12. Числовые ряды

12.1. Пусть дана числовая последовательность x_n. Если эту последовательность рассматривают с точки зрения нахождения «суммы» всех ее членов, то говорят, что рассматривают *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, а члены последовательности x_n называют при этом *общим членом* данного ряда.

Суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ называют *частичными суммами ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм, его называют *суммой данного ряда* и обозначают, как и ряд, символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. О самом ряде говорят при этом, что он *сходится.* Если ряд не сходится, то его называют *расходящимся.*

Для доказательства расходимости ряда может оказаться полезным необходимый признак сходимости

Утверждение 1 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.*

Важно помнить, что обратное неверно.

Утверждение 2 (критерий Коши сходимости ряда). *Для сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *необходимо и достаточно следующее свойство:*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0)\,(\forall n \geqslant n_0\, \forall p \geqslant 0) \quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right| \leqslant \varepsilon. \qquad (12.1)$$

12.2. Обращаясь к числовому ряду, обычно ставят вопрос о его сходимости. Здесь аналогично несобственному интегралу возникает ситуация, в которой желательно сделать заключение о сходимости какой-то последовательности (частичных сумм) на основе информации о другой последовательности (общего члена). Поэтому для исследования сходимости рядов формулируют специальные утверждения, называемые признаками сходимости.

Сначала коротко опишем перечень вопросов, сопровождающих изучение сходимости ряда, а потом сообщим содержание соответствующих признаков.

В первую очередь смотрим, сходится ли к нулю общий член данного ряда, и если нет, то ряд расходится, если да, то мы продолжаем исследование ряда.

Затем констатируем, знакопостоянен ли общий член ряда, и если да, то обращаемся к признакам сравнения или основанным на них признакам Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса или изучаем асимптотику общего члена ряда с целью возможного сравнения с общим членом сходящегося ряда. Если общий член ряда меняет знак, то смотрим на возможность применения к нему признаков Дирихле и Абеля. Для доказательства расходимости можно использовать критерий Коши.

12.3. Напомним формулировки признаков сходимости знакопостоянных рядов.

Утверждение 1 (признак сравнения). *Рассмотрим два ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *с положительным членами. Предположим, что* $x_n \leqslant y_n$ *по крайней мере для всех далеких номеров* n. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *также сходится, а если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *расходится.*

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = K$ *и* $0 < K < \infty$, *то сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *равносильна сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. *Так будет, в частности, если* $x_n \sim y_n$, *т. е. если* $x_n = y_n + o(y_n)$ *при* $n \to \infty$.

На сравнении с геометрической прогрессией (быстро сходящимся рядом) основаны признаки Даламбера и Коши.

Утверждение 2 (признак Даламбера). *Предположим, что* $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = d$. *Тогда если* $d < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, если* $d > 1$, *то расходится, если же* $d = 1$, *то признак не дает информации о сходимости ряда.*

Утверждение 3 (признак Коши). *Предположим, что* $x_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c$. *Тогда если* $c < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, если* $c > 1$, *то расходится, если же* $c = 1$, *то признак не дает информации о сходимости ряда.*

Более тонкими являются признаки, основанные на сравнении с рядами
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \tag{12.2}$$
Напомним, что ряд (12.2) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Тем самым если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ мы нашли, что $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, то при $\alpha > 1$ наш ряд сойдется, а при $\alpha \leqslant 1$ разойдется.

Утверждение 4 (признак Раабе). *Предположим, что для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$, *существует предел*
$$p = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right).$$
Тогда если $p > 1$, то исходный ряд сходится, если $p < 1$, то расходится, если же $p = 1$, то признак не дает информации о сходимости ряда.

Утверждение 5 (признак Гаусса). *Если $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и*
$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\gamma}},$$
где $|\gamma_n| < c$, $\gamma > 0$, то

(a) *при $\alpha > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, при $\alpha < 1$ расходится;*

(b) *при $\alpha = 1$ данный ряд сходится в случае, если $\beta > 1$, и расходится в случае, если $\beta \leqslant 1$.*

12.4. Пример 1. Исследуем сходимость ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}, \tag{12.3}$$
воспользовавшись разными признаками и проследив, как эти признаки применяются и срабатывают.

