14. Экстремум

14.1. Рассмотрим функцию f, действующую из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Точку $a \in D(f)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, называют *точкой локального максимума* (*минимума*) функции f, если существует такая окрестность U точки a, что $f(x) \leqslant f(a)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(a)$) для всех $x \in U \cap D(f)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Если для $x \in U \cap D(f)$ выполняется строгое неравенство $f(x) < f(a)$ (соответственно $f(x) > f(a)$), то говорят, что a — *точка строгого локального максимума* (*минимума*). Если a — либо точка локального минимума, либо точка локального максимума, то говорят, что a — *точка* (локального) *экстремума* функции f.

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума). *Пусть a — внутренняя точка области определения $D(f)$ функции f, и пусть f дифференцируема в точке a. Тогда если a — точка локального экстремума, то*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14.1}$$

Внутренние точки из $D(f)$, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называют *стационарными точками* функции f.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). *Пусть f — функция класса $C^2(\Omega)$ на открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $a \in \Omega$ — стационарная точка функции f. Если квадратичная форма*

$$d^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{14.2}$$

(от переменных dx_i, dx_j) знакоопределенная, то a — точка строгого локального экстремума, а именно максимума, если $d^2 f(a)$ определенно отрицательна, и минимума, если определенно положительна. Если $d^2 f(a)$ знаконеопределенная, то в точке a экстремума нет.

Если $d^2 f(a)$ полуопределенная (т. е. она принимает значения одного знака, но может обращаться в нуль на ненулевых значениях переменных), то второй дифференциал не позволяет судить о свойствах функции f, связанных с экстремумом в точке a.

Для выяснения знакоопределенности квадратичной формы можно использовать критерий Сильвестра.

Утверждение. *Пусть*

$$l = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

— *квадратичная форма от переменных* u_i, u_j. *Тогда* l *определенно положительная в том и только в том случае, если строго положительны все главные (диагональные) миноры матрицы* (a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$.

Условия определенной отрицательности квадратичной формы l получаются из приведенного утверждения применением его к форме $-l$. А именно, квадратичная форма определенно отрицательна, если ее главные миноры меняют знак, начиная с отрицательного.

14.2. Пример. Найдем точки локального экстремума функции

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

Составим систему уравнений

$$f'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \quad f'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \quad f'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0$$

для нахождения стационарных точек, из которой находим единственную в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ стационарную точку $a(1/2, 1, 1)$. Найдем теперь вторые производные функции f и затем их значения в точке a:

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad f''_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad f''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3},$$

$$f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = -\frac{2z}{y^2},$$

$$f''_{xx}(a) = 4, \quad f''_{yy}(a) = 3, \quad f''_{zz}(a) = 6, \quad f''_{xy}(a) = -2, \quad f''_{yz}(a) = -2.$$

Матрица квадратичной формы $d^2 f(a)$ такова:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

и ее главные миноры равны соответственно 4, 8, 32. Значит, $d^2 f(a)$ определенно положительна и a — точка локального минимума функции f, при этом $f(1/2, 1, 1) = 4$.

14.3. Задачи. 1. Исследовать на экстремум следующие функции:

(1) $u(x, y) = 3x^2 y + y^3 - 12x - 15y + 3$;

(2) $u(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

(3) $u(x,y) = \dfrac{x+y}{xy} - xy$; **(4)** $u(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$;

(5) $u(x,y,z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$;

(6) $u(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$;

2. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x,y)$, заданную неявно условиями:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z + 8 = 0$, $z > 2$;

(2) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$, $z > 2$.

3. Исследовать на строгий экстремум каждую из функций $z = z(x,y)$, заданную неявно уравнением:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$;

(2) $x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0$.

14.9. Ответы. 14.3. (1) минимум $u(1,2) = -25$, максимум $u(-1,-2) = 31$; (2) минимум $u(0,0) = 0$, максимум $u(-5/3,0) = 125/27$; (3) максимум $u(-1,-1) = -3$; (4) минимум $u(4,2) = 6$; (5) максимум $u(-3,2,-1) = 22$; (6) минимум $u(6,-18,2) = -112$; **(2)** максимум $z(3,-1) = 13/3$. **3. (1)** Минимум $z_1(-1,1) = -5$, максимум $z_2(-1,1) = 1$; **(2)** минимум $z_1(-1,2) = 1$, максимум $z_2(-1,2) = -2$.