§ 15. Теоремы о неявном отображении и об обратном отображении

15.1. Теорема 1 (о неявном отображении). *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, и F — действующее в $\mathbb{R}^n$ отображение класса $C^1(G, \mathbb{R}^n)$, т. е. имеющее непрерывные частные производные первого порядка в точках из G. Пусть точка*

$$(x_0, y_0) \in G, \quad x_0 = \big(x_1^0, \dots, x_m^0\big), \quad y_0 = \big(y_1^0, \dots, y_n^0\big),$$

такова, что $F(x_0, y_0) = 0$. Предположим, что F невырожденное в точке (x_0, y_0), при этом якобиан $\det \dfrac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(x_0, y_0)$ отличен от нуля. Тогда существуют такие открытые окрестности U точки x_0 и V точки y_0, что $U \times V \subset G$ и для любого $x \in U$ существует единственное $y \in V$, обладающее свойством $F(x, y) = 0$. Тем самым, сопоставляя каждому $x \in U$ соответствующее ему $y \in V$, получаем отображение $y = \varphi(x)$, о котором говорят, что оно вблизи точки (x_0, y_0) неявно задается отображением F. При этом $\varphi \in C^1(U, V)$, а если $F \in C^r(G, \mathbb{R}^n)$, то $\varphi \in C^r(U, V)$.

Обратим внимание на то, что функция φ характеризуется тождеством

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad x \in U. \tag{15.1}$$

Производные функции φ находятся в результате дифференцирования этого равенства по координатам точки x и выражения из получаемых равенств требуемых производных. При выражении производных отображения φ в знаменателе оказывается тот самый якобиан, отличие от нуля которого предусмотрено в условии теоремы.

Отметим еще, что неявная функция φ действует в точности в те переменные, якобиан исходного отображения по которым отличен от нуля.

Важно иметь в виду, что отображение φ в теореме о неявном отображении задается локально и его производные вычисляются вблизи данной точки.

Теорема 2 (об обратном отображении). *Пусть f — гладкое отображение из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$, x — внутренняя точка области определения $D(f)$. Тогда если f регулярно в x, т. е. $\det \dfrac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$, то существуют такие окрестности V точки x и W точки $f(x)$, что f — диффеоморфизм V на W, т. е. гладкое взаимно однозначное отображение множества V на W, обратное к которому гладкое.*

15.2. Пример. Найдем производные y', y'' функции $y(x)$, определяемой уравнением $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Функция $y(x)$ определяется тождеством $y(x) - \varepsilon \sin y(x) = x$, которое продифференцируем по x:

$$y'(x) - \varepsilon \cos y(x) \cdot y'(x) = 1, \tag{15.2}$$

откуда

$$y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y(x)}$$

(поскольку нам предстоит дифференцировать еще раз, сохраняем указание аргумента у функции и производной). Продифференцируем равенство (15.2) еще раз:

$$y'' + \varepsilon \sin y \cdot (y')^2 - \varepsilon \cos y \cdot y'' = 0,$$

откуда

$$y'' = \frac{\varepsilon (y')^2 \sin y}{\varepsilon \cos y - 1} = \frac{\varepsilon \sin y}{(\varepsilon \cos y - 1)^3}.$$

Отметим, что производные в данной точке x зависят не только от аргумента x, но и от значения $y(x)$.

15.3. Пример. Найдем производную z'_x функции $z(x, y)$, определяемой системой равенств

$$x = u + \ln v, \quad y = v - \ln u, \quad z = 2u + v,$$

в точке (x, y), соответствующей значениям $u = 1$, $v = 1$.

Первые два уравнения при соответствующих условиях определяют функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, подставляя которые в третье, получаем равенство

$$z(x, y) = 2u(x, y) + v(x, y).$$

Отсюда $z'_x = 2u'_x + v'_x$. Производные u'_x, v'_x найдем из тождеств

$$x = u(x, y) + \ln v(x, y), \quad y = v(x, y) - \ln u(x, y)$$

путем их дифференцирования:

$$1 = u'_x + \frac{1}{v} v'_x, \quad 0 = v'_x - \frac{1}{u} u'_x,$$

откуда

$$u'_x = \frac{uv}{1 + uv}, \quad v'_x = \frac{v}{1 + uv}$$

и, в частности, при $u = v = 1$ будет $u'_x = v'_x = 1/2$ и $z'_x = 2u'_x + v'_x = 3/2$.

