

## § 19. Тройной интеграл

**19.1.** Пусть  $f$  — непрерывная функция трех переменных  $(x, y, z)$ , заданная на ограниченной замкнутой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Тройной интеграл создается аналогично двойному: берут разбиение области  $\Omega$  на такие множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ , каждая из которых имеет объем (т. е. измерима, например, по мере Жордана), затем в каждой из частей разбиения  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , берут по точке  $(x_i, y_i, z_i)$  и составляют интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^k f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i), \quad (19.1)$$

где  $m(\Omega_i)$  — объем множества  $\Omega_i$ . Число  $I$  называют (*тройным*) *интегралом* от функции  $f$  по множеству  $\Omega$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  области  $\Omega$  на измеримые части такие, что  $\max_{i=1, \dots, k} \text{diam}(\Omega_i) < \delta$ , и любого выбора точек  $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \quad (19.2)$$

Для тройного интеграла используют обозначение  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ .

Здесь символ  $dx dy dz$  указывает на то, что в основу измерения объема взят объем параллелепипеда как произведение его линейных размеров.

### 19.2. Свойства интеграла.

**Линейность интеграла.** Тройной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на  $\Omega$  функций  $f, g$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dx dy dz \\ &= \alpha \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (19.3)$$

**Аддитивность интеграла.** При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если  $D_1, \dots, D_k$  —

конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и  $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ , то

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^k \iiint_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (19.4)$$

**19.3. Повторный интеграл.** При переходе от тройного интеграла к повторному можно сначала фиксировать либо одну координату, оставляя переменными другие две, либо две координаты, оставляя переменной оставшуюся одну. В зависимости от типа фиксации координат получаются различные способы перехода к повторному интегрированию.

Пусть  $\Omega_0 = \{(x, y) : (\exists z) (x, y, z) \in \Omega\}$  — проекция  $\Omega$  на плоскость  $xOy$ . Фиксируем  $(x, y) \in \Omega_0$ , и пусть  $\Omega_{(x,y)} = \{z : (x, y, z) \in \Omega\}$ . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} \left( \int_{\Omega_{(x,y)}} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Обычно интеграл в правой части записывают так:

$$\iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\Omega_{(x,y)}} f(x, y, z) dz. \quad (19.5)$$

Если при этом для каждой пары  $(x, y) \in \Omega_0$  множество  $\Omega_{(x,y)}$  — это отрезок  $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ , то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (19.6)$$

В результате первого интегрирования (по  $z$ ) получаем двойной интеграл, разбираться с которым учились раньше.

Ясно, что аналогичные соотношения получаются при фиксации сначала какой-либо другой координатной плоскости —  $yOz$  или  $zOx$ .

Обсудим другой способ разбиения. Пусть  $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y, z \in \mathbb{R}) (x, y, z) \in \Omega\}$  — проекция области  $\Omega$  на ось  $Ox$ . При каждом  $x \in \Omega_1$  пусть  $\Omega_x = \{(y, z) : (x, y, z) \in \Omega\}$  — сечение области  $\Omega$  при данном  $x$ . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Здесь внутренний интеграл двойной, с которым мы умеем разбираться, внешний — обычный одномерный интеграл. В частности, если  $\Omega_1$  — это отрезок  $\Omega_1 = [a, b]$ , а при фиксированном  $x \in [a, b]$  множество  $\Omega_x$  — это криволинейная трапеция, ограниченная функциями  $z = \lambda(x, y)$ ,  $z = \mu(x, y)$ , где  $c(x) \leq y \leq d(x)$ , то в обычных обозначениях

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{\lambda(x, y)}^{\mu(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (19.7)$$

Как и выше, подобные формулы будут при первоначальном обращении к какой-либо из других координатных осей.

**19.4. Замена переменной.** Как отмечено при обсуждении замены переменных в двойном интеграле, при замене надо перенести функцию в область новых переменных и проинтегрировать по мере, в которой учтен коэффициент искажения, вносимый реализующим замену диффеоморфизмом.

Пусть  $f$  — непрерывная функция, определенная на открытой области  $D \subset \mathbb{R}^3$ , и пусть отображение  $\Phi$  с координатными функциями  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$ ,  $(u, v, w) \in W$ , — диффеоморфизм области  $W$  переменных  $u, v, w$  на область  $D$ . Пусть замкнутая область  $\Omega \subset D$  является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области  $X \subset W$ . Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ = \iiint_X f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned} \quad (19.8)$$

где  $\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$  — якобиан отображения  $\Phi$ .

