§ 21. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода

21.1. Пусть f — функция n переменных $x_1, \dots, x_n$, определенная по крайней мере в точках некоторой кривой γ в $\mathbb{R}^n$. Не оговаривая особо, в дальнейшем для простоты будем считать все рассматриваемые функции непрерывными или по крайней мере кусочно непрерывными. Пусть $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, — параметризация кривой γ, т. е. гладкое невырожденное взаимно однозначное отображение промежутка $\langle a, b\rangle$ числовой прямой на γ. Определим *интеграл от f по кривой γ первого рода*, (будем также говорить *интеграл от f вдоль γ по элементу длины*), полагая

$$\int\limits_\gamma f(x_1, \dots, x_n)\, ds = \int\limits_a^b f(x_1(t), \dots, x_n(t)) k(t)\, dt, \tag{21.1}$$

где $k(t) = \sqrt{(x_1')^2(t) + \dots + (x_n')^2(t)}$ — коэффициент искажения длины, связанный с данной параметризацией. Нетрудно заметить, что коэффициент искажения длины равен модулю вектора скорости при движении по кривой, или, иначе, длине вектора $(x_1'(t), \dots, x_n'(t))$, касательного к кривой γ в точке $t \in \langle a, b\rangle$.

В определении криволинейного интеграла 1-го рода участвует параметризация кривой. Однако значение интеграла не зависит от параметризации и тем самым полностью определяется кривой γ и функцией f. Символ ds в обозначении интеграла указывает на то, что интеграл берется по элементу длины кривой.

Для размерностей $n = 2$ и $n = 3$ для точек $(x_1, \dots, x_n)$ используют более привычные обозначения (x, y) и (x, y, z) соответственно.

Согласно определению интеграла для его нахождения следует параметризовать кривую (если она задана не параметрически), перенести функцию в область параметров и найти интеграл вида (21.1) по промежутку.

21.2. Криволинейный интеграл обладает обычными для интеграла свойствами линейности (относительно функции при фиксированной кривой) и аддитивности (относительно кривой при фиксированной функции). Приведем точную формулировку.

Утверждение 1 (линейность интеграла). *Пусть даны кривая*

$\gamma \subset \mathbb{R}^n$ *и заданные на ней функции* $f(x_1, \dots, x_n)$ *и* $g(x_1, \dots, x_n)$. *Тогда*

$$\int\limits_\gamma (\alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta g(x_1, \dots, x_n))\, ds$$

$$= \alpha \int\limits_\gamma f(x_1, \dots, x_n)\, ds + \beta \int\limits_\gamma g(x_1, \dots, x_n)\, ds. \quad (21.2)$$

Утверждение 2 (аддитивность интеграла). *Пусть кривая* γ *представлена в виде объединения конечного набора попарно не пересекающихся кривых* $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. *Тогда для функции* f, *заданной на* γ, *имеет место равенство*

$$\int\limits_\gamma f(x_1, \dots, x_n)\, ds = \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{\gamma_l} f(x_1, \dots, x_n)\, ds. \quad (21.3)$$

21.3. Задачи. Найти интегралы от заданных функций по указанным кривым:

(1) $\int\limits_\gamma (x + y)\, ds$, γ — граница треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$;

(2) $\int\limits_\gamma xy\, ds$, где γ — четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте;

(3) $\int\limits_\gamma y^2\, ds$, где γ — арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

(4) $\int\limits_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$, где γ — часть винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

21.4. С геометрической точки зрения криволинейный интеграл первого рода от единичной функции равен длине кривой, по которой происходит интегрирование.

21.5. Задачи. Найти длины кривых:

(1) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ от $O(0, 0, 0)$ до $A(3, 3, 2)$;

(2) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$ при $0 < t < +\infty$.

21.6. Рассмотрим поверхность S в трехмерном пространстве переменных (x, y, z) и определенную на S функцию $f(x, y, z)$. Для простоты будем, не оговаривая, считать, что f кусочно непрерывна. Предположим, что S допускает параметризацию, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$, — какая-либо параметризация S. Число

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))k(u, v)\, dudv, \tag{21.4}$$

где $k(u, v)$ — коэффициент искажения площади при параметризации Φ, называют *поверхностным интегралом первого рода от функции f по поверхности S*.

Коэффициент искажения $k(u, v)$ находится следующим образом. Рассмотрим векторы

$$\begin{gathered} \boldsymbol{r}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\right), \\ \boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\right) \end{gathered} \tag{21.5}$$

Найдем скалярные произведения

$$E = \langle \boldsymbol{r}_1 | \boldsymbol{r}_1 \rangle, \quad F = \langle \boldsymbol{r}_1 | \boldsymbol{r}_2 \rangle, \quad G = \langle \boldsymbol{r}_2 | \boldsymbol{r}_2 \rangle, \tag{21.6}$$

т. е.

$$\begin{gathered} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\right)^2, \\ F = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\frac{\partial z}{\partial v}(u, v), \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\right)^2, \end{gathered} \tag{21.7}$$

и тогда

$$k(u, v) = \sqrt{EG - F^2}. \tag{21.8}$$

Можно найти $k(u, v)$ и по такой формуле:

$$k(u, v) = \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2}. \tag{21.9}$$

Сопоставляя последние формулы с материалом п. 22.18, можно заметить, что они выражают площадь малого куска поверхности вблизи точки $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Как и криволинейный интеграл первого рода, поверхностный интеграл также обладает свойствами линейности и аддитивности. Точные формулировки аналогичны соответствующим для криволинейного интеграла, и мы оставляем их читателю.

21.7. Задачи. Найти поверхностные интегралы первого рода от заданных функций по указанным поверхностям:

(1) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, где

(a) S — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$,

(b) S — поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$;

(2) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$, где

(a) S — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$,

(b) S — поверхность куба $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$, $|z|\leqslant a$,

(3) $\displaystyle\iint_S (xy+yz+zx)\,dS$, где S — часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, расположенная внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$;

(4) $\displaystyle\iint_S z^2\,dS$, где S — поверхность $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, $u\in[0,1]$, $v\in[0,2\pi]$.

21.8. Ответы. К п. 21.3. (1) $1+\sqrt{2}$; (2) $ab(a^2+ab+b^2)/(3(a+b))$; (3) $\frac{256}{15}a^3$; (4) $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$. К п. 21.5. (1) 5; (2) $\sqrt{3}$. К п. 21.7. (1) (a) $8\pi\frac{R^4}{3}$, (b) $\pi\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; (2) (a) $4\pi R^4$, (b) $40a^4$; (3) $\frac{64\sqrt{2}}{15}$; (4) $\pi^3(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.