13. Дифференцирование функций многих переменных

13.1. Одним из самых распространенных средств локального изучения функций многих переменных является характеристика ее поведения вдоль координатных прямых или каких-либо прямых, проходящих через фиксированную точку.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h},$$

его называют *частной производной функции* f *в точке* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *по переменной* x_k и обозначают одним из символов:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x), \quad f'_{x_k}(x), \quad f'_k(x), \quad D_k f(x), \quad \partial_k f(x).$$

Указатель точки x в очевидных ситуациях опускают.

Для нахождения частной производной по какой-то переменной считают эту переменную изменяющейся, а все остальные фиксированными и находят частную производную как производную функции одной переменной, а именно той, по которой ищется производная.

13.2. Задачи. Найти частные производные следующих функций:

(1) $f(x, y) = x \sin(x + y)$; **(2)** $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

(3) $f(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; **(4)** $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

13.3. Кроме анализа изменения функции вдоль координатных прямых, отраженного в понятии частных производных, для изучения функций многих переменных используют (полный) дифференциал, связанный с ее (полным) изменением вблизи данной точки. Дадим определение дифференцируемости для общего случая отображений конечномерных арифметических пространств, а потом будем ограничиваться рассмотрением только вещественных функций, т. е. отображений, действующих в $\mathbb{R}$.

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k, n \in \mathbb{N}$, называют *дифференцируемым в точке* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ открытого множества $\Omega \subset D(f)$, если существует такой линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, что

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \alpha(h)\|h\|, \tag{13.1}$$

где $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0$, $h \in \mathbb{R}^n$. Оператор A называют *дифференциалом отображения* f *в точке* x и обозначают через $df(x)$. Если отождествить оператор A с его матрицей относительно стандартных базисов, то Ah — это произведение матрицы A на приращение h. Матрицу дифференциала $df(x)$ называют *матрицей Якоби* и обозначают одним из символов $df(x)$, $Df(x)$, $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)$, где $f_1,\ldots,f_k$ — координатные функции отображения f. Дифференцируемое в точке x отображение имеет частные производные по всем переменным в данной точке, при этом матрица Якоби состоит из частных производных:

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots x_n)}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Однако наличие частных производных в данной точке по всем переменным не гарантирует дифференцируемости отображения в этой точке.

Если $k = n$, то матрица Якоби квадратная и ее определитель $\det\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)$ называют *якобианом* отображения f в точке x.

Обсудим подробнее случай отображения из $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$, т. е. случай функции $f(x,y)$ двух переменных. Матрица Якоби такой функции состоит из одной строки и двух столбцов, т. е. представляет собой двумерный вектор. Таким образом, условие, определяющее дифференцируемость функции $f(x,y)$ выглядит так: дифференцируемость f в точке (x,y) означает существование такого вектора $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, что

$$f(x+k, y+l) = f(x,y) + ak + bl + \alpha(k,l)\cdot\sqrt{k^2+l^2}, \qquad (13.2)$$

где $\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ l\to 0}}\alpha(k,l) = 0$. В этом соотношении использована евклидова норма, но ее можно заменить любой другой нормой ввиду эквивалентности всех норм в конечномерном арифметическом пространстве.

Поскольку для дифференцируемости необходимо существование частных производных, отсутствие в данной точке какой-либо из частных производных сразу приводит к недифференцируемости функции в такой точке. Если же частные производные по обеим переменным есть, то никакие другие числа, кроме этих частных производных, не подойдут на роль компонент вектора (a, b) для анализа равенства (13.2), т. е. с необходимостью $a = f'_x(x, y)$, $b = f'_y(x, y)$. Остается составить равенство типа (13.2), выразить в нем

$$\alpha(k, l) = \frac{f(x+k, y+l) - f(x, y) - f'_x(x, y)k - f'_y(x, y)l}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

и установить, сходится ли $\alpha(k, l)$ к нулю при $k \to 0$, $l \to 0$. Если да, то f дифференцируема в точке (x, y), если нет, то недифференцируема.

