§ 16. Криволинейные координаты. Замена переменных в дифференциальных выражениях

16.1. Математическое описание какого-либо процесса нередко сопровождается выделением набора числовых его характеристик и заданием некоторой числовой величины, характеризующей процесс. Иначе говоря, такое описание приводит к фиксации конечномерного арифметического пространства и заданию (числовой) функции на некоторой его открытой области. Пусть переменные этого пространства обозначены через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а функция — через $f(x)$. Как правило, в описании процесса большую роль играет не только сама функция, но и скорость ее изменения по тем или иным координатным направлениям, т. е. частные производные функции. Не всегда координатные направления в рамках выбранных переменных x обеспечивают сравнительно простые свойства скорости изменения функции, т. е. не всегда приводят к несложным соотношениям (как правило уравнениям) относительно частных производных. И тогда можно попробовать посмотреть, как изменяется функция вдоль других линий.

Для формирования подходящего математического аппарата заметим, что положение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ точки x можно описать так. Фиксируем какую-то одну из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а остальные оставим меняющимися. Множество таких точек образует некоторую координатную (гипер)плоскость в $\mathbb{R}^n$. Тогда наша точка x может быть охарактеризована как точка, находящаяся на пересечении всех этих плоскостей.

Предположим, что мы хотим использовать другой набор чисел $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ для описания положения той же самой точки. Естественно, что он должен быть связан с исходным набором $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ некоторой зависимостью. Иначе говоря, предположим, что на открытой области Ω изменения переменной u задано взаимно однозначное отображение Φ такое, что $x = \Phi(u)$. Расположение точки x на пересечении плоскостей $x_k = \mathrm{const}$ можно в терминах u описать как расположение этой точки на пересечении поверхностей $\{x : x = \Phi(u), u_k = \mathrm{const}\}$, т. е. на этот раз на пересечении множеств, не являющихся плоскими (с точки зрения переменных x). Исходя из такой возможности, набор чисел $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ называют *криволинейными координатами точки* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, говоря при этом о самих $x_1, x_2, \dots, x_n$ как о *исходных* или *канонических координатах.*

Допустим, что рассматриваемый процесс был описан каким-то уравнением, в котором участвовала функция $y = f(x)$, а также ее производные до порядка k, т. е. уравнением $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$, где F — некоторая достаточно гладкая функция, а $y', y'', \dots, y^{(k)}$ — частные производные функции y по каким-то наборам переменных. Пусть мы вводим новые переменные u, связанные со старыми переменными x зависимостью $x = \Phi(u)$ или зависимостью $u = \Psi(x)$. Естественно ставится задача: используя формулу перехода между переменными, узнать, в какое уравнение относительно новых переменных преобразуется имевшееся уравнение?

Предположим, что выбрана связывающая точки x и u зависимость $x = \Phi(u)$, $u \in \Omega$, где Ω — открытая область изменения переменной u, или $u = \Psi(x)$, $x \in Q$, где Q — открытая область изменения переменной x. Точки, переходящие друг в друга при заданной зависимости и обратной к ней, будем называть *соответственными*. Пусть задана функция $y = f(x)$. Перенесем эту функцию в область изменения переменной u, полагая, что *значения вновь определяемой функции $w = g(u)$ и старой функции $y = f(x)$ в соответственных точках совпадают*, т. е. что выполнено равенство

$$f(\Phi(u)) = g(u), \quad u \in \Omega, \tag{16.1}$$

если задана зависимость $x = \Phi(u)$ между координатами x, u, и равенство

$$g(\Psi(x)) = f(x), \quad x \in Q, \tag{16.2}$$

при заданной зависимости $u = \Psi(x)$. Этой договоренностью мы фиксируем некоторое тождество на открытом множестве соответствующего пространства, позволяющее не только пересадить функцию с одних переменных на другие, но при достаточной гладкости и невырожденности участвующих в рассмотрении функций и отображений (что всегда нами будет предполагаться без дополнительных оговорок) выразить производные одной из функций через производные и значения другой из них. Для такого выражения достаточно продифференцировать определяющее замену тождество, из получаемых при этом равенств выразить производные старой функции и подставить их выражения в соотношение (как правило, это уравнение), характеризующее старую функцию.

