§ 18. Двойной интеграл

18.1. Мы будем заниматься приобретением навыков по нахождению двойных, а затем и тройных интегралов. Нас не будет интересовать общность теоретической поддержки, за этим можно обратиться к соответствующим теоретическим руководствам. Поэтому мы будем рассматривать непрерывные функции, заданные на замкнутой области в $\mathbb{R}^2$ (т. е. на таком замкнутом множестве, которое совпадает с замыканием своей внутренности). Можно допустить и кусочно непрерывные функции, устроенные так, что их область определения можно представить в виде объединения замкнутых областей, внутренности которых не пересекаются, на внутренности каждой из которых функция непрерывна.

18.2. Определение двойного интеграла. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Напомним конструкцию двойного интеграла (по Риману). Берется разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, каждое из которых имеет площадь (т. е. измеримо по мере Жордана). Затем в каждом из Ω_i, $i = 1, \ldots, n$, берется по точке (x_i, y_i) и составляется *интегральная сумма*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\Omega_i), \tag{18.1}$$

где $m(\Omega_i)$ — площадь множества Ω_i. Если при рассмотрении разбиений таких, что наибольший из диаметров составляющих эти разбиения множеств неограниченно уменьшается, суммы приближаются к некоторому числу, то его и считают интегралом от f по множеству Ω.

Определение. Число I называют (*двойным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Ω на множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, у которого $\max\limits_{i=1,\ldots,n} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \tag{18.2}$$

Интеграл от f по множеству Ω обозначается обычно символом

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy.$$

В этом обозначении фрагмент $dxdy$ указывает на то, что в основе измерения взята площадь прямоугольника как произведение длин его сторон.

18.3. Линейность интеграла. *Двойной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на Ω функций f, g и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, dxdy + \beta \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\, dxdy \tag{18.3}$$

18.4. Аддитивность интеграла. *При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \ldots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$, то*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{D_i} f(x,y)\, dxdy.$$

18.5. Повторный интеграл. Пусть Ω_1 — проекция Ω на ось абсцисс, а Ω_2 — на ось ординат, т. е.

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})\ (x,y) \in \Omega\}, \quad \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})\ (x,y) \in \Omega\}.$$

Для простоты предположим, что обе проекции суть замкнутые промежутки или, на худой конец, объединения некоторого набора замкнутых промежутков. Фиксируем $x \in \Omega_1$, и пусть Ω_x — сечение Ω на уровне x, т. е. множество всех точек $(x,y) \in \Omega$ при фиксированном x. Предположим для простоты, что Ω_x состоит из конечного набора замкнутых промежутков. Тогда, рассматривая при фиксированном x интеграл от $f(x,y)$ только как функции переменной y по множеству Ω_x, получим функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\, dy.$$

Ее интегрирование по множеству Ω_1 приведет нас к интегралу

$$\int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\, dy \right) dx,$$

который называют *повторным* и обычно обозначают так:

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy.$$

Аналогично можно определить и другой повторный интеграл

$$\int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,dx.$$

При наших достаточно жестких ограничениях на область и функцию можно утверждать, что у функции f есть как двойной интеграл, так и оба повторных и она равны между собой:

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy = \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,dx.$$

Равенство двойного и повторных интегралов открывает путь к нахождению двойного интеграла. Надо найти проекцию Ω на какую-либо из координатных осей, например, на ось абсцисс, затем при каждом x из этой проекции найти интеграл от f как функции от y по сечению Ω_x (одномерный интеграл), и затем еще раз найти одномерный интеграл, но теперь уже от получившейся функции от x по проекции Ω_1.

Обратимся к совсем конкретной ситуации. Предположим, что Ω — это криволинейная трапеция, т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют условиям

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x), \tag{18.5}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, φ, ψ — непрерывные функции, заданные на $[a,b]$. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{18.6}$$

Аналогично, если Ω задается соотношениями

$$c \leqslant y \leqslant d, \quad \eta(y) \leqslant x \leqslant \zeta(y), \tag{18.7}$$

то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\eta(y)}^{\zeta(y)} f(x,y)\,dx. \tag{18.8}$$

Если сама область Ω не является криволинейной трапецией, но ее можно разбить на части, являющиеся криволинейными трапециями, то следует воспользоваться аддитивностью интеграла и свести всё к случаю криволинейной трапеции.