Для обоснования дифференцируемости функции в данной точке можно обращаться к следующему удобному критерию, правда, использующему существование частных производных не только в данной точке, но и в точках из некоторой ее окрестности.

Теорема. *Пусть f имеет производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точках (x, y) из некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и функции $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда f дифференцируема в точке (x_0, y_0).*

13.4. Пример. Исследуем на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Найдем

$$f'_x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}},\ x \neq 0, \quad f'_y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}},\ y \neq 0.$$

В точке $(0, 0)$ указанным способом частные производные не находятся. Воспользуемся определением:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

аналогично $f'_y(0, 0) = 0$. Поскольку, очевидно, частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ определены не во всех точках вблизи нуля, для исследования дифференцируемости f в $(0, 0)$ остается определение, согласно которому дифференцируемость f в $(0, 0)$ равносильна выполнению равенства

$$f(k, l) = f'_x(0, 0)k + f'_y(0, 0)l + \alpha(k, l)\sqrt{k^2 + l^2} = \alpha(k, l)\sqrt{k^2 + l^2},$$

где $\lim\limits_{(k,l) \to (0,0)} \alpha(k, l) = 0$, или

$$\sqrt[3]{kl} = \alpha(k, l)\sqrt{k^2 + l^2}.$$

Остается выяснить, будет ли

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ l\to 0}} \alpha(k,l) = \lim_{\substack{k\to 0\\ l\to 0}} \frac{\sqrt[3]{kl}}{\sqrt{k^2+l^2}} = 0.$$

Рассмотрев функцию $\dfrac{\sqrt[3]{kl}}{\sqrt{k^2+l^2}}$ вдоль направлений $k=0$ и $k=l$, находим, что пределы вдоль этих направлений различны, следовательно, требуемого равенства нет и $\sqrt[3]{xy}$ недифференцируема в точке $(0,0)$.

13.5. Задачи. 1. Исследовать дифференцируемость функций:
(1) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$; **(2)** $f(x,y)=\cos\sqrt[3]{xy}$;
(3) $f(x,y)=e^{-1/(x^2+y^2)}$, если $x^2+y^2>0$, и $f(0,0)=0$;
(4) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

в окрестности точки $(0,0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные, однако недифференцируема в точке $(0,0)$.

3. Показать, что функция $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0,0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

4. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\ y=0,\end{cases}$$

имеет в окрестности точки $(0,0)$ частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, которые разрывны в точке $(0,0)$ и неограниченны в любой окрестности ее, и тем не менее функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

5. Найти якобиан отображения

$$(r,\varphi)\mapsto(r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

определенного в полуполосе $r>0$, $0<\varphi<2\pi$.

6. Найти якобиан отображения

$$(r, \varphi, \psi) \mapsto (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi),$$

определенного на множестве $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$.

13.6. Предположим, что в каждой точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует частная производная $f'_{x_i}(x)$ и функция $g(x) = f'_{x_i}(x)$ имеет частную производную $g'_{x_k}(x)$ в точке $x \in \Omega$. Тогда эту производную называют *производной второго порядка функции f по переменным x_i, x_k* и обозначают одним из символов $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x)$, $f''_{x_k x_i}(x)$, $f''_{ki}(x)$. В этом обозначении имеется в виду, что сначала берется производная по переменной x_i, а затем — по x_k, хотя, как мы вскоре узнаем, часто порядок следования переменных значения не имеет. Если переменные x_i, x_k различны, то производную по ним называют *смешанной*, если же одинаковы, то *чистой*, и вторую производную по x_i дважды обозначают одним из символов $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$, $f''_{x_i^2}(x)$, $f''_{ii}(x)$.

Индуктивно определяются производные более высоких порядков.