Подчеркнем, что в примерах при $n = 2$ или $n = 3$ вместо обозначения x_1, x_2 или x_1, x_2, x_3 для координат точки мы будем использовать привычные буквы x, y или соответственно x, y, z. Для криволинейных координат чаще всего будем использовать буквы u, v, w или иногда греческие ξ, η, ζ

Напомним, что в $\mathbb{R}^2$ одни из самых распространенных криволинейных координат — это *полярные координаты* r, φ, связь которых с каноническими координатами x, y осуществляется по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. В пространстве $\mathbb{R}^3$ часто используют *сферические* координаты r, φ, ψ, связанные с x, y, z формулами

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$
$$r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \psi \in (-\pi/2, \pi/2),$$

или сферические координаты r, φ, θ такие, что

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$
$$r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \theta \in (0, \pi).$$

16.2. Пример. Преобразуем уравнение $x^2y'' + xy' + y = 0$, вводя новую переменную t, связанную с переменной x равенством $x = e^t$. Обозначим новую функцию, получаемую переносом функции $y(x)$ в область переменной t, через w и запишем равенство, выражающее совпадение старой и новой функций в соответственных точках. Согласно нашей договоренности должно быть $y(x) = w(t)$ для таких x и t, что $x = e^t$. Подставляя в выписанное выше равенство на место x его выражение через t, мы приходим к тождеству, полностью определяющему новую функцию:

$$y(e^t) = w(t) \tag{16.3}$$

Продифференцируем его по t:

$$y'(e^t)e^t = w'(t). \tag{16.4}$$

Мы указали точки, в которых взяты производные, для того, чтобы на следующем шаге при дифференцировании учесть все зависимости от t. Поскольку третьей производной брать в этом примере не требуется, в записи второй производной указание аргументов всюду опустим (для краткости). Дифференцируя равенство (16.4), имеем

$$y''e^{2t} + y'e^t = w''. \tag{16.5}$$

Выразим из равенств (16.4), (16.5) y', y'':

$$y' = w'e^{-t}, \quad y'' = (w'' - y'e^t)e^{-2t} = (w'' - w')e^{-2t}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, приходим к соответствующему ему уравнению относительно новой переменной и новой функции:

$$e^{2t}(w'' - w')e^{-2t} + e^t w' e^{-t} + w = 0,$$

или $w'' + w = 0$.

16.3. Пример. Преобразуем уравнение $yz'_x - xz'_y = 0$, вводя новые переменные ξ, η, связанные с переменными x, y равенствами $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$.

Запишем определяющее новую функцию $w = w(\xi, \eta)$ равенство, отразив в нем тот факт, что в точках $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$ значения новой и старой функций совпадают:

$$w(x, x^2 + y^2) = z(x, y).$$

Продифференцируем его по x и по y. Так как нам не требуется дифференцировать второй раз (в уравнении нет вторых производных), мы не будем записывать указание точек, в которых берутся соответствующие производные. Имеем

$$w'_\xi + w'_\eta \cdot 2x = z'_x, \quad w'_\eta \cdot 2y = z'_y.$$

Полученные для z'_x, z'_y выражения подставим в исходное уравнение, пока не занимаясь выражением старых переменных через новые и оставляя тем самым старые переменные в получаемом равенстве: $y \cdot w'_\xi + 2xyw'_\eta - 2xyw'_\eta = 0$, откуда приходим к уравнению $y \cdot w'_\xi = 0$. Ясно, что в области переменных ξ, η, соответствующей неравенству $y \neq 0$, т. е. в области, где $\eta \neq \xi^2$, уравнение становится таким: $w'_\xi = 0$. Этому уравнению будет удовлетворят произвольная гладкая функция $\varphi(\eta)$, зависящая только от η, так что решением этого уравнения будет функция $w(\xi, \eta) = \varphi(\eta)$. Возвращаясь к исходному уравнению, можно утверждать, что в области, где $y \neq 0$, его решением будет функция $z(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, где φ — произвольная гладкая функция.

16.4. Пример. Преобразуем уравнение $xz'_x + \sqrt{1 + y^2} z'_y = xy$, переходя к новым переменным $u = \ln x$, $v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Новая функция $w(u, v)$ будет связана со старой $z(x, y)$ выполнением равенства в соответствующих точках:

$$w(\ln x, \ln(y + \sqrt{1 + y^2})) = z(x, y). \tag{16.6}$$

Продифференцируем равенство (16.6) по x и по y:

$$w'_u \cdot \frac{1}{x} = z'_x, \quad w'_v \cdot \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = z'_y,$$

откуда, упрощая, имеем

$$z'_x = \frac{w'_u}{x}, \quad z'_y = \frac{w'_v}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Выражая x, y через u, v, т. е. $x = e^u$, $y = \operatorname{sh} v$, и подставляя все в исходное уравнение, приходим к уравнению $w'_u + w'_v = e^u \operatorname{sh} v$.