18.6. Замена переменной. Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $(u,v) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u, v на область D. Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{X} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left|\det \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right| dudv, \tag{18.9}$$

где $\det \dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$ — якобиан отображения Φ.

Равенство (18.9) называют *формулой замены переменной* в двойном интеграле.

Формула замены переменной позволяет переносить интегрирование с одной области на другую и может оказаться, что в новых переменных область интегрирования проще, однако при этом скорее всего надо будет интегрировать более сложную функцию.

При рассмотрении формулы замены переменной можно заметить, что происходит пересадка функции f в новые переменные и интегрирование по новой области по мере, которая имеет вид $k(u,v)\,dudv$, где $k(u,v)$ — коэффициент искажения меры, показывающий, как площадь малого квадрата, расположенного около (u,v), изменяется при отображении Φ. Эта структура формулы замены переменной (или перехода к новым переменным) будет сопровождать все рассматриваемые ниже интегралы, только выражения коэффициента искажения меры будут разными.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются полярные координаты (r,φ), связанные с (x,y) равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r, \tag{18.10}$$

где $r > 0$, а φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π,

обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, или обобщенные полярные координаты

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi, \quad y = br\sin^{\alpha}\varphi, \quad r > 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi. \tag{18.11}$$

18.7. Пример. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядках в двойном интеграле от функции $f(x, y)$ по треугольнику Ω с вершинами в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ (рис. 1).

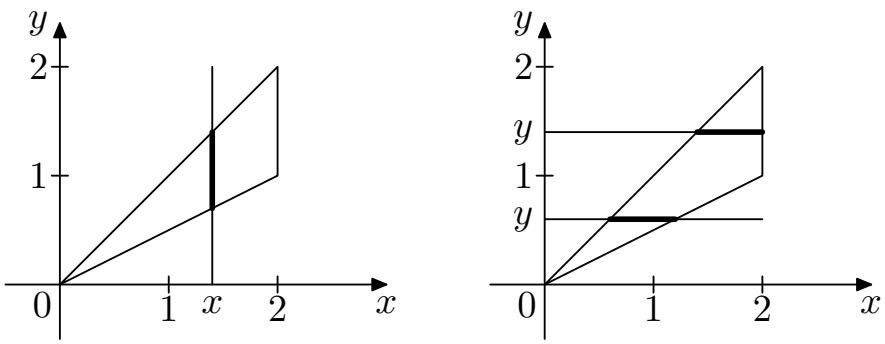

Рис. 1.

Ясно, что проекция треугольника на ось Ox — это отрезок $[0, 2]$. Фиксировав $x \in [0, 2]$ и двигаясь снизу вверх при заданном x, мы войдем в область Ω, пройдя график функции $y = x/2$, и выйдем из Ω через график функции $y = x$, т. е. при каждом фиксированном x сечение Ω на элементе x представляет собой отрезок $[x/2, x]$. Значит, внутренний интеграл от $f(x, y)$ по сечению на элементе x имеет вид $\int\limits_{x/2}^{x} f(x, y)\, dy$. Сделав теперь x переменной, получаем функцию от x, интеграл от которой по отрезку $[0, 2]$ и приведет к одному из повторных интегралов, а именно к интегралу

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x, y)\, dy.$$

Обратимся к другому из повторных интегралов. Проекция Ω на ось Oy — это отрезок $[0, 2]$. Фиксируем $y \in [0, 2]$ и будем двигаться слева направо при этом фиксированном y. В область Ω мы войдем через график функции $x = y$, а вот выход будет зависеть от расположения y, а именно, если $0 \leqslant y \leqslant 1$, то выходим через график функции $x = 2y$, а если $1 \leqslant y \leqslant 2$, то через график функции $x = 2$. Это указывает

на то, что нам придется разбить Ω на две части, соответственно с $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $1 \leqslant y \leqslant 2$. Тогда двойной интеграл будет равен сумме двух повторных интегралов:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx.$$

18.8. Пример. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядках в двойном интеграле от функции $f(x,y)$ по области Ω, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2 - 2x$. Ясно, что эти графики пересекаются в точках $(0,0)$, $(3,3)$, и из нескольких получающихся областей только одна, а именно при $x \in [0,3]$, ограничена (рис. 2).

