

§ 18. Двойной интеграл

18.1. Мы будем заниматься приобретением навыков по нахождению двойных, а затем и тройных интегралов. Нас не будет интересовать общность теоретической поддержки, за этим можно обратиться к соответствующим теоретическим руководствам. Поэтому мы будем рассматривать непрерывные функции, заданные на замкнутой области в $\mathbb{R}^2$ (т. е. на таком замкнутом множестве, которое совпадает с замыканием своей внутренности). Можно допустить и кусочно непрерывные функции, устроенные так, что их область определения можно представить в виде объединения замкнутых областей, внутренности которых не пересекаются, на внутренности каждой из которых функция непрерывна.

18.2. Определение двойного интеграла. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Напомним конструкцию двойного интеграла (по Риману). Берется разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, каждое из которых имеет площадь (т. е. измеримо по мере Жордана). Затем в каждом из Ω_i , $i = 1, \dots, n$, берется по точке (x_i, y_i) и составляется *интегральная сумма*

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) m(\Omega_i), \quad (18.1)$$

где $m(\Omega_i)$ — площадь множества Ω_i . Если при рассмотрении разбиений таких, что наибольший из диаметров составляющих эти разбиения множеств неограниченно уменьшается, суммы приближаются к некоторому числу, то его и считают интегралом от f по множеству Ω .

Определение. Число I называют (*двойным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Ω на множества $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, у которого $\max_{i=1, \dots, n} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \quad (18.2)$$

Интеграл от f по множеству Ω обозначается обычно символом

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

В этом обозначении фрагмент $dxdy$ указывает на то, что в основе измерения взята площадь прямоугольника как произведение длин его сторон.

18.3. Линейность интеграла. Двойной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на Ω функций f, g и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\iint_{\Omega} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dxdy = \alpha \iint_{\Omega} f(x, y) dxdy + \beta \iint_{\Omega} g(x, y) dxdy \quad (18.3)$$

18.4. Аддитивность интеграла. При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \dots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, то

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) dxdy.$$

18.5. Повторный интеграл. Пусть Ω_1 — проекция Ω на ось абсцисс, а Ω_2 — на ось ординат, т. е.

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R}) (x, y) \in \Omega\}, \quad \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R}) (x, y) \in \Omega\}.$$

Для простоты предположим, что обе проекции суть замкнутые промежутки или, на худой конец, объединения некоторого набора замкнутых промежутков. Фиксируем $x \in \Omega_1$, и пусть Ω_x — сечение Ω на уровне x , т. е. множество всех точек $(x, y) \in \Omega$ при фиксированном x . Предположим для простоты, что Ω_x состоит из конечного набора замкнутых промежутков. Тогда, рассматривая при фиксированном x интеграл от $f(x, y)$ только как функции переменной y по множеству Ω_x , получим функцию

$$\Phi(x) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dy.$$

Ее интегрирование по множеству Ω_1 приведет нас к интегралу

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y) dy \right) dx,$$

который называют *повторным* и обычно обозначают так:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_x} f(x, y) dy.$$

Аналогично можно определить и другой повторный интеграл

$$\int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_y} f(x, y) dx.$$

При наших достаточно жестких ограничениях на область и функцию можно утверждать, что у функции f есть как двойной интеграл, так и оба повторных и она равны между собой:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_x} f(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_y} f(x, y) dx.$$

Равенство двойного и повторных интегралов открывает путь к нахождению двойного интеграла. Надо найти проекцию Ω на какую-либо из координатных осей, например, на ось абсцисс, затем при каждом x из этой проекции найти интеграл от f как функции от y по сечению Ω_x (одномерный интеграл), и затем еще раз найти одномерный интеграл, но теперь уже от получившейся функции от x по проекции Ω_1 .