16.5. Задачи. 1. Перейти к новым переменным в следующих уравнениях:

(1) $y''' = \dfrac{6y}{x^3}$, $t = \ln|x|$;

(2) $(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$, $x = \cos t$.

2. Вводя новые переменные ξ, η, решить уравнения:

(1) $z'_x = z'_y$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$;

(2) $xz'_x + yz'_y = z$, $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{x}$.

3. Приняв u, v за новые переменные, преобразовать уравнения:

(1) $(x+y)z'_x - (x-y)z'_y = 0$, $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

(2) $(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 0$, $x = uv$, $y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$;

(3) $ax^2z''_{xx} + 2bxyz''_{xy} + cy^2z''_{yy} = 0$, $u = \ln x$, $v = \ln y$;

(4) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

(5) $x^2z''_{xx} - y^2z''_{yy} = 0$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$;

(6) $x^2z''_{xx} - (x^2+y^2)z''_{xy} + y^2z''_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

4^***.** С помощью линейной замены $\xi = x + \lambda y$, $\eta = x + \mu y$ преобразовать уравнение $Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} = 0$, где A, B, C — постоянные и $AC - B^2 < 0$, к виду $u''_{\xi\eta} = 0$.

5^***.** Доказать, что вид уравнения Лапласа $\Delta z = z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ не меняется при любой невырожденной замене переменных $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, удовлетворяющей условиям $\varphi'_u = \psi'_v$, $\varphi'_v = -\psi'_u$.

16.6. Выше мы рассмотрели такую замену переменных, при которой происходит замена независимых переменных, а значения функции в соответственных точках сохраняются. Теперь рассмотрим ситуацию, в которой может меняться всё — как независимые переменные, так и значения функции. Наша ближайшая задача — получить равенство, определяющее связь между старой и новой функциями и тем самым задающее новую функцию. Для этого обратимся к такой замене с точки зрения преобразования графиков функций. Как известно, график отображения $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, где X, Y — какие-то множества, это множество таких упорядоченных пар $(x, y) \in X \times Y$, для которых $y = f(x)$. Пусть задана функция $f(x)$ на некотором открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащем график функции f, задано достаточно гладкое невырожденное отображение Φ, взаимно однозначно отображающее это множество на множество $Q \in \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через Ψ обратное к Φ отображение. Точки, переходящие друг в друга при этих отображениях, будем называть *соответственными*. Ввиду гладкости и невырожденности Φ образ $\Phi[\mathrm{gr}(f)]$ графика $\mathrm{gr}(f)$ функции f будет (по крайней мере локально) графиком некоторой функции, действующей из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Исходя из этого, определим новую функцию w, считая, что *график функции f взаимно однозначно отображается на график функции w*. Не уменьшая общности, будем считать, что новая функция w действует из первых n переменных в последнюю.

Займемся составлением равенства, отражающего указанную выше договоренность и позволяющего выразить производные старой функции через производные новой. Обозначим точки старого $(n+1)$-мерного пространства через $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, а нового — $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$, Обозначим через $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n+1}$ координатные функции отображения Φ, а через $\Psi_1, \ldots, \Psi_{n+1}$ — отображения Ψ. Допустим, что задано отображение Φ, действующее из старых переменных в новые. Пусть $(x, f(x))$ — точка графика f. Ее образом является точка

$$(\Phi_1(x, f(x)), \ldots, \Phi_n(x, f(x)), \Phi_{n+1}(x, f(x))).$$

Согласно определению графика и нашей договоренности *последняя координата $\Phi_{n+1}(x, f(x))$ должна быть значением функции w на первых n координатах*, т. е.

$$\Phi_{n+1}(x, f(x)) = w(\Phi_1(x, f(x)), \ldots, \Phi_n(x, f(x)) \qquad (16.7)$$

Если же задано отображение Ψ, действующее из новых переменных в старые и $(u, w(u))$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, — точка графика новой функции, то образом ее при отображении Ψ будет точка

$$(\Psi_1(u,w(u)),\ldots,\Psi_n(u,w(u)),\Psi_{n+1}(u,w(u))).$$

Согласно определению графика и нашей договоренности *последняя координата $\Psi_{n+1}(u,w(u))$ должна быть значением функции f на первых n координатах*, т. е.

$$\Psi_{n+1}(u,w(u)) = f(\Psi_1(u,w(u)),\ldots,\Psi_n(u,w(u))) \tag{16.8}$$

Требуемые производные f'_{x_k}, $k=1,\ldots,n$, и т. д. могут быть найдены из равенств, получаемых в результате дифференцирования определяющего новую функцию равенства.

