§ 20. Несобственный интеграл

20.1. Несобственные кратные интегралы. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Последовательность Ω_k, $k \in \mathbb{N}$, называют *исчерпывающей множество* Ω, если

1) $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$;

Будем рассматривать только такие функции на Ω, которые интегрируемы на любом открытом множестве D таком, что $\overline{D} \subset \Omega$.

Если для любой последовательности исчерпывающих множеств Ω_k, $k \in \mathbb{N}$, существует не зависящий от выбора последовательности Ω_k, $k \in \mathbb{N}$, предел

$$\lim_{k\to\infty} \int\cdots\int\limits_{\Omega_k} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

его называют *несобственным интегралом от функции* f *по области* Ω и используют обозначение

$$\int\cdots\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\cdots\int\limits_{\Omega_k} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

а f называют *интегрируемой в несобственном смысле на* Ω.

Сходящиеся несобственные интегралы обладают свойствами линейности, положительности и аддитивности по множествам интегрирования, для них справедлива формула замены переменной в обычном виде.

Для исследования сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции достаточно использовать какую-либо одну последовательность исчерпывающих множеств — для таких функций существование соответствующего предела и его величина не зависит от выбора последовательности исчерпывающих множеств.

Несобственный интеграл называют *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл от модуля функции. Известно, что *если кратный интеграл при условии* $n \geqslant 2$ *на размерность пространства* n *сходится, то он и абсолютно сходится.* Это утверждение подчеркивает различие подходов к несобственным интегралам в одномерном и в многомерном случаях.

20.2. Задачи.

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$, **(2)** $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^4+y^4)^\alpha}$,

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{x^\alpha+y^\beta}$, $\Omega = \{x>0,\ y>0,\ x^\alpha+y^\beta>1\}$, $\alpha, \beta > 0$,

(4) $\displaystyle\iint\limits_{y>1+x^2} \frac{dxdy}{(x+y)^p}$,

(5) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\Omega = \{x^2+y^2<1,\, x>0,\, 0<y<x^2\}$,

(6) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, $\Omega = \{x>0,\, y>0,\, x+y<1\}$,

(7) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$, **(8)** $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

2. Показать, что интеграл

$$\iint\limits_{\substack{x>1,\\ y>1}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$\int\limits_1^\infty dx \int\limits_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy, \quad \int\limits_1^\infty dy \int\limits_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx$$

сходятся.

3. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|<n,\\ |y|<n}} \sin(x^2+y^2)\, dxdy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2<2\pi n} \sin(x^2+y^2)\, dxdy = 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$.