Обратимся к совсем конкретной ситуации. Предположим, что Ω — это криволинейная трапеция, т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют условиям

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \quad (18.5)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, φ, ψ — непрерывные функции, заданные на $[a, b]$. Тогда

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (18.6)$$

Аналогично, если Ω задается соотношениями

$$c \leq y \leq d, \quad \eta(y) \leq x \leq \zeta(y), \quad (18.7)$$

то

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\eta(y)}^{\zeta(y)} f(x, y) dx. \quad (18.8)$$

Если сама область Ω не является криволинейной трапецией, но ее можно разбить на части, являющиеся криволинейными трапециями, то следует воспользоваться аддитивностью интеграла и свести всё к случаю криволинейной трапеции.

18.6. Замена переменной. Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $(u, v) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u, v на область D . Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_X f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \det \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \quad (18.9)$$

где $\det \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ — якобиан отображения Φ .

Равенство (18.9) называют *формулой замены переменной* в двойном интеграле.

Формула замены переменной позволяет переносить интегрирование с одной области на другую и может оказаться, что в новых переменных область интегрирования проще, однако при этом скорее всего надо будет интегрировать более сложную функцию.

При рассмотрении формулы замены переменной можно заметить, что происходит пересадка функции f в новые переменные и интегрирование по новой области по мере, которая имеет вид $k(u, v) du dv$, где $k(u, v)$ — коэффициент искажения меры, показывающий, как площадь малого квадрата, расположенного около (u, v) , изменяется при отображении Φ . Эта структура формулы замены переменной (или перехода к новым переменным) будет сопровождать все рассматриваемые ниже интегралы, только выражения коэффициента искажения меры будут разными.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются полярные координаты (r, φ) , связанные с (x, y) равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r, \quad (18.10)$$

где $r > 0$, а φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π ,

обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, или обобщенные полярные координаты

$$x = ar \cos^\alpha \varphi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \alpha abr \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi. \quad (18.11)$$

18.7. Пример. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядках в двойном интеграле от функции $f(x, y)$ по треугольнику Ω с вершинами в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ (рис. 1).

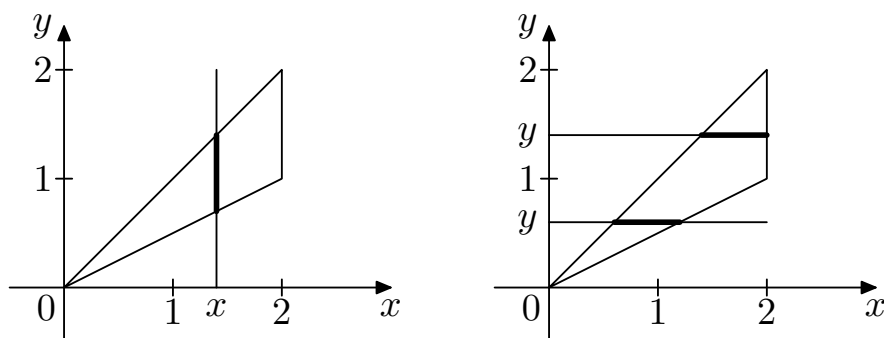


Рис. 1.

Ясно, что проекция треугольника на ось Ox — это отрезок $[0, 2]$. Фиксировав $x \in [0, 2]$ и двигаясь снизу вверх при заданном x , мы войдем в область Ω , пройдя график функции $y = x/2$, и выйдем из Ω через график функции $y = x$, т. е. при каждом фиксированном x сечение Ω на элементе x представляет собой отрезок $[x/2, x]$. Значит, внутренний интеграл от $f(x, y)$ по сечению на элементе x имеет вид $\int_{x/2}^x f(x, y) dy$. Сделав теперь x переменной, получаем функцию

от x , интеграл от которой по отрезку $[0, 2]$ и приведет к одному из повторных интегралов, а именно к интегралу

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^x f(x, y) dy.$$

Обратимся к другому из повторных интегралов. Проекция Ω на ось Oy — это отрезок $[0, 2]$. Фиксируем $y \in [0, 2]$ и будем двигаться слева направо при этом фиксированном y . В область Ω мы войдем через график функции $x = y$, а вот выход будет зависеть от расположения y , а именно, если $0 \leq y \leq 1$, то выходим через график функции $x = 2y$, а если $1 \leq y \leq 2$, то через график функции $x = 2$. Это указывает