Равенство (19.8) называют *формулой замены переменной* в тройном интеграле.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются (географические) *сферические координаты*  $\varphi, \psi, r$ , связанные с исходными переменными  $x, y, z$  равенствами

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi,$$

или (физические) сферические координаты  $\varphi, \psi, \theta$ , где

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, r, \theta)} = r^2 \sin \theta,$$

Здесь переменная  $\varphi$  может меняться в каком-либо промежутке длиной  $2\pi$ , обычно  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , а  $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . Бывают удобны также *цилиндрические координаты*  $r, \varphi, h$ , связанные с  $x, y, z$  равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h, \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, r, h)} = r.$$

Здесь  $r > 0$ ,  $\varphi$  пробегает при этом промежуток длиной не более  $2\pi$ , обычно  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , а  $h \in \mathbb{R}$ .

В подходящих случаях используются *обобщенные сферические координаты*  $\varphi, \psi, r$ , связанные с  $x, y, z$  равенствами

$$x = ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad z = cr \sin^\beta \psi,$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} = \alpha \beta a b c r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi.$$

Здесь область изменения переменной  $\varphi$  зависит от показателя  $\alpha$  и ограничивается возможностью возведения в степень  $\alpha$ , но во всяком случае это область лежит в каком-либо промежутке длиной не более  $2\pi$ , обычно  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , а  $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

**19.5. Пример.** Запишем интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  в виде

повторного, где  $\Omega$  — область, ограниченная поверхностями  $z = xy$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$ . При этом рассмотрим разный порядок следования переменных.

Поверхности  $x = 1$  и  $y = x$  — это параллельные оси  $Oz$  плоскости, проходящие через соответствующие прямые плоскости  $xOy$ . Поверхность  $z = xy$  — это седло, проходящее через оси координат  $Ox$ ,  $Oy$ . Поскольку поверхность  $x = 1$  должна участвовать в формировании области, у поверхности  $z = xy$  надо брать ту часть, где  $x > 0$ . Равенства  $z = xy$  и  $z = 0$  говорят о том, что ограничивающими поверхностями будут также  $x = 0$  и  $y = 0$ . Исходя из этих наблюдений, находим, что проекцией области  $\Omega$  на плоскость  $xOy$  будет треугольник  $\Delta$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y \leq x$ . Для каждой точки  $(x, y) \in \Delta$  точка  $(x, y, z)$

будет в  $\Omega$  при  $0 \leq z \leq xy$ . Тем самым, сразу расставляя пределы интегрирования по  $\Delta$ , получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\Delta} dx dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Поступим теперь иначе. Заметим, что условия  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y \leq x$ ,  $0 \leq z \leq xy$  приводят к ограничению  $0 \leq z \leq 1$  на  $z$ . Фиксировав  $z \in [0, 1]$ , получаем при каждом таком  $z$  область в плоскости  $xOy$ , ограниченную кривыми  $xy = z$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$  (рис. 1).

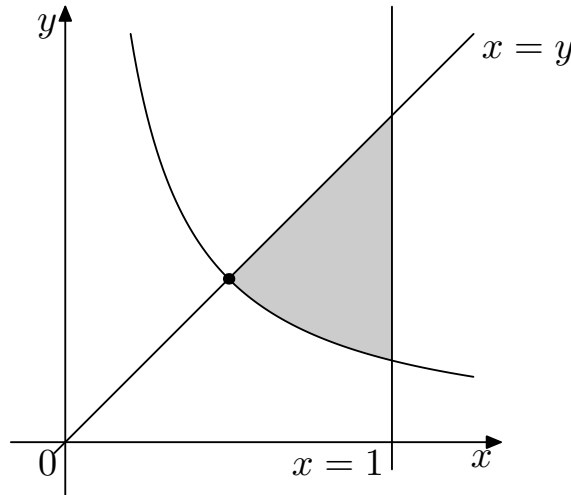


Рис. 1.

