4. Предел последовательности

Предел последовательности. Пусть даны последовательность x_n и число a. Договоримся о том, как математически выразить интуитивно ясное представление о том, что последовательность x_n неограниченно приближается к числу a, т. е. значения x_n при неограниченном увеличении n становятся всё ближе и ближе к a

Сначала обратимся к геометрической поддержке. Так как *последовательность* — это функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для ее геометрического представления можно использовать график как множество всех упорядоченных пар (n, x_n) на координатной плоскости. Правда, в этом случае сплошной линии, как у графиков обычных функций, не получится, а будет «пунктирное» множество, но это обстоятельство не должно нас смущать.

Изобразим координатную плоскость, на которой по оси абсцисс отметим натуральные $n = 1, 2, \ldots$ и над каждой отмеченной точкой на высоте x_n поместим в виде точки значение x_n последовательности. На оси ординат отметим точку a (рис. 1).

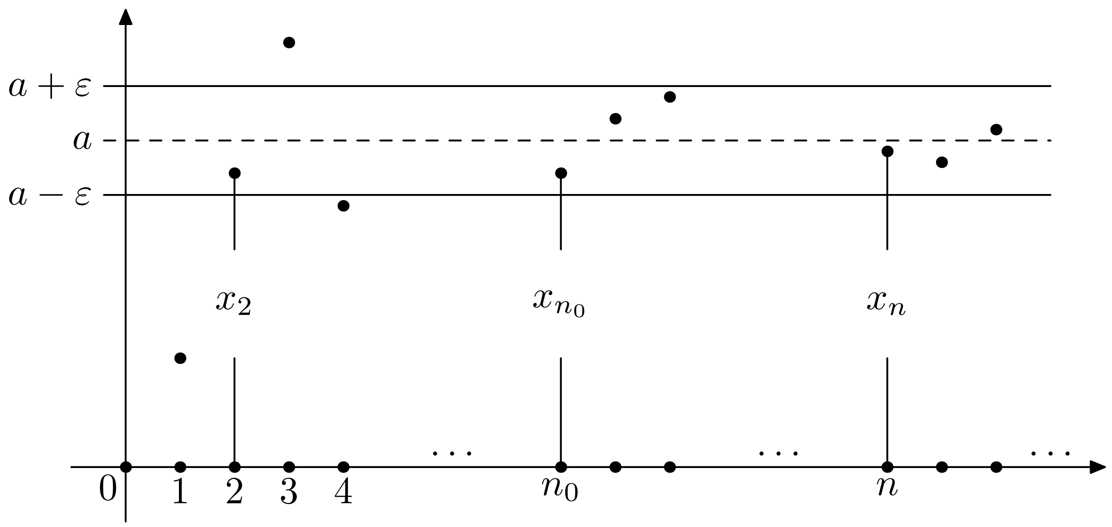

Рис. 1

Поскольку нас интересует неограниченное приближение x_n к a «в перспективе», при далеких номерах n, расположение последовательности при начальных номерах нас не интересует. Представим себе, что есть два участника договоренности: **Вы** и **Я**. Вы намерены убедить меня в том, что последовательность x_n неограниченно приближается к a, и если удастся это сделать, то мы вместе назовем это обстоятельство выражениями «a есть *предел* последовательности x_n» или «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» (последние выражения не следует понимать буквально, это термины, которые означают лишь то, что за ними кроется).

Так как Вы убеждаете меня в неограниченном приближении, Я, естественно, должен проверять, насколько значения x_n отличаются от величины a, для чего приготовлю число, которым буду измерять точность приближения, или, иначе говоря, степень отклонения x_n от a. Естественно, число должно быть положительным. Я буду обозначать его греческой буквой ε. Согласно договору приближение должно быть неограниченным, т. е. надо гарантировать невозможность вставить границу между значениями x_n с далекими номерами и числом a. Это можно гарантировать, например, такой процедурой. Я буду предлагать Вам какое-то, неизвестное Вам заранее значение $\varepsilon > 0$, а от Вас буду ожидать, что Вы обеспечите отклонение x_n от a в пределах заданной точности ε для всех далеких номеров n, т. е. сумеете найти такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ отклонение x_n от a будет в пределах от $-\varepsilon$ до ε. Последнее можно выразить так: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, или так: $|x_n - a| < \varepsilon$. Обратившись к рис. 1, об этом можно сказать так: Вы обеспечите такой номер n_0, что для всех n, лежащих правее от этого номера, отмеченные на высоте x_n точки, изображащие элементы последовательности, окажутся в полосе между горизонтальными линиями, проведенными на высотах $a-\varepsilon$ и $a + \varepsilon$. Если Вы не можете обеспечить отклонение x_n от a в пределах заданной мной точности $\varepsilon > 0$ для всех далеких номеров n, то Я не готов согласиться с тем, что x_n неограниченно приближается к a.

Сформулируем договоренность в математических терминах.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ будем называть *пределом последовательности* x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, при этом будем использовать обозначение $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Часть обозначения вида $n \to \infty$ подчеркивает, что мы оцениваем близость x_n к a при неограниченном возрастании номеров n. Часто в этом случае говорят «при n, стремящемся к бесконечности». Заметим однако, что каждое число находится на своем месте и никуда не стремится, тем самым эту фразу не следует воспринимать буквально. Это всего лишь фрагмент термина, за которым скрывается определенное содержание. Поскольку ни при каких других обстоятельствах мы оценивать отклонение x_n от a не будем, в обозначениях часть $n \to \infty$ иногда (даже, скорее всего, всегда, если достаточно ясно, по какой переменной происходит переход к пределу) будем опускать и писать просто $a = \lim x_n$.

Тот факт, что $a = \lim x_n$, выражают также словами «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» и записывают $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ или, короче, $x_n \to a$.