16.7. Пример. Преобразуем уравнение $y''+(x+y)(1+y')^3=0$, если $x=u+t$, $y=u-t$ и $u=u(t)$. Здесь задано отображение $(t,u)\mapsto(x,y)$, действующее из новых переменных в старые, так что новая функция $u=u(t)$ будет характеризоваться следующим обстоятельством: если взять точку $(t,u(t))$ графика новой функции, то ее образ, т. е. точка $(u(t)+t,u(t)-t)$, будет точкой графика функции $y=y(x)$, а это значит, что последняя координата $u(t)-t$ равна значению функции y на первой координате $u(t)+t$:

$$u(t)-t = y(u(t)+t). \tag{16.9}$$

Дифференцируя равенство (16.9) дважды, получаем

$$u'(t)-1 = y'(u(t)+t)\cdot(u'(t)+1), \quad u'' = y''(u'+1)^2+y'u''.$$

Из этих равенств имеем

$$y' = \frac{u'-1}{u'+1}, \quad y'' = \frac{u''(1-y')}{(u'+1)^2} = u''\frac{2}{(u'+1)^3}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, приходим к уравнению $u''+8u(u')^3=0$.

16.8. Пример. Решим уравнение $az'_x+bz'_y=1$, вводя новые переменные ξ,η, связанные со старыми равенствами $\xi=x$, $\eta=y-bz$.

Заметим, что замена определена только двумя равенствами, хотя в них участвуют не только переменные x,y, но и третья переменная z. В таких формулировках будем дополнять данное преобразование до отображения из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, считая, что *последняя координата остается неизменной*, т. е. происходит отображение $(x,y,z)\mapsto(\xi,\eta,\zeta)$, где $\xi=x$, $\eta=y-bz$, $\zeta=z$.

Обозначим новую функцию через w и выпишем равенство, ее определяющее. Точка графика $(x, y, z(x,y))$ функции z перейдет при нашем преобразовании в точку $(x, y - bz(x,y), z(x,y))$, и согласно договоренности эта точка должна быть точкой графика функции w, что означает выполнение равенства

$$z(x,y) = w(x, y - bz(x,y)). \tag{16.10}$$

Дифференцируя его по x и по y, находим

$$z'_x = w'_\xi + w'_\eta \cdot (-bz'_x), \quad z'_y = w'_\eta \cdot (1 - bz'_y),$$

откуда

$$z'_x = \frac{w'_\xi}{1 + bw'_\eta}, \quad z'_y = \frac{w'_\eta}{1 + bw'_\eta}.$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{aw'_\xi}{1 + bw'_\eta} + \frac{bw'_\eta}{1 + bw'_\eta} = 1,$$

или $aw'_\xi = 1$. Этому уравнению удовлетворяет функция $w = \dfrac{\xi}{a} + \varphi(\eta)$, где φ — произвольная гладкая функция. Вернувшись к переменным x, y, получим

$$z(x,y) = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz(x,y)).$$

16.9. Пример. Преобразуем уравнение $(x - z)z'_x + yz'_y = 0$, взяв x за функцию, а y, z — за независимые переменные. Такая формулировка означает, что надо перейти в уравнении к новым переменным u, v и функции $w(u,v)$, связанным со старыми соотношением $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, где $u = y$, $v = z$, $w = x$, т. е. тот факт, что x следует считать функцией, означает требование расположить x на последнем месте, оставив на первых двух переменные y и z. Запишем соотношение для преобразования точек графика: $(x, y, z(x,y)) \mapsto (y, z(x,y), x)$. Тем самым определяющее функцию w равенство таково:

$$x = w(y, z(x,y)) \tag{16.11}$$

Продифференцируем его по x и по y:

$$1 = w'_v \cdot z'_x, \quad 0 = w'_u + w'_v \cdot z'_y,$$

откуда

$$z'_x = \frac{1}{w'_v}, \quad z'_y = -\frac{w'_u}{w'_v}.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\frac{w-v}{w'_v}-\frac{uw'_u}{w'_v}=0,$$

или $uw'_u=v-w$. Это уравнение, записанное в переменных x,y,z, имеет вид $y\cdot x'_y=z-x$.