Утверждение. *Предположим, что существуют производные по различным переменным x_i, x_k функции f в точках из некоторой окрестности данной точки x. Если эти производные непрерывны в точке x, то они равны, так что в таком случае порядок взятия производных безразличен.*

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие независимость смешанных производных от порядка следования переменных.

13.7. Задачи.

1. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, если

(1) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + 8xy^3}{x + 2y}$, **(2)** $f(x, y) = \sin(x + \cos y)$.

13.8. Утверждение. *Рассмотрим отображения $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ такие, что определена их композиция $f \circ g$. Предположим, что она определена на некоторой открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Если g дифференцируема в точке x, а f*

дифференцируема в точке $g(x)$, то композиция $f \circ g$ дифференцируема в точке x и имеет место равенство

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x). \tag{13.3}$$

Правило дифференцирования композиции в терминах матриц Якоби означает, что матрица Якоби композиции равна произведению матриц Якоби отображений, составляющих композицию. Исходя из правила умножения матриц, выпишем правило дифференцирования в терминах частных производных, считая, что f действует из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x))\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x))\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x)\\ &= \sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_l}(g(x))\frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned} \tag{13.4}$$

где символами $y_1, \dots, y_k$ обозначены переменные, представляющие аргументы функции f.

Выпишем подробно формулы для нахождения частных производных в том случае, если g действует из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, а f — из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, пусть $z = f(x, y)$ и $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Кстати, в последних двух равенствах буквами x, y обозначены разные объекты: с одной стороны, это символы переменных, а с другой — обозначения функций. Так поступают довольно часто и в конце концов привыкают понимать, в каком месте о каком статусе буквы идет речь. Итак, для функции $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ имеем

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v). \tag{13.5}$$

При нахождении производных первого порядка от композиции функций, если не требуется находить производные второго порядка, чаще всего не выписывают точки, в которых эти производные находятся. Однако если требуется найти производные второго или более высоких порядков, то лучше писать точки, в которых берутся соответствующие производные для того, чтобы учитывать имеющиеся зависимости и не ошибаться, забывая учесть те или иные переменные. Конечно, при нахождении производных последнего из требуемых порядков аргументы можно не писать.

13.9. Пример. Убедимся в том, что функция

$$z(x, y) = yf(x^2 - y^2),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $y^2z'_x + xyz'_y = xz$.

Отметим сразу, что функция f зависит от одной переменной, поэтому при ее дифференцировании не требуется указывать, по какой переменной берется производная — переменная всего одна. Итак, имеем

$$z'_x = yf' \cdot 2x, \quad z'_y = f + yf' \cdot (-2y),$$

где производная f' берется в точке $x^2 - y^2$. Подставив выражения для z'_x, z'_y в уравнение, получим

$$y^2 \cdot (2xyf') + xy(f - 2y^2 f') = xyf = xz.$$

13.10. Пример. Найдем вторую смешанную производную функции $f(x, y) = g(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$, где g — функция, имеющая непрерывные производные второго порядка. При описании производных функции g цифрами внизу будем обозначать номер того аргумента, по которому берется в данный момент производная, дабы не вводить дополнительных букв для обозначения аргументов функции g. Итак,

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= g'_1(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy) \cdot 2x \\ &\quad + g'_2(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy) \cdot 2x + g'_3(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy) \cdot 2y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{xy} &= (g''_{11} \cdot 2y + g''_{12} \cdot (-2y) + g''_{13} \cdot 2x) \cdot 2x \\ &\qquad + (g''_{21} \cdot 2y + g''_{22} \cdot (-2y) + g''_{23} \cdot 2x) \cdot 2x \\ &\qquad + (g''_{31} \cdot 2y + g''_{32} \cdot (-2y) + g''_{33} \cdot 2x) \cdot 2y + 2g'_3 \\ &= 4\big(xyg''_{11} - xyg''_{12} + x^2 g''_{13} + xyg''_{21} - xyg''_{22} \\ &\qquad + x^2 g''_{23} + y^2 g''_{31} - y^2 g''_{32} + xyg''_{33}\big) + 2g'_3 \\ &= 4\big(xy\big(g''_{11} - g''_{12} + g''_{21} - g''_{22} + g''_{33}\big) \\ &\qquad + x^2\big(g''_{13} + g''_{23}\big) + y^2\big(g''_{31} - g''_{32}\big)\big) + 2g'_3. \end{aligned}$$