на то, что нам придется разбить Ω на две части, соответственно с $0 \leq y \leq 1$ и $1 \leq y \leq 2$. Тогда двойной интеграл будет равен сумме двух повторных интегралов:

$$\int_0^1 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx.$$

18.8. Пример. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядках в двойном интеграле от функции $f(x, y)$ по области Ω , ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2 - 2x$. Ясно, что эти графики пересекаются в точках $(0, 0)$, $(3, 3)$, и из нескольких получающихся областей только одна, а именно при $x \in [0, 3]$, ограничена (рис. 2).

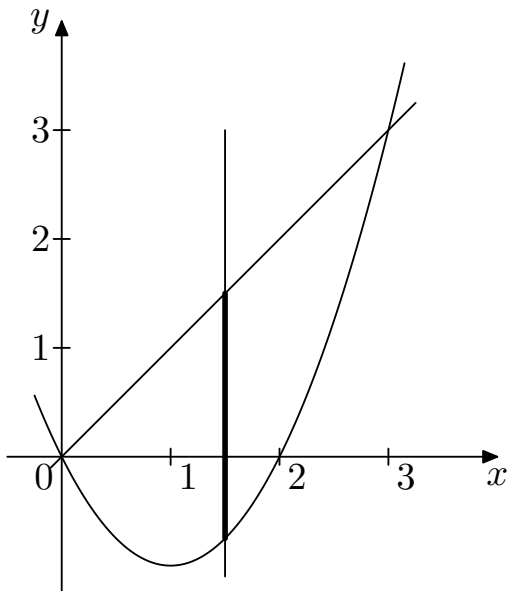


Рис. 2.

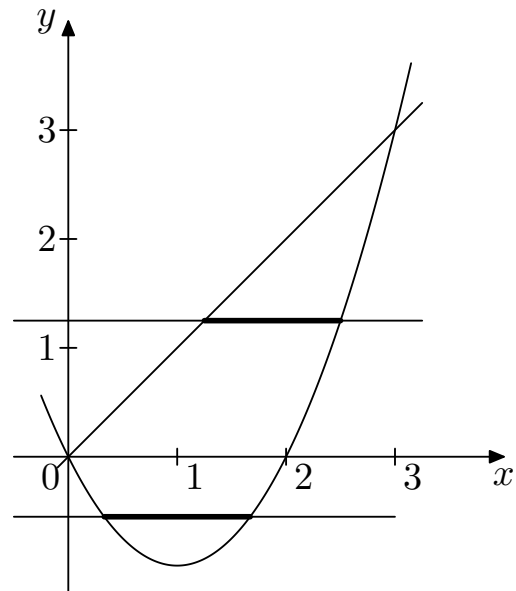


Рис. 3.

При фиксированном $x \in [0, 3]$, двигаясь снизу вверх, мы войдем в область Ω через график функции $y = x^2 - 2x$, а выйдем через $y = x$ (см. рис. 2), так что в результате получим следующий повторный интеграл:

$$\int_0^3 dx \int_{x^2-2x}^x f(x, y) dy.$$

Проекция этой области на ось ординат представляет собой отрезок $[-1, 3]$, но здесь придется разбить область на две части, соответствующие $-1 \leq y \leq 0$ и $0 \leq y \leq 3$ (рис. 3), и интеграл представится в виде

СУММЫ

$$\int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_y^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx.$$

18.9. Задачи.

1. В интеграле $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для областей, ограниченных указанными линиями или заданных неравенствами:

- (1) $y = 0, y = a, x + y = 0, x + y = 2a$;
(2) $2y = x, 2y = x + 6, y = 2x, y = 2x - 3$;
(3) $x^2 + y^2 \leq 2ax$; (4) $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq x$;

2. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

- (1) $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy, a > 0$; (2) $\int_0^1 dy \int_0^{y^2+y} f(x, y) dx$;
(3) $\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-1}^{\cos x} f(x, y) dy$, (4) $\int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y) dy$;

3. Вычислить интегралы

- (1) $\iint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy$, Ω ограничена линиями $x = y^2, x = 1$;
(2) $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$;
(3) $\iint_{\Omega} xy dx dy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 25, 3x + y \geq 5\}$;
(4) $\iint_{\Omega} x dx dy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2, x^2 - y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$;

18.10. Пример. В двойном интеграле $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, где Ω — круг $x^2 + y^2 \leq 2x$, перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования.