16.10. Пример. Преобразуем уравнение $yz''_{yy}+2z'_y=\dfrac{2}{x}$, принимая u,v за новые переменные, а $w(u,v)$ — за новую функцию, где переменные (x,y,z) и (u,v,w) связаны соотношениями $u=\dfrac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$. Точка графика $(x,y,z(x,y))$ функции z перейдет в точку $\left(\dfrac{x}{y},x,xz(x,y)-y\right)$, так что определяющее функцию w равенство таково:

$$xz(x,y)-y=w\left(\frac{x}{y},x\right). \tag{16.12}$$

Продифференцируем тождество (16.12) по y:

$$xz'_y(x,y)-1=w'_u\left(\frac{x}{y},x\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

и полученное равенство еще раз по y:

$$xz''_{yy}=w''_{uu}\frac{x^2}{y^4}+w'_u\frac{2x}{y^3}.$$

Отсюда

$$z'_y=\frac{1}{x}-\frac{w'_u}{y^2},\quad z''_{yy}=\frac{x}{y^4}w''_{uu}+\frac{2}{y^3}w'_u.$$

Подставляя в исходное уравнение, учитывая, что $x=v$, $y=\dfrac{v}{u}$, и проводя преобразования, приходим к уравнению $w''_{uu}=0$.

16.11. Задачи. 1. Преобразовать уравнения, вводя новые переменные:

(1) $x^4y''+xyy'-2y^2=0$, $x=e^t$, $y=ue^{2t}$, $u=u(t)$;

(2) $(1+x^2)^2y''=y$, $x=\operatorname{tg}t$, $y=\dfrac{u}{\cos t}$, $u=u(t)$.

2. Преобразовать к полярным координатам r,φ уравнение

$$(xy'-y)^2=2xy(1+(y')^2),$$

считая $r = r(\varphi)$.

3. Преобразовать уравнения

(1) $xz'_x + yz'_y = \dfrac{x}{z}$, $u = 2x - z^2$, $v = \dfrac{y}{z}$;

(2) $(x+z)z'_x + (y+z)z'_y = x + y + z$, $u = x + z$, $v = y + z$;

(3) $yz'_x - xz'_y = (y-x)z$, $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $w = \ln z - (x+y)$;

(4) $(xy + z)z'_x + (1 - y^2)z'_y = x + yz$, $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$;

(5) $z''_{xy} = (1 + z'_y)^3$, $u = x$, $v = y + z$;

(6) $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x}$, $w = \dfrac{z}{x}$;

4. Преобразовать уравнение $(y-z)z'_x + (y+z)z'_y = 0$, приняв x за функцию, а $u = y - z$, $v = y + z$ за независимые переменные.

5. Показать, что уравнение $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$ не меняет своего вида при замене переменных $u = x + z$, $v = y + z$.

16.12. Ответы. 16.5. 1. (1) $y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t - 6y = 0$; (2) $y''_{t^2} + n^2 y = 0$. **2.** (1) $z = \varphi(x+y)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция; (2) $z = x\varphi\big(\frac{y}{x}\big)$. **3.** (1) $z'_u = z'_v$; (2) $(z'_u)^2 + (z'_v)^2 = 0$; (3) $a\big(z''_{u^2} - z'_u\big) + 2bz''_{uv} + b\big(z''_{v^2} - z'_v\big) = 0$; (4) $z''_{u^2} + z''_{v^2} = 0$; (5) $z''_{uv} = \frac{1}{2u} z'_v$; (6) $z''_{uv} = \frac{2}{u(4-uv)} z'_v$.

16.11. 1. (1) $u''_{t^2} + (u+3)u'_t + 2u = 0$; (2) $u''_{t^2} = 0$. **2.** $(r')^2 = \frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2$. **3.** (1) $z'_v = \frac{z}{v}\frac{z^2+u}{z^2-u}$; (2) $(2u+v-z)z'_u + (u+2v-z)z'_v = u+v-z$; (3) $w'_v = 0$; (4) $w_v = 0$; (5) $(1 - z'_v)z''_{uv} + z'_v z''_{v^2} = 1$; (6) $w''_{v^2} = 0$; **4.** $x'_u + x'_v = \frac{u}{v}$.