13.11. Задачи. Предполагая, что функции φ, ψ имеют непрерывные частные производные до соответствующего порядка, проверить равенства:

(1) $yz'_x - xz'_y = 0$, если $z = \varphi(x^2 + y^2)$;

(2) $x^2z'_x - xyz'_y + y^2 = 0$, если $z = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$;

(3) $xu'_x + yu'_y + zu'_z = u + \dfrac{xy}{z}$, если $u = \dfrac{xy}{z} \ln x + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$;

(4) $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, если $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$;

(5) $u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$, если $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$;

(6) $x^2 u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2 u''_{yy} = 0$, если $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

(7) $u'_x u''_{xy} = u'_y u''_{xx}$, если $u = \varphi(x + \psi(y))$.

13.12. Мы определили дифференциал как линейный оператор. Займемся выработкой удобной формы представления дифференциала. Поскольку всякий линейный оператор, действующий между арифметическими конечномерными пространствами, описывается матрицей такого оператора, для нахождения дифференциала можно найти частные производные координатных функций данного отображения и записать его матрицу Якоби. Однако для отображений, действующих в $\mathbb{R}$, т. е. для функций многих переменных, используют другой способ описания.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$ функция. Возьмем вектор $v = (v_1, \ldots, v_n)$, выражающий приращение аргумента в точке x, и запишем действие дифференциала на вектор v:

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i. \tag{13.6}$$

Пусть $\pi_i : x \to x_i$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, — проектор на i-ю координату. Тогда дифференциал $d\pi_i(x)(v)$, который, естественно, обозначают через $dx_i(v)$, очевидно, находится так: $dx_i(v) = v_i$. Тогда, заменяя в (13.6) компоненты v_i выражениями $dx_i(v)$, приходим к записи

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(v), \tag{13.7}$$

или, опуская для краткости указание аргумента v, получаем такую (функциональную) форму выражения дифференциала:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \tag{13.8}$$

которую обычно и используют для записи дифференциала. Если опустить еще и указание точки x, в которой рассматривается дифференциал, то получается совсем коротко:

$$df = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\, dx_i. \tag{13.9}$$

13.13. Пример. Найдем дифференциал функции $u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$. Имеем $u'_x = f' \cdot 2x$, $u'_y = f' \cdot 2y$, $u_z = f' \cdot 2z$, так что

$$du = 2xf'dx + 2yf'dy + 2zf'dz.$$

13.14. Задачи. Найти дифференциалы функций u (здесь f — заданная дифференцируемая функция):

(1) $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$; **(2)** $u(x, y) = f(xy, x/y)$;

(3) $u(x, y, z) = f(x+y, z)$; **(4)** $u(x, y, z) = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$;

(5) $u = f(x, y, z)$; где $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$;

(6) $u(x, y, z) = f(x/y, y/z)$;

13.15. Рассмотрим функцию f, действующую из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Фиксируем вектор $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Если существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \tag{13.10}$$

его называют *производной функции f по вектору v в точке x* и обозначают одним из символов $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$, $f'_v(x)$, $\partial_v f(x)$. Если $\|v\| = 1$, то вектор v называют *направлением*, а производную $f'_v(x)$ по вектору v — *производной по направлению* v или по направлению l, где l — определяемая вектором v прямая.