15.4. Пример. Найдем производную u' функции $u = u(x)$, определяемой системой равенств

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0.$$

Последние два равенства выражают обращение в нуль отображения F из $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, где $F(x, y, z) = (g(x, y, z), h(x, y, z))$. Согласно теореме о неявном отображении этими равенствами определяется отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ с некоторыми координатными функциями $y(x)$, $z(x)$. Их производные найдем из системы

$$g(x, y(x), z(x)) = 0, \quad h(x, y(x), z(x)) = 0,$$

продифференцировав ее:

$$g'_x + g'_y y' + g'_z z' = 0, \quad h'_x + h'_y y' + h'_z z' = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{g'_z h'_x - g'_x h'_z}{g'_y h'_z - g'_z h'_y}, \quad z' = \frac{g'_x h'_y - g'_y h'_x}{g'_y h'_z - g'_z h'_y}.$$

Производную u' найдем из равенства $u(x) = f(x, y(x), z(x))$, так что $u' = f'_x + f'_y y' + f'_z z'$, где y', z' найдены выше.

15.5. Задачи. 1. Найти y', y'' для функций $y(x)$, определяемых уравнениями

(1) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$, **(2)** $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

2. Найти z'_x и z'_y в точке $(1, -2)$ для каждой дифференцируемой функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

3. Для функции $z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если
(1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, **(2)** $z^3 - 3xyz = a^3$.

4. Найти z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, если

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

5. Найти z'_x, если $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

6. Найти z'_x, z'_y, z''_{xx}, если $F(x, x + y, x + y + z) = 0$.

7. Пусть $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ — функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

8. Найти $x'(z)$, $y'(z)$, если $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$.

9. Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, если $xu-yv=0$, $yu+xv=1$.

10. Найти z''_{xy}, в точке $u=2$, $v=1$, если

$$x=u+v^2, \quad y=u^2-v^3, \quad z=2uv.$$

11. Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, если

$$x=e^u+u\sin v, \quad y=e^u-u\cos v.$$

12. Найти дифференциал dz функции $z(x,y)$, определяемой из системы

$$f(x,y,z,t)=0, \quad g(x,y,z,t)=0.$$

15.6. Ответы. 15.5. 1. (1) $y'=-\frac{x+y}{x-y}$, $y''=\frac{2a^2}{(x-y)^3}$, (2) $y'=\frac{x+y}{x-y}$, $y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; **2.** $z'_x=0$, $z'_y=-1$, если $z(1,-2)=0$; $z'_x=-1$, $z'_y=1/2$, если $z(1,-2)=-2$; $z'_x=1$, $z'_y=1/2$, если $z(1,-2)=2$; **3.** (1) $z'_x=-\frac{x}{z}$, $z'_y=-\frac{y}{z}$, $z''_{xx}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}$, $z''_{xy}=-\frac{xy}{z^3}$, $z''_{yy}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$; (2) $z'_x=\frac{yz}{z^2-xy}$, $z'_y=\frac{xz}{z^2-xy}$, $z''_{xx}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$, $z''_{yy}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$, $z''_{xy}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$; **4.** $z''_{xx}=-\frac{2}{5}$, $z''_{xy}=-\frac{1}{5}$, $z''_{yy}=-\frac{394}{125}$; **5.** $z'_x=-\frac{F'_1+2xF'_2}{F'_1+2zF'_2}$; **6.** $z'_x=-\left(1+\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}\right)$, $z'_y=-\left(1+\frac{F'_2}{F'_3}\right)$, $z''_{xx}=-F_3'^{-3}\left(F_3'^2\left(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22}\right)-2\left(F'_1+F'_2\right)F'_3\left(F''_{13}+F''_{23}\right)+\left(F'_1+F'_2\right)^2F''_{33}\right)$; **8.** $x'=\frac{y-z}{x-y}$, $y'=\frac{z-x}{x-y}$; **9.** $u'_x=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $v'_x=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $u'_y=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $v'_y=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$; **10.** $z''_{xy}=\frac{26}{121}$; **11.** $u'_x=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$, $u'_y=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$, $v'_x=\frac{-(e^u-\cos v)}{u(e^u(\sin v-\cos v)+1)}$, $v'_y=\frac{e^u+\sin v}{u(e^u(\sin v-\cos v)+1)}$; **12.** $dz=-\frac{I_1\,dx+I_2\,dy}{I_3}$, где $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$.