Начнем с необходимого признака. Поскольку здесь неочевидно, сходится ли к нулю общий член ряда, можно отказаться от применения необходимого признака и перейти к применению других признаков.

Обратимся к признаку Даламбера. Для этого составим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}n^{n+p}}{(n+1)^{n+1+p}n!e^n} = \frac{en^{n+p}}{(n+1)^{n+p}} = \frac{e}{(1+1/n)^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

так что признак Даламбера информации о сходимости не дает.

Прибегнем к признаку Гаусса. Составим

$$\begin{aligned}p_n &= n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} - 1\right)\\ &= n\left(e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right)\end{aligned}$$

полагаем $x = 1/n$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{x}(e^{-1}(1+x)^{1/x}(1+x)^p - 1) = \frac{1}{x}(e^{-1}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}(1+x)^p - 1)\\ &= \frac{1}{x}\big(e^{-1}e^{\frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x}}(1+px+o(x)) - 1\big)\\ &= \frac{1}{x}\big(e^{-\frac{x}{2}+o(x)}(1+px+o(x)) - 1\big)\\ &= \frac{1}{x}\left(\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)(1+px+o(x)) - 1\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(1+\left(p-\frac{1}{2}\right)x + o(x) - 1\right) = p - \frac{1}{2} + o(1),\end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p - \frac{1}{2},$$

так что исходный ряд сходится при $p - \frac{1}{2} > 1$, т. е. при $p > \frac{3}{2}$, и расходится при $p < \frac{3}{2}$. Для значения $p = \frac{3}{2}$ признак Раабе информации о сходимости не дает.

Исследуем теперь сходимость этого ряда, используя асимптотику его общего члена. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Имеем

$$\frac{n!e^n}{n^{n+p}} = \frac{(2\pi)^{1/2}n^{1/2}n^ne^n}{e^nn^{n+p}}e^{-\frac{\theta}{12n}} = \sqrt{2\pi}\frac{e^{-\frac{\theta}{12n}}}{n^{p-1/2}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-1/2}},$$

так что исходный ряд, как и ряд с общим членом $\dfrac{1}{n^{p-1/2}}$, сходится при $p > \dfrac{3}{2}$ и расходится при $p \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Мы получили исчерпывающую информацию о тех p, при которых ряд сходится, правда, при этом нам пришлось воспользоваться асимптотической формулой для $n!$.

Попробуем применить к исследованию сходимости признак Гаусса. Для этого составим отношение $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$ и при анализе его асимптотики воспользуемся промежуточными выкладками, проделанными при использовании признака Раабе. Делая, как и выше, замену $x = \dfrac{1}{n}$, проведем вычисления:

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} \\
&= e^{-1}e^{x-x^2/2+x^3/3+o(x^3)}\left(1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+o(x^2)\right) \\
&= \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\left(1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+o(x^2)\right) \\
&= 1+\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2},
\end{aligned}$$

где в коэффициент γ_n вошло всё, что собралось при дроби $\dfrac{1}{n^2}$ в процессе приведения подобных членов. По признаку Гаусса ряд будет сходиться, если $p - \dfrac{1}{2} > 1$, и расходиться, если $p - \dfrac{1}{2} \leqslant 1$.

Пример 2. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}.$$

Ясно, что предел его общего члена равен нулю, так что начнем применение какого-либо признака. Величина показателя степени подсказывает, что для начала стоит обратиться к признаку Коши. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n^2\ln(1-\frac{a^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3}))} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2(-\frac{a^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1
\end{aligned}$$

при любом $a \neq 0$, так что ряд сходится при любом $a \neq 0$.

Пример 3. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+k/\ln n}}.$$

Ясно, что предел общего члена этого ряда равен нулю. Исследуем асимптотику общего члена:

$$\frac{1}{n^{1+k/\ln n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+k/\ln n} = e^{(1+\frac{k}{\ln n})\ln\frac{1}{n}} = e^{\ln\frac{1}{n}-k} = e^{-k}\cdot\frac{1}{n},$$

и ряд расходится, каково бы ни было k

12.5. Задачи. Исследовать сходимость следующих рядов:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$, **(4)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\frac{n-1}{n+1}$, **(6)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$, **(8)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$,

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$, **(10)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$,

12.6. Рассмотрим теперь ряды, у которых общий член может быть знакопеременным. Для исследования сходимости таких рядов применяют формулируемые ниже признаки Дирихле, Абеля или частный случай признака Дирихле — признак Лейбница. Кроме исследования простой сходимости, знакопеременные ряды исследуют также на абсолютную сходимость. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. В том случае, когда ряд сходится, но не абсолютно, его называют *условно сходящимся*. Для исследования абсолютной сходимости применяют, разумеется, признаки, приспособленные для изучения сходимости знакопостоянных рядов. Расходимость ряда иногда можно установить с помощью критерия Коши.