Если функция f дифференцируема в точке x, то она имеет в этой точке производную по любому вектору и выполнено равенство

$$df(x)(v) = f'_v(x), \tag{13.11}$$

так что можно указать простой способ нахождения производной по вектору v дифференцируемой в точке x функции:

$$f'_v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i = \langle \operatorname{grad} f(x) \mid v \rangle, \tag{13.12}$$

где использован *градиент*

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

функции f в точке x, обозначаемый также символом $\nabla f(x)$, а через $\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Надо иметь в виду, что наличие производной по любому вектору еще не гарантирует дифференцируемость f в точке x. Кстати, частные производные суть производные по направлениям векторов канонического базиса.

Очевидно, что координаты единичного вектора v равны косинусам углов между этим вектором и векторами канонического базиса. Их называют *направляющими косинусами вектора* v. В частности, для функции $f(x, y, z)$ трех переменных и направления $v = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ с направляющими косинусами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ производная f по направлению v равна

$$f'_v(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\cos\alpha + f'_y(x, y, z)\cos\beta + f'_z(x, y, z)\cos\gamma.$$

Относительно градиента можно напомнить, что среди всех направлений, т. е. нормированных векторов, производная f в точке x в направлении, определяемом градиентом, наибольшая. Кроме того, вектор $\operatorname{grad} f(x)$ в точке x из множества уровня $\{x : f(x) = \mathrm{const}\}$, ортогонален этому множеству уровня и направлен в сторону роста функции f. Так, для функции $f(x, y)$ (соответственно $f(x, y, z)$) градиент $\operatorname{grad} f(x, y)$ направлен перпендикулярно линии (поверхности) уровня, проходящей через эту точку.

13.16. Пример. Найдем производную функции

$$z(x, y) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

в точке $M(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

В первую очередь найдем вектор внутренней нормали. Градиент функции $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, т. е. вектор $\operatorname{grad}\varphi(x, y) = \left(\dfrac{2x}{a^2}, \dfrac{2y}{b^2}\right)$, дает вектор нормали к множеству $\varphi(x, y) = 1$ в точке (x, y) и направлен в сторону роста функции φ, т. е. наружу от эллипса $\varphi(x, y) = 1$. В точке M имеем

$$\operatorname{grad}\varphi(M) = \left(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{b}\right), \quad \|\operatorname{grad}\varphi(M)\| = \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|},$$

и требуемый единичный вектор внутренней нормали — это вектор

$$-\frac{\operatorname{grad}\varphi(M)}{\|\operatorname{grad}\varphi(M)\|} = \left(-\frac{|b|\operatorname{sign} a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{|a|\operatorname{sign} b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Производная функции z по направлению внутренней нормали в точке M равна

$$-\frac{\partial z}{\partial x}(M)\frac{|b|\operatorname{sign} a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\partial z}{\partial y}(M)\frac{|a|\operatorname{sign} b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}|b|\operatorname{sign} a}{a}+\frac{\sqrt{2}|a|\operatorname{sign} b}{b}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{|ab|}.$$

13.17. Задачи. Найти производную функции f в точке M по данному направлению, если

(1) $f=x^2-y^2$, $M=(1,1)$, по направлению l, составляющему угол $\pi/3$ с положительным направлением оси Ox;

(2) $f=\ln(x^2+y^2)$, $M(x_0,y_0)$, по направлению l, перпендикулярному линии уровня, проходящей через эту точку, и направленному в сторону роста функции f;

(3) $f=x^2-3yz+4$, $M(1,2,-1)$, по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями;

(4) $f=\ln(e^x+e^y+e^z)$, $M(0,0,0)$, по направлению луча, образующего с осями координат x,y,z углы соответственно $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/3$.

13.18. *Касательной плоскостью к поверхности* в некоторой ее точке называют плоскость, содержащую все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку (точку касания). Вектор, ортогональный касательной плоскости, называют *вектором нормали*.

