11.11. Задачи. Исследовать абсолютную и условную сходимости следующих интегралов:

(1) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\, dx$, **(2)** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x}{x+10}\, dx$, **(3)** $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx$,

(4) $\int\limits_0^{+\infty} x \cos x^4\, dx$, **(5)** $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)\, dx$, **(6)** $\int\limits_0^{+\infty} \sin^3(x^2+2x)\, dx$,

11.12. Ответы. К п. 11.5. (1) Сходится; (2) расходится; (3) сходится; (4) расходится; (5) сходится при $p > 0$; (6) сходится, если $p > -1$ и $q > -1$; (7) сходится, если $m > -1$, $n - m > 1$; (8) сходится при $1 < n < 2$; (9) сходится, если $p < 1$, $q < 1$; (10) сходится при $n > -1$; (11) сходится, если $\min(p, q) < 1$, $\max(p, q) > 1$; (12) сходится.

К п. 11.11. (1) Сходится условно; (2) сходится условно; (3) сходится условно; (4) сходится условно; (5) сходится условно; (6) сходится условно.