## § 17. Условный экстремум

**17.1.** Обратимся к рассмотрению нахождения условного (говорят также относительного) экстремума. Задача нахождения условного экстремума состоит в поиске локальных максимумов и минимумов функции при условии, что рассматриваются при сравнении со значением в данной точке не все точки из окрестности данной, а только те, которые подчинены некоторым условиям (т. е. экстремума относительно некоторого множества, включающего данную точку).

Пусть дана функция $f(x)$, действующая из открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Пусть, кроме того, даны $k$ функций $h_1(x), \dots, h_k(x)$, $1 \leqslant k < n$, заданных на $\Omega$. Обозначим через $Q$ множество точек $x \in \Omega$, являющихся решениями системы уравнений $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$, называемых иногда *условиями связи* (имеется в виду переменных). Точку $x_0 \in \Omega$ называют *точкой условного максимума* (*минимума*) *функции* $f$ *относительно множества* $Q$ (или *при условии выполнения связей* $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$), если существует такая ее окрестность $U$, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$) для всех $x \in U \cap Q$, т. е. для всех $x \in U$, удовлетворяющих условиям $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$. Если в сравнении значений $f(x)$ и $f(x_0)$ неравенство строгое, то говорят о *строгом условном* (*относительном*) *максимуме или минимуме.* Если в данной точке есть либо относительный максимум, либо относительный минимум, то такую точку называют *точкой относительного экстремума.*

Всюду далее будем предполагать, что функции $f$ и $h_1(x), \dots, h_k(x)$ гладкие, т. е. имеют непрерывные частные производные по всем переменным $x_1, \dots, x_n$, и, кроме того, система функций $h_1, \dots, h_k$ обладает свойством невырожденности на множестве $Q$, т. е. ранг матрицы Якоби $\dfrac{\partial(h_1, \dots, h_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ равен $k$ во всех точках множества $Q$.

**Теорема 1** (необходимое условие относительного экстремума). *Пусть $x \in \Omega$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, — точка экстремума функции $f$ при условиях*

$$h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0. \tag{17.1}$$

*Тогда найдутся такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, что функция Лагранжа*

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i(x_1, \dots, x_n)$$

*имеет в точке $x$ нулевые частные производные по переменным $x_1, \dots, x_n$.*

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ называют *множителями Лагранжа.*

Тем самым для нахождения $n$ координат точки $x$, в которой возможен условный экстремум, и $k$ множителей Лагранжа в нашем распоряжении есть $k+n$ уравнений

$$h_1(x) = 0, \ldots, h_k(x) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0. \tag{17.2}$$

**Теорема 2** (достаточное условие относительного экстремума). *Предположим, что функции $f, h_1, \ldots, h_k$ дважды гладкие в $\Omega$, т. е. имеют в каждой точке из $\Omega$ непрерывные частные производные второго порядка по всем переменным. Предположим также, что в точке $x \in \Omega$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, такой, что $h_1(x) = 0, \ldots, h_k(x) = 0$, выполнены необходимые условия экстремума, т. е.*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

*Составим квадратичную форму*

$$d^2L(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{17.3}$$

*(от переменных $dx_i$, $dx_j$) и рассмотрим ее сужение на подпространство $H \subset \mathbb{R}^n$, ортогональное градиентам $\nabla h_1(x), \ldots, \nabla h_k(x)$. Тогда если $d^2L(x)$, рассматриваемая только на $H$, знакоопределенная, то $x$ — точка строгого относительного экстремума, а именно строгого максимума в случае определенно отрицательной и строгого минимума для определенно положительной квадратичной формы.*

Технически для нахождения сужения квадратичной формы $d^2L(x)$ от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ в стационарной точке $x$ на подпространство $H$ надо составить систему уравнений

$$\langle \nabla h_1(x) | dx \rangle = 0, \ldots, \langle \nabla h_k(x) | dx \rangle = 0, \tag{17.4}$$

где $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, т. е. систему

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{17.5}$$

выразить $n-k$ переменных через оставшиеся и, подставив их в $d^2L(x)$, получить второй дифференциал только на подпространстве $H$.

В тех случаях, когда есть возможность выразить часть переменных в количестве, равном числу условий связи, через остальные переменные, можно воспользоваться таким выражением. Для этого получаемые выражения надо подставить в функцию, получить обычную функцию нескольких переменных (их число равно разности между числом переменных и числом уравнений связи) и исследовать обычный экстремум этой функции. Такой путь нередко приемлем при одном условии связи и несложном выражении одной из переменных через остальные.