Если гладкая поверхность задана в явном виде, т. е. как график некоторой гладкой функции $z=f(x,y)$, то уравнение плоскости, касательной к этой поверхности в точке (x_0,y_0,z_0), где $z_0=f(x_0,y_0)$, таково:

$$z-z_0=z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{13.13}$$

Вектор $(z'_x(x_0,y_0),z'_y(x_0,y_0),-1)$ является вектором нормали к графику функции z в точке (x_0,y_0,z_0).

Если гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$ (т. е. представляет собой множество решений данного уравнения), то уравнение плоскости, касательной к этой поверхности в точке (x_0,y_0,z_0), где $F(x_0,y_0,z_0)=0$, имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0, \tag{13.14}$$

а вектор нормали совпадает с градиентом функции F в точке (x_0, y_0, z_0).

Если гладкая поверхность задана параметрически, т. е. как образ открытой области в $\mathbb{R}^2$ при некотором невырожденном отображении $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то уравнение касательной к такой поверхности в точке $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$ задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{13.15}$$

Канонический вид уравнения плоскости получается при разложении определителя по первой строке. Вектор нормали равен

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}, \tag{13.16}$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы канонического базиса и имеется в виду разложение определителя по первой строке.

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, т. е. отображение, действующее из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$, то $(x'(t), y'(t), z'(t))$ — вектор, касательный к кривой $(x(t), y(t), z(t))$ в точке $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Уравнение касательной прямой можно записать так:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}, \tag{13.17}$$

или, в параметрическом виде, так:

$$x = x_0 + x'(t_0)t, \quad y = y_0 + y'(t_0)t, \quad z = z_0 + z'(t_0)t, \quad t \in \mathbb{R},$$

а уравнение нормальной плоскости — так:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

13.19. Задачи. 1. Написать уравнения касательной плоскости в указанных точках к поверхностям:

(1) $z = x^2 + y^2$, $x = 1$, $y = 2$; **(2)** $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $x = 1$, $y = 1$;

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $(3, 4, -12)$; **(4)** $xy^2 + z^3 = 12$, $(1, 2, 2)$;

(5) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, $(3, 5, 9)$;

(6) $x = u$, $y = u^2 - 2uv$, $z = u^3 - 3u^2v$, $(1, 3, 4)$.

2. Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей в данных точках к кривым:

(1) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ при $t = \pi/4$;

(2) $y = x$, $z = x^2$ при $x = 1$.

13.20. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. При каждом фиксированном $v \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим функцию $\varphi : x \to df(x)(v)$. Если эта функция дифференцируема в точке $x \in \Omega$, то значение ее дифференциала $d\varphi(x)(v)$ на векторе v называют *вторым дифференциалом функции f в точке x* (на векторе v) и обозначают символом $d^2 f(x)(v)$ Легко найти, что

$$d^2 f(x)(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) v_i v_j,$$

или, в функциональной записи,

$$d^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx_i dx_j. \tag{13.18}$$

Считая функцию f такой, что смешанные производные второго порядка не зависят от порядка следования переменных дифференцирования, для функции $f(x, y)$ двух переменных (опуская даже указание точки (x, y)) имеем

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2, \tag{13.19}$$

а для функции $f(x, y, z)$ трех переменных будет

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2f''_{xy} dxdy + 2f''_{xz} dxdz + 2f''_{yz} dydz. \tag{13.20}$$

Индуктивно определяются дифференциалы более высоких порядков. Символической формулой дифференциал порядка k выражается так:

$$d^k f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^k f(x), \tag{13.21}$$

которую надо воспринимать так: мы раскрываем скобки в правой части, однако то, что относится к взятию производных, понимается как порядок и перечень переменных, по которым берутся производные (а не степень), а множители dx_i возводятся в соответствующие степени и перемножаются. После этого к открытым операциям взятия частных производных ставится функция $f(x)$, в результате чего получается конкретное равенство, выражающее дифференциал порядка k функции f в точке x. Проделав сказанное, запишем формулу (13.21) для функции $f(x, y)$ двух переменных в виде

$$d^k f(x, y) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x, y) dx^{k-i} dy^i. \tag{13.22}$$

Для нахождения дифференциала второго порядка надо найти все частные производные второго порядка и сделать одну из записей вида (13.18)–(13.20) соответственно числу переменных у функции.