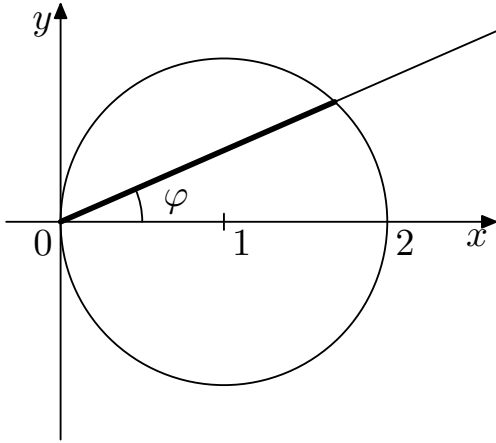


Рис. 4.

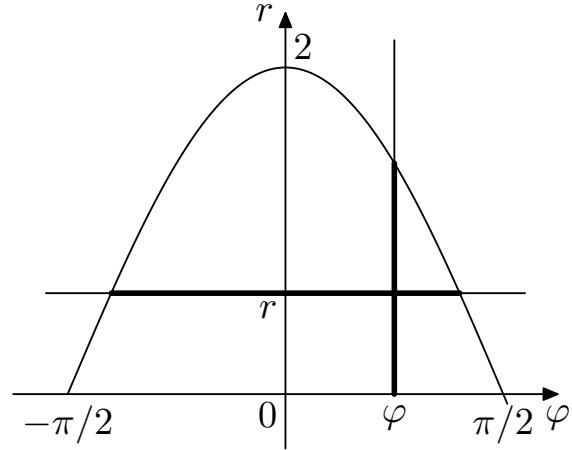


Рис. 5.

Подставляя выражения $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ в соотношение, задающее область Ω , получим неравенство $r^2 \leq 2r \cos \varphi$, или $r \leq 2 \cos \varphi$, характеризующее соответствующую Ω область D в координатах (φ, r) (здесь нам удобно ставить координаты именно в указанном порядке, а не в противоположном, как это удобно при нахождении якобиана). Ограничение $r \geq 0$ приводит к ограничению $\cos \varphi \geq 0$, или же $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Можно для наглядности изобразить зависимость $r = r(\varphi)$ в рамках исходных декартовых координат (x, y) (рис 4), а также изобразив пары (φ, r) как декартовы координаты (рис. 5).

Ясно, что

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \end{aligned}$$

Запишем повторный интеграл при другом порядке следования переменных. Проекция области D на ось Or — это отрезок $[0, 2]$, и если при фиксированном r идти слева направо (при той интерпретации φ, r , где они изображены в виде прямоугольной системы координат), то для нахождения зависимости $\varphi = \varphi(r)$, при которой мы войдем в область D , надо решить уравнение $r = 2 \cos \varphi$ с учетом ограничения $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$, или же $\cos \varphi = r/2$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$, или

$$\varphi = \pm \arccos \frac{r}{2} + 2\pi k, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0,$$

откуда $\varphi = -\arccos \frac{r}{2}$. Выйдем из D на графике функции $\varphi =$

$\arccos \frac{r}{2}$. Тем самым приходим к повторному интегралу

$$\int_0^2 r dr \int_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

18.11. Задачи.