Можно воспользоваться заданием множества, описываемого условиями связи, через параметры и переносом функции в пространство параметров. В случае $n$-мерного пространства и $k$ условий связи для описания указанного множества потребуется $n-k$ параметров. Этим ресурсом удобно пользоваться в том случае, если параметризация достаточно прозрачна.

**17.2. Пример.** Изучим экстремум функции $z = xy$ при условии $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, т. е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Из системы

$$L'_x = y + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

находим $\lambda = \dfrac{1}{2}$ и $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а также $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ и $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Изучим подробно задачу для одного из найденных значений $\lambda$ и одной из точек, удовлетворяющих при выбранном $\lambda$ необходимым условиям, другие случаи разбираются аналогично. Пусть $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем

$$L''_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad L''_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = L''_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\lambda = 1.$$

Таким образом,

$$d^2L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(dx,dy) = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = (dx+dy)^2.$$

Эта квадратичная форма полуопределенная на $\mathbb{R}^2$ — она принимает неотрицательные значения и обращается в нуль на прямой $dx = -dy$. Если бы мы получили форму, знакоопределенную на всем $\mathbb{R}^2$, то далее нам ничего делать не надо было — она была бы знакоопределенной и на требуемом подпространстве, откуда мы могли бы сделать заключение о наличии условного экстремума. Но наша ситуация не такая, и нам придется заниматься сужением второго дифференциала на подпространство, ортогональное градиенту $\nabla h(x,y) = (2x, 2y)$ функции $h(x,y) = x^2+y^2-1$ в точке $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Такое подпространство представляет собой прямую

$$\{(dx, dy) : dx \cdot \sqrt{2} - dy \cdot \sqrt{2} = 0\}.$$

Выражая, например, $dy$ через $dx$ и подставляя полученное выражение в $d^2L\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, получаем $d^2L\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{dy=dx} = (2dx)^2$, и поскольку полученная квадратичная форма (уже от одной переменной) определенно положительна, в точке $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ достигается минимум функции $z = xy$ относительно множества $x^2 + y^2 = 1$.

**17.3. Пример.** Изучим экстремум функции $u(x,y) = x^2 - y^2$ при условии $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Из системы

$$L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = -2y + 2\lambda y = 0$$

находим $\lambda = 1$ и $x = 0$, $y = \pm 1$, а также $\lambda = -1$ и $x = \pm 1$, $y = 0$.

Изучим подробно одну из найденных точек, а именно точку $x = 0$, $y = 1$ с соответствующим ей значением $\lambda = 1$. Найдем

$$L''_{xx} = 2 + 2\lambda, \quad L''_{yy} = -2 + 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0.$$

Составим

$$d^2L(0, 1)(dx, dy) = 4dx^2.$$

Она принимает неотрицательные значения, но обращается в нуль на множестве $dx = 0$, $dy \in \mathbb{R}$, так что не будет знакоопределенной. Найдем градиент $\nabla h(x,y) = (2x, 2y)$ и $\nabla h(0,1) = (0,2)$. На подпространстве, состоящем из точек $(dx, dy)$ таких, что $(dx, dy) \perp \nabla h(0,1)$, т. е.

удовлетворяющих уравнению $0 \cdot dx + 2 \cdot dy = 0$, или $dy = 0$, приходим к квадратичной форме $4dx^2$, но уже рассматриваемой не на всех $(dx, dy)$, а только на одномерном пространстве $dx \in \mathbb{R}$, $dy = 0$, на котором она определенно положительна. В итоге получаем, что у данной функции достигается относительный минимум в рассматриваемой точке.

**17.4. Пример.** Изучим экстремум функции $f(x, y, z) = xyz$ на множестве $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $h_2(x, y, z) = x + y + z = 0$. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z).$$

Найдем первые производные:

$$L'_x = yz + 2\lambda x + \mu, \quad L'_y = xz + 2\lambda y + \mu, \quad L'_z = xy + 2\lambda z + \mu.$$

Решим систему уравнений

$$yz + 2\lambda x + \mu = 0, \quad xz + 2\lambda y + \mu = 0, \quad xy + 2\lambda z + \mu = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

Сложим первые три уравнения, результат умножим на 2, прибавим к нему четвертое уравнение и учтем пятое. В итоге получим $\mu = 1/6$. Теперь вычтем из первого уравнения второе, из второго третье и из третьего первое. Приходим к системе

$$(y - x)(z - 2\lambda) = 0, \quad (z - y)(x - 2\lambda) = 0, \quad (x - z)(y - 2\lambda) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

Если в первом уравнении $y = x$, то во втором и третьем первые множители в нуль не обращаются, так что $x = y = 2\lambda$. Подставив эту информацию в последние два уравнения, найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \mp\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Аналогично, полагая во втором уравнении $y = z$ и в третьем $x = z$, можно получить еще четыре корня.