13.21. Задачи. Найти вторые дифференциалы следующих функций:

(1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; **(2)** $f(x, y, z) = xy + yz + zx$;
(3) $u(x, y) = f(x + y, x - y)$; **(4)** $u(x, y, z) = f(x + y, z)$.

13.22. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в каждой точке области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет непрерывные частные производные до порядка m. Пусть x — фиксированная точка области Ω. Тогда справедлива *формула Тейлора с локальным остаточным членом в форме Пеано* (*локальная формула Тейлора*)

$$f(x+h) = f(x)+df(x)(h)+\frac{1}{2!}d^2 f(x)(h)+\dots+\frac{1}{m!}d^m f(x)(h)+\alpha(h)\|h\|^m, \tag{13.23}$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $\|h\| \to 0$, выражающая разложение функции f по степеням приращения h аргумента функции вблизи точки x. Если $x = 0$, то формулу Тейлора называют *формулой Маклорена.*

Запишем формулу (13.23) в другом виде. Пусть теперь $x_0 \in \Omega$ — фиксированная точка, а $x \in \Omega$ — переменная точка. В этом случае приращение выражается так: $h = x - x_0$, и мы, переписав равенство (13.23), получим вид формулы Тейлора, выражающий *разложение $f(x)$ по степеням $x - x_0$* для функции f в точках x, близких к фиксированной точке x_0:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0)(x - x_0) + \dots \\ + \frac{1}{m!}d^m f(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|^m, \end{aligned} \tag{13.24}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Перепишем формулу (13.24) для функции двух переменных с использованием формулы (13.22):

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(x-x_0)^{k-i}(y-y_0)^i+o(\rho^m),\quad(13.25)$$

где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $x\to x_0$, $y\to y_0$.

Запишем формулу Тейлора для функции $f(x,y)$ двух переменных, ограничившись третьим порядком, но повысив степень подробности записи и выделяя группы, соответствующие каждой степени переменных:

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=f(x_0,y_0)+(f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0))\\
&+\frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2)\\
&+\frac{1}{6}(f'''_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3+3f'''_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)\\
&+3f'''_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2+f'''_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3)\\
&+o\Big(\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^3}\Big),\quad x\to x_0,\ y\to y_0,\quad(13.26)
\end{aligned}$$

где $o\Big(\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^3}\Big)=\alpha(x,y)\cdot\Big(\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^3}\Big)$ с $\alpha(x,y)\to 0$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$.

13.23. Пример. Разложим по формуле Тейлора до второго порядка включительно функцию $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x/y)$ в окрестности точки $(1,1)$. Для решения поставленной задачи надо найти частные производные до второго порядка в точке $(1,1)$ и записать в нашем конкретном случае формулу (13.25) (или часть формулы (13.26) до второго порядка). Займемся производными:

$$f'_x(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2},\quad f'_y(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2},\quad f''_{xx}(x,y)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad f''_{yy}(x,y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$f'_x(1,1)=\frac{1}{2}$, $f'_y(1,1)=-\frac{1}{2}$, $f''_{xx}(1,1)=-\frac{1}{2}$, $f''_{xy}(1,1)=0$, $f''_{yy}(1,1)=\frac{1}{2}$, а теперь запишем разложение:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2).$$

13.24. Задачи. 1. Разложить по формуле Тейлора функцию f в окрестности заданной точки:

(1) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$, $(1,2)$;

(2) $f(x,y,z) = xyz$, $(1,2,3)$;

2. Выписать формулу Тейлора до второго порядка включительно для функции f в окрестности заданной точки:

(1) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$, $(2,1)$; **(2)** $f(x,y) = \sin x \cos y$, (x_0, y_0).