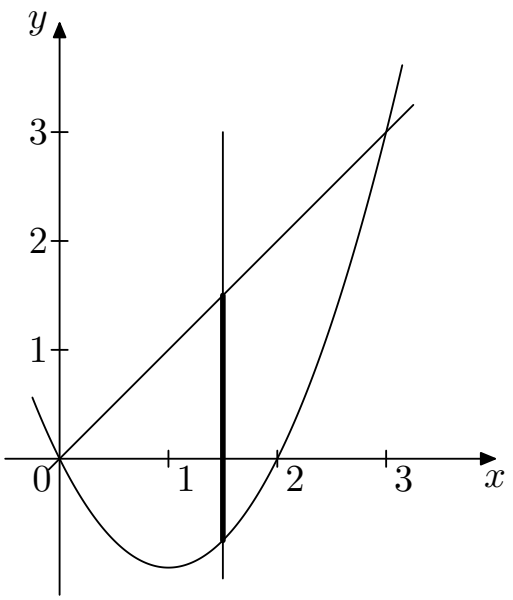

Рис. 2.

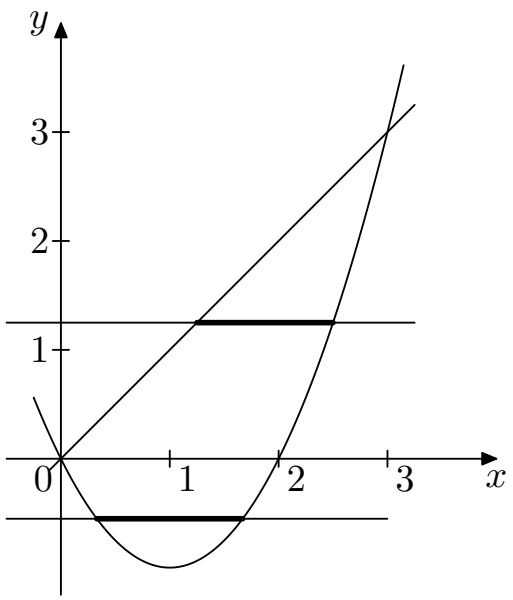

Рис. 3.

При фиксированном $x \in [0,3]$, двигаясь снизу вверх, мы войдем в область Ω через график функции $y = x^2 - 2x$, а выйдем через $y = x$ (см. рис. 2), так что в результате получим следующий повторный интеграл:

$$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} f(x,y)\,dy.$$

Проекция этой области на ось ординат представляет собой отрезок $[-1,3]$, но здесь придется разбить область на две части, соответствующие $-1 \leqslant y \leqslant 0$ и $0 \leqslant y \leqslant 3$ (рис. 3), и интеграл представится в виде

суммы

$$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{y}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx.$$

18.9. Задачи.

1. В интеграле $\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для областей, ограниченных указанными линиями или заданных неравенствами:

(1) $y=0$, $y=a$, $x+y=0$, $x+y=2a$;

(2) $2y=x$, $2y=x+6$, $y=2x$, $y=2x-3$;

(3) $x^2+y^2\leqslant 2ax$; **(4)** $x^2+y^2\leqslant 4x$, $y\geqslant x$;

2. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

(1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy$, $a>0$; **(2)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2+y} f(x,y)\,dx$;

(3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x,y)\,dy$, **(4)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$;

3. Вычислить интегралы

(1) $\iint\limits_{\Omega} x^2y^2\,dxdy$, Ω ограничена линиями $x=y^2$, $x=1$;

(2) $\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy$, $\Omega=\{x^2+y^2\leqslant a^2,\ x\geqslant 0\}$;

(3) $\iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy$, $\Omega=\{x^2+y^2\leqslant 25,\ 3x+y\geqslant 5\}$;

(4) $\iint\limits_{\Omega} x\,dxdy$, $\Omega=\{x^2+y^2\leqslant 2,\ x^2-y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$;

18.10. Пример. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, где Ω — круг $x^2+y^2\leqslant 2x$, перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования.