1. В интеграле $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов:

- (1) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq x\}$, (2) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2ay\}$,
 (3) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq x\}$,
 (4) $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x + y + a \leq 0\}$,

2. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

- (1) $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$.
 (2) $\iint_{\Omega} y^2 e^{x^2+y^2} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,
 (3) $\iint_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq ax\}, a > 0$,
 (4) $\iint_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2y\}$,

18.12. Из определения двойного интеграла легко усмотреть, что если мы проинтегрируем единичную функцию по данной области (в переменных (x, y)), то получим величину площади этой области:

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy.$$

18.13. Пример. Найдём площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = cy^2, \quad x^3 = dy^2, \quad 0 < a < b, \quad 0 < c < d,$$

воспользовавшись подходящей заменой переменных.

Заметим, что выражения $\frac{x^2}{y}$ и $\frac{x^3}{y^2}$ меняются в постоянных пределах, поэтому, если мы введем новые переменные u, v , полагая $u = \frac{x^2}{y}$ и $v = \frac{x^3}{y^2}$, то область D изменения переменных u, v составляет прямоугольник $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. Для нахождения якобиана $\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ можно сначала выразить x, y через u, v , а затем считать якобиан, а можно попробовать найти якобиан $\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ и потом из него получить требуемый якобиан. Пойдем сначала вторым путем, потому что выражения u, v через x, y проще, чем выражения x, y через u, v . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{x^3}{y^3},$$

так что

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2\frac{x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ 3\frac{x^2}{y^2} & -2\frac{x^3}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{x^4}{y^4}.$$

Заметив, что $\frac{x}{y} = \frac{v}{u}$, находим, что

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \right| = \left(\frac{u}{v} \right)^4.$$

Тем самым

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} dx dy = \int_a^b du \int_c^d \frac{u^4}{v^4} dv = \int_a^b u^4 du \int_c^d v^{-4} dv \\ &= \frac{u^5}{5} \Big|_a^b \cdot \frac{u^{-3}}{-3} \Big|_c^d = \frac{b^5 - a^5}{15} \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3} \right). \end{aligned}$$

18.14. Задачи.

1. Используя (обобщенные) полярные координаты, найти площадь области, ограниченной кривыми:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2bx, \quad y = x, \quad y = 0, \quad b > a > 0;$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2;$$

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0;$$

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3).$$

2. Найти площадь области, ограниченной данными кривыми, используя подходящую замену:

$$(1) \quad x = 2y, \quad y = 3x, \quad 3x = 2 - y, \quad x = 4 - 2y;$$

$$(2) \quad x + y = a, \quad x + y = b, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x, \quad 0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

18.15. Из определения двойного интеграла можно усмотреть его геометрическую интерпретацию: если $z = f(x, y)$ — некоторая неотрицательная функция на области Ω , то интеграл $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ равен

объему подграфика функции f , т. е. множества $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Если f_1, f_2 — функции, заданные на Ω , такие, что $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ для всех $(x, y) \in \Omega$, то объем части пространства $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$, находящегося между графиками f_1, f_2 , равен интегралу

$$\iint_{\Omega} (f_2(x, y) - f_1(x, y)) \, dx dy.$$

18.16. Пример. Найдём объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$.

Здесь тело представляет собой часть пространства, заключенную между графиками функции $z = 0$ и $z = x^2 + y^2$, рассматриваемых на области $\Omega = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$. Тем самым его объем равен

интегралу

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=1} = \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx \\
 &= 2 \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{88}{105}.
 \end{aligned}$$

18.17. Задачи. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

- (1) $x^2 + y^2 = ax, z = x^2 + y^2, z = 0$;
- (2) $x + y + z = a, 4x + y = a, 4x + 3y = 3a, y = 0, z = 0, a > 0$;

18.18. Пусть M — гладкая поверхность, заданная параметрически посредством непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega.$$

Тогда площадь $S(M)$ поверхности M может быть найдена по формуле

$$S(M) = \iint_M k(u, v) du dv,$$

где величина $k(u, v)$ (коэффициент искажения площади) может быть найдена либо по формуле

$$k(u, v) = \sqrt{EG - F^2}, \quad (18.12)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

либо по формуле

$$k(u, v) = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right|^2}. \quad (18.13)$$

Если же поверхность M является графиком функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, то

$$S(M) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (18.14)$$

18.19. Задачи.

1. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

2. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.