3. Разложить по формуле Маклорена до второго порядка функцию f:

(1) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$; **(2)** $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1+y}$.

4. Разложить по степеням h, k функцию

$$\Delta_{xy} f(h,k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$$

до второго порядка.

13.25. Ответы. 13.2. (1) $f'_x = \sin(x+y) + x\cos(x+y)$, $f'_y = x\cos(x+y)$; (2) $f'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$; (3) $f'_x = \frac{|y|}{x^2+y^2}$, $f'_y = -\frac{x \operatorname{sign} y}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$; (4) $\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $\frac{3y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $x^2+y^2 \neq 0$.

13.5. 1. (1) Недифференцируема при $y = -x$; (2) недифференцируема при $xy = 0$; (3) дифференцируема всюду; (4) недифференцируема в точке $(0,0)$. **5.** r. **6.** $r^2 \cos\psi$.

13.7. 1. (1) -4, (2) $\sin y \cos(x + \cos y)$.

13.14. (1) $du = f' \cdot \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (2) $du = \left(yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2\right)dx + \left(xf'_1 - \frac{x}{y^2}f'_2\right)dy$; (3) $du = f'_1\,dx + f'_1\,dy + f'_2\,dz$; (4) $du = (f'_1 + 2xf'_2)\,dx + (f'_1 + 2yf'_2)\,dy + (f'_1 + 2zf'_2)\,dz$; (5) $du = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2 f'_3)\,dt$; (6) $du = \frac{1}{y}f'_1\,dx - \left(\frac{x}{y^2}f'_1 - \frac{1}{z}f'_2\right)dy - \frac{y}{z^2}f'_2\,dz$;

13.17. (1) $1 - \sqrt{3}$; (2) $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$; (3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; (4) $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$.

13.19. 1. (1) $2x + 4y - z - 5 = 0$; (2) $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-y)$; (3) $3x + 4y - 12z = 169$; (4) $x + y + 3z = 9$; (5) $12x - 9y + 2z = 9$; (6) $6x + 3y - 2z = 7$. **2.** (1) $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$, $y = \frac{b}{2}$; $ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$; (2) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $x + y + 2z = 4$.

13.21. (1) $d^2u = \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; (2) $d^2u = 2(dxdy + dydz + dzdx)$; (3) $d^2u = f''_{11}(dx+dy)^2 + 2f''_{12}(dx^2 - dy^2) + f''_{22}(dx-dy)^2$; (4) $d^2u = f''_{11}(dx+dy)^2 + 2f''_{12}(dx+dy)dz + f''_{22}dz^2$.

13.24. **1.** (1) $f(x,y) = -9 + 9(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2 + (x-1)^3 - 2(y-2)^3$; (2) $f(x,y,z) = 6 + 6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3) + 3(x-1)(y-2) + 2(x-1)(z-3) + (y-2)(z-3) + (x-1)(y-2)(z-3)$; **2.** (1) $f(x,y) = 1 - (x-2) + (y-1) + (x-2)^2 - 2(x-2)(y-1) + (y-1)^2$; (2) $f(x,y) = \sin x_0 \cos y_0 + \cos x_0 \cos y_0 (x-x_0) - \sin x_0 \sin y_0 (y-y_0) - \frac{1}{2}\sin x_0 \cos y_0 (x-x_0)^2 - \cos x_0 \sin y_0 (x-x_0)(y-y_0) - \frac{1}{2}\sin x_0 \cos y_0 (y-y_0)^2$. **3.** (1) $f(x,y) = 1 - \frac{x^2-y^2}{2} + o(x^2+y^2)$; (2) $f(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2} - \frac{x^2-y^2}{4} + o(x^2+y^2)$. **4.** $\Delta_{xy} f(h,k) = f''_{12}(x,y)hk$.