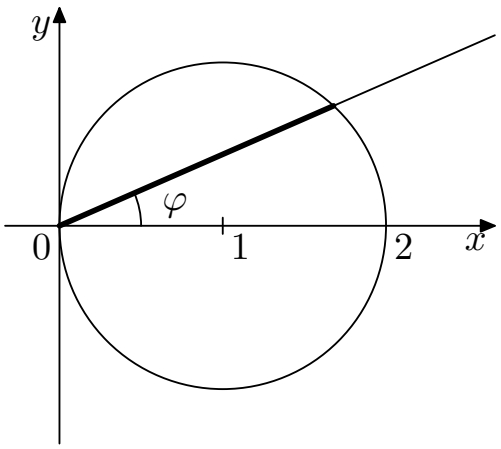

Рис. 4.

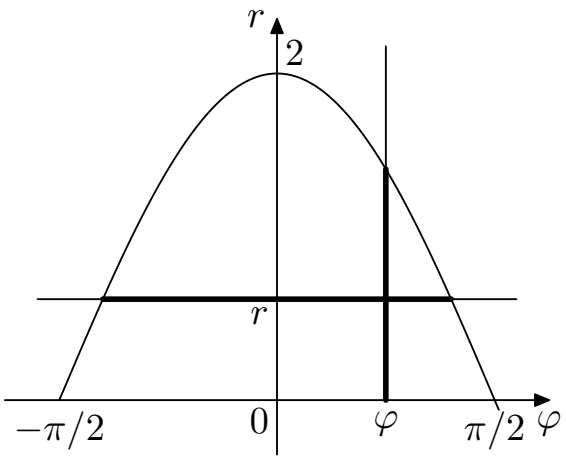

Рис. 5.

Подставляя выражения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ в соотношение, задающее область Ω, получим неравенство $r^2 \leqslant 2r\cos\varphi$, или $r \leqslant 2\cos\varphi$, характеризующее соответствующую Ω область D в координатах (φ, r) (здесь нам удобно ставить координаты именно в указанном порядке, а не в противоположном, как это удобно при нахождении якобиана). Ограничение $r \geqslant 0$ приводит к ограничению $\cos\varphi \geqslant 0$, или же $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Можно для наглядности изобразить зависимость $r = r(\varphi)$ в рамках исходных декартовых координат (x, y) (рис 4), а также изобразив пары (φ, r) как декартовы координаты (рис. 5).

Ясно, что

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,d\varphi dr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr.$$

Запишем повторный интеграл при другом порядке следования переменных. Проекция области D на ось Or — это отрезок $[0, 2]$, и если при фиксированном r идти слева направо (при той интерпретации φ, r, где они изображены в виде прямоугольной системы координат), то для нахождения зависимости $\varphi = \varphi(r)$, при которой мы войдем в область D, надо решить уравнение $r = 2\cos\varphi$ с учетом ограничения $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0$, или же $\cos\varphi = r/2$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0$, или

$$\varphi = \pm\arccos\frac{r}{2} + 2\pi k, \quad -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 0,$$

откуда $\varphi = -\arccos\dfrac{r}{2}$. Выйдем из D на графике функции $\varphi =$

$\arccos\dfrac{r}{2}$. Тем самым приходим к повторному интегралу

$$\int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

18.11. Задачи.

1. В интеграле $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов:

(1) $\Omega = \{x^2+y^2 \leqslant a^2,\ y \geqslant x\}$, **(2)** $\Omega = \{x^2+y^2 \leqslant 2ay\}$,

(3) $\Omega = \{x^2+y^2 \leqslant 2ax,\ y \geqslant x\}$,

(4) $\Omega = \{x^2+y^2 \leqslant a^2,\ x+y+a \leqslant 0\}$,

2. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

(1) $\iint\limits_\Omega xy^2\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0\}.$

(2) $\iint\limits_\Omega y^2 e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\},$

(3) $\iint\limits_\Omega \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \leqslant ax\},\ a>0,$

(4) $\iint\limits_\Omega \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \leqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 2y\},$

18.12. Из определения двойного интеграла легко усмотреть, что если мы проинтегрируем единичную функцию по данной области (в переменных (x,y)), то получим величину площади этой области:

$$S(\Omega) = \iint\limits_\Omega dxdy.$$

18.13. Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = cy^2, \quad x^3 = dy^2, \quad 0 < a < b,\ 0 < c < d,$$

воспользовавшись подходящей заменой переменных.