Этими линиями ограничивается выделенная на рис. 1 область. Найдем точку пересечения кривых  $y = x$  и  $xy = z$ :  $z = x^2$ ,  $x = \sqrt{z}$ . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{z/x}^x f(x, y, z) dy.$$

## 19.6. Задачи.

1. Тройной интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  записать в виде повторного с указанным порядком следования переменных и расставить пределы интегрирования для указанных областей:

- (1)  $\Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, 4 \geq z \geq 0, 2x + y \leq 2\}$ , (а)  $(y, z, x)$ ,  
 (б)  $(x, y, z)$ ;  
 (2)  $\Omega = \{x \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, y^2 + z^2 \leq a^2\}$ , (а)  $(y, z, x)$ ,  
 (б)  $(x, z, y)$ ;

2. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

$$(1) \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^h f(x, y, z) dz, \quad (z, y, x);$$

$$(2) \int_0^4 dz \int_0^{3-\frac{3}{4}z} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x, y, z) dx, \quad (x, y, z);$$

3. Вычислить интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  для следующих функций и областей:

(1)  $f(x, y, z) = y$ ,  $\Omega$  — пирамида, ограниченная плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $2x + y + z = 4$ ;

(2)  $f(x, y, z) = x + z$ , область  $\Omega$  ограничена плоскостями  $x + y = 1$ ,  $x - y = 1$ ,  $x + z = 1$ ,  $z = 0$ ,  $x = 0$ ;

(3)  $f(x, y, z) = x^2 - z^2$ , область  $\Omega$  ограничена плоскостями  $y = -x$ ,  $z = x$ ,  $z = y$ ,  $z = 1$ ;

(4)  $f(x, y, z) = xy$ , область  $\Omega$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ;

**19.7. Пример.** В интеграле  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ , где

$$\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \geq z^2\},$$

перейдем к сферическим координатам и запишем его в виде повторного.

Подставляя  $x = r \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y = r \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z = r \sin \psi$  в неравенства, характеризующие область, получим неравенства

$$r^2 \leq 2ar \sin \psi, \quad r^2 \cos^2 \psi \geq r^2 \sin^2 \psi,$$

или

$$r \leq 2a \sin \psi, \quad |\cos \psi| \geq |\sin \psi|,$$

характеризующие соответствующую  $\Omega$  область  $D$  в сферических координатах. Положительность  $r$  вместе с ограничением из сферической замены дает ограничение  $0 \leq \psi \leq \pi/2$ . Далее, среди  $\psi \in [0, \pi/2]$  неравенство  $|\cos \psi| \geq |\sin \psi|$  выполняется при  $\psi \in [0, \pi/4]$ . Итак, мы приходим к интегралу по области

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 2a \sin \psi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

сферических переменных. Переход к повторному интегралу дает равенство

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_D f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\psi \int_0^{2a \sin \psi} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr. \end{aligned}$$

**19.8. Пример.** Совершая подходящую замену, вычислим интеграл  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , где  $\Omega$  расположена в октанте  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  и ограничена поверхностями

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < m < n).$$

Учитывая наблюдения из примера 18.13, положим

$$u = \frac{x^2 + y^2}{z}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x}.$$

Тогда при переходе к переменным  $u, v, w$  области  $\Omega$  соответствует прямоугольник

$$m \leq u \leq n, \quad a^2 \leq v \leq b^2, \quad \alpha \leq w \leq \beta.$$

Найдем якобиан  $\det \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ , замечая, что выражения  $u, v, w$  через  $x, y, z$  проще, чем выражения для координатных функций обрат-

ного отображения. Имеем

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -2 \frac{y}{x} \frac{x^2 + y^2}{z^2}. \end{aligned}$$

Выразим переменные  $x, y, z$  через  $u, v, w$ . Переменные  $x, y, z$  положительны по условию. Из двух последних равенств замены получаем

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{vw}, \quad x = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad x^2 + y^2 = vw + \frac{v}{w} = \frac{v(w^2 + 1)}{w}, \\ z &= \frac{x^2 + y^2}{u} = \frac{v(w^2 + 1)}{uw}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot z \cdot \frac{z}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{v(w^2 + 1)}{uw} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{2} \frac{v(w^2 + 1)}{u^2 w^2}. \end{aligned}$$

Переходим к нахождению интеграла:

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz \\ &= \int_m^n du \int_{a^2}^{b^2} dv \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{vw} \sqrt{\frac{v}{w}} \frac{v(w^2 + 1)}{uw} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v(w^2 + 1)}{u^2 w^2} dw \\ &= \frac{1}{2} \int_m^n \frac{du}{u^3} \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(w^2 + 1)^2}{w^3} dw \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{u^2} \Big|_m^n \cdot \frac{1}{4} v^4 \Big|_{a^2}^{b^2} \cdot \left(\frac{1}{2} w^2 + 2 \ln w - \frac{1}{2w^2}\right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) (b^8 - a^8) \left(\beta^2 - \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

### 19.9. Задачи.

1. Вычислить интеграл  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  от следующих функций  $f$  по следующим областям  $\Omega$ :

(1)  $f(x, y, z) = z$ ,  $\Omega$  ограничена поверхностями  $R^2 z^2 = h^2(x^2 + y^2)$ ,  $z = h$ ,  $h > 0$ ;

(2)  $f(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$ ,  $\Omega$  ограничена поверхностями  $y^2 + z^2 = R^2$ ,  $y + x = R$ ,  $y - x = R$ ,  $R > 0$ ;

(3)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ ,  $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, y \geq 0, z \geq 0\}$ ;

(4)  $f(x, y, z) = x + z$ ,  $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ;

(5)  $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq y\}$ .

2. Найти

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

где  $m, n, p$  — целые неотрицательные числа.

3. Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s dx dy dz,$$

где область  $V$  ограничена плоскостями

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

полагая

$$x + y + z = \xi, \quad y + z = \xi\eta, \quad z = \xi\eta\zeta.$$

19.10. Аналогично двойному, тройной интеграл  $\iiint_{\Omega} dx dy dz$  по  $\Omega$  от единичной функции равен объему тела  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

19.11. Задачи. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

(1)  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x + y + z = a$ ,  $x + y + z = -a$ ;

(2)  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = x^2 + y^2$ ;

(3)  $z = xy$ ,  $z = x + y$ ,  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;

(4)  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = x + y$ ;

$$(5) \quad x^2 + y^2 = x, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0;$$

$$(6) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad z = 0;$$

**19.12. Физические приложения.** Пусть  $G$  — тело в  $\mathbb{R}^3$  (телом будем считать связное замкнутое множество, совпадающее с замыканием своей внутреннейности). Если функция  $\rho(x, y, z)$  — плотность тела  $G$ , то число

$$M = \iiint_G \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

называют *массой* тела  $G$ , а точку  $C$  с координатами

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_G x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad y_G = \frac{1}{M} \iiint_G y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_G z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

— *центром масс* тела  $G$ .

Величины

$$M_{yz} = Mx_G, \quad M_{zx} = My_G, \quad M_{xy} = Mz_G$$

называют *статическими моментами* тела  $G$  относительно координатных плоскостей  $yOz$ ,  $zOx$  и  $xOy$ .

*Моментом инерции* тела  $G$  относительно оси  $l$  называют величину

$$I_l = \iiint_G d_l^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

где  $d_l = d_l(x, y, z)$  — расстояние от точки  $(x, y, z)$  до оси  $l$ . В частности, момент инерции относительно координатной оси  $Ox$  находится по формуле

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

формулы для  $I_y$  и  $I_z$  аналогичны.

Моменты инерции  $I'_{xy}$ ,  $I'_{yz}$ ,  $I'_{zx}$  относительно координатных плоскостей  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $zOx$  определяют по формулам

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad I_{yz} = \iiint_G x^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_{zx} = \iiint_G y^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Момент инерции тела относительно точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  определяются по формуле

$$I_{M_0} = \iiint_G d_{M_0}^2(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

где  $d(x, y, z)$  — расстояние от точки  $(x, y, z)$  тела до точки  $M_0$ . В частности: если  $M_0$  — начало координат, то

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

### 19.13. Задачи.

1. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  следующих тел с плотностью 1:

(1)  $2ax \geq z^2, \quad x^2 + y^2 \leq ax,$

(2)  $x^2 + y^2 \leq a^2, \quad x + y + z \leq a\sqrt{2}, \quad z \geq 0.$

Ответы: (1)  $\frac{64\sqrt{2}}{135}a^5$ , (2)  $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}.$