Изучим подробно точку $M$ с координатами

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

с соответствующими ей $\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$, $\mu = \dfrac{1}{6}$, оставив читателю изучение остальных пяти. Найдем

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = z, \quad L''_{xz} = y, \quad L''_{yz} = x.$$

Тогда

$$d^2L(M)(dx, dy, dz) = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2+dy^2+dz^2)-2\sqrt{\frac{2}{3}}dxdy+\frac{2}{\sqrt{6}}dydz+\frac{2}{\sqrt{6}}dzdx.$$

Образуем подпространство, ортогональное градиентам функций связи

$$\nabla h_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

и

$$\nabla h_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)\big|_{(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-\sqrt{2/3})}$$
$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Это будет одномерное подпространство, состоящее из таких $(dx, dy, dz)$, что

$$dx + dy - 2dz = 0, \quad dx + dy + dz = 0.$$

Выразим $dy, dz$ через $dx$: $dy = -dx$, $dz = 0$. Квадратичная форма $d^2L(M)(dx, dy, dz)$ на полученном подпространстве примет вид

$$d^2L(M)(dx, dy, dz) = \frac{2}{\sqrt{6}}dx^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}dx^2 = \sqrt{6}dx^2,$$

так что будет определенно положительной. Таким образом, в точке $M$ функция $f$ на рассматриваемом множестве достигает относительного минимума $f(M) = -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

**17.5. Задачи.** Исследовать на экстремум функции $u$ при указанных условиях связи:

**(1)** $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad 3x + 2y - 6 = 0;$

**(2)** $u(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1;$

**(3)** $u(x, y) = 2x^2 + 12xy + y^2, \quad x^2 + 4y^2 = 1;$

**(4)** $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0;$

**(5)** $u(x, y, z) = xy^2z^3, \quad x + y + z = 12,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0;$

**(6)** $u(x,y,z) = xyz, \quad x^2+y^2+z^2=3;$

**17.6. Ответы.** (1) Минимум $u(18/13, 12/13) = 36/13$; (2) два минимума $u(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2}) = 1/2$ и два максимума $u(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = 3/2$; (3) два минимума $u\bigl(\pm\frac{3}{5}, \mp\frac{2}{5}\bigr) = -50$ и два максимума $u\bigl(\pm\frac{4}{5}, \pm\frac{3}{10}\bigr) = 425/4$; (4) минимум $u\bigl(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\bigr) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; (5) максимум $u(2,4,6) = 6912$; (6) минимумы $u(1,1,-1) = u(1,-1,1) = u(-1,1,1) = u(-1,-1,-1) = -1$, максимумы $u(1,1,1) = u(1,-1,-1) = u(-1,-1,1) = u(-1,1,-1) = 1$.

**17.7.** Нахождение экстремумов на открытом множестве и на некотором множестве, описываемом условиями связи, позволяет развивать средства нахождения наименьшего и наибольшего значений гладкой функции на замкнутой ограниченной области. Для решения такой задачи надо отдельно найти наибольшее и наименьшее значения функции внутри области, затем рассмотреть функцию на границе области, задав либо всю ее, либо достаточно значительные ее части посредством условий связи. В итоге надо найти наибольшие и наименьшие значения функции на каждом из получаемых множеств и выбрать среди них наибольшее и наименьшее, они и дадут результат.

**17.8. Задачи.** Найти наименьшее и наибольшее значения функций на множествах.

**(1)** $u = x^2+y^2-4x$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 3$;
**(2)** $x^3+y^3-3xy$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$;
**(3)** $u = x^2-2y+3$, $y-x \leqslant 1$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$;
**(4)** $u = x^2+y^2-xy-x-y$, $x+y \leqslant 3$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
**(5)** $u = x+y+z$, $x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 1$;
**(6)** $u = x+2y+3z$, $x+y \leqslant 3$, $x+y \leqslant z$, $3x+3y \geqslant z$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

**17.9. Ответы.** (1) 21, $-3$; (2) 13, $-1$; (3) 4, 1; (4) 6, $-1$; (5) $1+\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$; (6) 33, 0.