Заметим, что выражения $\dfrac{x^2}{y}$ и $\dfrac{x^3}{y^2}$ меняются в постоянных пределах, поэтому, если мы введем новые переменные u, v, полагая $u = \dfrac{x^2}{y}$ и $v = \dfrac{x^3}{y^2}$, то область D изменения переменных u, v составляет прямоугольник $a \leqslant u \leqslant b$, $c \leqslant v \leqslant d$. Для нахождения якобиана $\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ можно сначала выразить x, y через u, v, а затем считать якобиан, а можно попробовать найти якобиан $\det \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и потом из него получить требуемый якобиан. Пойдем сначала вторым путем, потому что выражения u, v через x, y проще, чем выражения x, y через u, v. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{x^3}{y^3},$$

так что

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2\dfrac{x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ 3\dfrac{x^2}{y^2} & -2\dfrac{x^3}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{x^4}{y^4}.$$

Заметив, что $\dfrac{x}{y} = \dfrac{v}{u}$, находим, что

$$\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\right| = \left(\frac{u}{v}\right)^4.$$

Тем самым

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \int\limits_a^b du \int\limits_c^d \frac{u^4}{v^4}\, dv = \int\limits_a^b u^4\, du \int\limits_c^d v^{-4}\, dv$$
$$= \frac{u^5}{5}\bigg|_a^b \cdot \frac{u^{-3}}{-3}\bigg|_c^d = \frac{b^5 - a^5}{15}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right).$$

18.14. Задачи.

1. Используя (обобщенные) полярные координаты, найти площадь области, ограниченной кривыми:

(1) $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $y=x$, $y=0$, $b>a>0$;

(2) $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$;

(3) $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$, $\quad x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;

(4) $(x^2+y^2)^2=a(x^3+y^3)$.

2. Найти площадь области, ограниченной данными кривыми, используя подходящую замену:

(1) $x=2y$, $y=3x$, $3x=2-y$, $x=4-2y$;

(2) $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$, $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$.

18.15. Из определения двойного интеграла можно усмотреть его геометрическую интерпретацию: если $z=f(x,y)$ — некоторая неотрицательная функция на области Ω, то интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ равен объему подграфика функции f, т. е. множества $\{(x,y,z):(x,y)\in\Omega,\ 0\leqslant z\leqslant f(x,y)\}$. Если f_1, f_2 — функции, заданные на Ω, такие, что $f_1(x,y)\leqslant f_2(x,y)$ для всех $(x,y)\in\Omega$, то объем части пространства $\{(x,y,z):(x,y)\in\Omega,\ f_1(x,y)\leqslant z\leqslant f_2(x,y)\}$, находящегося между графиками f_1, f_2, равен интегралу

$$\iint\limits_{\Omega}(f_2(x,y)-f_1(x,y))\,dxdy.$$

18.16. Пример. Найдем объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$.

Здесь тело представляет собой часть пространства, заключенную между графиками функции $z=0$ и $z=x^2+y^2$, рассматриваемых на области $\Omega=\{(x,y):x^2\leqslant y\leqslant 1\}$. Тем самым его объем равен

интегралу

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=1} = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$= 2 \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{88}{105}.$$

18.17. Задачи. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

(1) $x^2+y^2 = ax$, $z = x^2+y^2$, $z = 0$;

(2) $x+y+z = a$, $4x+y = a$, $4x+3y = 3a$, $y = 0$, $z = 0$, $a > 0$;

18.18. Пусть M — гладкая поверхность, заданная параметрически посредством непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in \Omega.$$

Тогда площадь $S(M)$ поверхности M может быть найдена по формуле

$$S(M) = \iint\limits_{M} k(u,v)\,dudv,$$

где величина $k(u,v)$ (коэффициент искажения площади) может быть найдена либо по формуле

$$k(u,v) = \sqrt{EG - F^2}, \tag{18.12}$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

либо по формуле

$$k(u,v) = \sqrt{\left|\begin{matrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right|^2}. \tag{18.13}$$

Если же поверхность M является графиком функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, то

$$S(M) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{18.14}$$

18.19. Задачи.

1. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

2. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.