Утверждение 1 (признаки Абеля и Дирихле). *Рассмотрим числовые последовательности a_n, b_n и предположим, что последовательность a_n монотонна.*

Допустим, что выполнены условия какого-либо из следующих пунктов:

(α) *имеет место сходимость $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, а частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ряда, составленного из b_n, ограничены, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant C$$

при всех $n \in \mathbb{N}$;

(β) *последовательность a_n ограничена, т. е. существует такая постоянная $K > 0$, что $|a_n| \leqslant K$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.*

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

При выполнении условия (α) говорят о *признаке Дирихле*, а условия (β) — о *признаке Абеля.*

Утверждение 2 (признак Лейбница). *Если x_n — монотонная сходящаяся к нулю последовательность, то знакочередующийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

сходится.

12.7. Пример 1. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$.

Заметим, что если $x = k\pi$, то $\sin x = 0$, и наш ряд нулевой, так что сходится, даже абсолютно. Будем рассматривать теперь $x \neq k\pi$.

Если бы общий член ряда сходился к нулю достаточно быстро, можно было бы, воспользовавшись признаком сравнения, доказать абсолютную сходимость и тем самым сходимость данного ряда. Однако здесь общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что признак сравнения не сработает. Поэтому обратимся к признакам, приспособленным для исследования сходимости знакопеременных рядов.

Сначала выделим монотонную составляющую. Это, конечно, последовательность $\dfrac{1}{n}$. Теперь отметим, что она сходится к нулю, тем самым мы ориентируемся на применение признака Дирихле. Согласно этому признаку остается доказать ограниченность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$. Найдем сумму S_n. Умножив равенство

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

на $2\sin\dfrac{x}{2}$ и воспользовавшись (7.30) для произведения синусов, получим

$$\begin{aligned}
2S_n \sin\frac{x}{2} &= 2\left(\sin x \cdot \sin\frac{x}{2} + \sin 2x \cdot \sin\frac{x}{2} + \dots + \sin nx \cdot \sin\frac{x}{2}\right) \\
&= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \dots \\
&\qquad \dots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \\
&= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2},
\end{aligned}$$

откуда

$$S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Значит, $|S_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin x/2}$. Итак, суммы S_n ограничены, а следовательно, по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ сходится при любом x.

Обратимся к изучению абсолютной сходимости, т. е. рассмотрим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}.$$

Ввиду медленной сходимости к нулю общего члена этого ряда ограничить его сверху общим членом сходящегося ряда не удастся. Поэтому попробуем обосновать гипотезу о его расходимости. Здесь можно воспользоваться критерием Коши. Однако проще применить искусственный прием. Ясно, что $|\sin nx| \geqslant \sin^2 nx = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$, поэтому

$$\frac{|\sin nx|}{n} \geqslant \frac{1}{2n}(1 - \cos 2nx) = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ сходится (по признаку Дирихле). Тем самым ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$ расходится как разность расходящегося и сходящегося рядов. Общий член исследуемого ряда оказался ограниченным снизу общим членом расходящегося ряда, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ расходится.

Пример 2. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

Как и при изучении сходимости несобственных интегралов, обратимся к асимптотике общего члена ряда. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Тогда $1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$, откуда

$$(-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \frac{\pi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^2}{2n}$$

сходится по признаку Дирихле, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$$

сходится абсолютно по признаку сравнения, значит, исходный ряд сходится.

12.8. Задачи. 1. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих рядов:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}}$, **(2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}}$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$, **(4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}$,

$$\textbf{(5)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}, \qquad \textbf{(6)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n},$$

Ответы к п. 12.8. 1. (1) Сходится абсолютно, (2) сходится абсолютно, (3) сходится условно, (4) сходится условно, (5) сходится условно, (6) расходится,