Если последовательность имеет (конечный) предел, то ее называют *сходящейся*.

Обсудим, как доказывать тот факт, что $a = \lim x_n$, и выработаем признак конца доказательства. Поскольку конструкция предела последовательности похожа на конструкцию неограниченности функции, ясно, что и обсуждение будет аналогичным рассмотрению свойства неограниченности.

Поскольку здесь есть внешнее, от нас не зависящее требование $\forall \varepsilon > 0$, мы должны выработать **правило поиска** требуемого далее значения $n_0 \in \mathbb{N}$ в зависимости от какого-то нам неизвестного значения ε. Рассуждение, посвященное подбору n_0, надо начинать, например, так: пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Этим мы подчеркиваем, что готовы к выработке правила. После этого надо пойти в конец и посмотреть, что от нас ожидают. А от нас ожидают, что мы для произвольного $n \geqslant n_0$ гарантируем оценку $|x_n - a| < \varepsilon$, где n_0 нам предстоит указать.

Для выбора номера n_0, начиная с которого будет выполнена требуемая оценка, попробуем *ограничить сверху разность* $|x_n - a|$ *чем-то более простым, но все еще малым*. Иначе говоря, попробуем подобрать такую последовательность a_n, что $|x_n - a| \leqslant a_n$ и есть шанс подобрать по заданному $\varepsilon > 0$ номер n_0 для последовательности a_n так, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Если ясно, как это сделать, то найденный номер n_0 подойдет и для разности $|x_n - a|$ — она ведь не больше чем a_n и тем более будет меньше чем ε. Если еще недостаточно видно, как подобрать номер для последовательности a_n, то, в свою очередь, можно попробовать ограничить ее другой последовательностью, более простой, но все еще малой. И так продолжать процесс до тех пор, пока не появится последовательность, для которой требуемый номер найти уже легко. Как только нам удастся выработать правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$, доказательство закончится.

Можно рассуждать несколько иначе. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Обратимся к тому, что от нас потребуется. Мы должны обеспечить выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех достаточно далеких номеров n. Поставим вопрос: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Иначе говоря, из какого соотношения это неравенство вытекает? Если взять последовательность a_n такую, что $|x_n - a| \leqslant a_n$, и найти номер n_0 такой, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$, то для этих же номеров n будет выполнено и требуемое неравенство. Если для последовательности a_n выбор номера затруднен, то процесс можно продолжить и вновь обратиться к вопросу: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Ответ на него может привести к другой последовательности, и так следует продолжать процесс до тех пор, пока не найдется такая последовательность, для которой выбор номера тривиален.

Эти рассуждения относятся, скорее, к доказательству равенства $a = \lim x_n$ для конкретной последовательности x_n. Отчасти их можно применять и тогда, когда речь идет о доказательстве утверждений с участием предела. Однако если для конкретной последовательности выбор номера обеспечивается ограничением сверху какими-то также конкретными последовательностями, то в утверждениях выбор требуемого номера, как правило, обеспечивается ограничениями сверху, исходящими из предельных свойств, данных в условии.

Пример 1. Докажем, что

$$\lim \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} = 0. \qquad (2.7)$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Пойдем в конец определения предела последовательности и посмотрим, что от нас будут ожидать. От нас потребуется обеспечить выполнение неравенства

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| < \varepsilon$$

для всех далеких номеров. Попробуем ограничить левую часть последнего неравенства сверху чем-то более простым, но все еще малым. Заметив, что $|\sin n^2| \leqslant 1$, имеем

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| \leqslant \frac{n}{n^4 + 1}.$$

Легко ли подобрать требуемый номер, исходя из новой последовательности, т. е. насколько легко выразить n через ε из неравенства

$$\frac{n}{n^4 + 1} < \varepsilon?$$

По-видимому, не столь легко, сколь хотелось бы. Поэтому попробуем ограничить выражение $\dfrac{n}{n^4+1}$ сверху сверху чем-то более простым, но все еще малым. Уменьшив знаменатель, мы увеличим дробь, поэтому

$$\frac{n}{n^4+1} \leqslant \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Легко ли выразить n через ε из неравенства $\dfrac{1}{n^3} < \varepsilon$? Легко. Можно выразить, а можно еще облегчить выражение, если заметить, что $\dfrac{1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n}$, а из неравенства $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ выразить n через ε совсем легко. Последнее неравенство равносильно тому, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, и в качестве требуемого номера n_0 можно взять любое натуральное число, большее чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Например, можно взять $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где взятие целой части (символизируют квадратные скобки) «обнатураливает» дробь $\dfrac{1}{\varepsilon}$, при этом, возможно, немного уменьшая ее, а добавление единицы делает результат бо́льшим, чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Если $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то для любого $n \geqslant n_0$ тем более $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, а тогда, пользуясь логикой предыдущих рассуждений, можно гарантировать, что для таких номеров также

$$\left|\frac{n \sin n^2}{n^4+1}\right| < \varepsilon.$$

Правило выбора требуемого номера n_0 по заданному ε сформировано, значит, соотношение (2.7) доказано.

Покажем, как происходит выбор номера в доказательствах утверждений, связанных с пределом. Для этого сформулируем и докажем теорему о пределе произведения двух сходящихся последовательностей.

Пример 2. Теорема о произведении двух сходящихся последовательностей. *Пусть последовательности x_n и y_n сходятся и*

$$a = \lim x_n, \quad b = \lim y_n.$$

Тогда последовательность $x_n y_n$, представляющая собой произведение данных последовательностей, также сходится и при этом

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Коротко об утверждении этой теоремы говорят так: *предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов.*

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность $|x_n y_n - ab|$ с целью выработать такое правило выбора номера n_0, зависящего, разумеется, от ε, что для всех следующих за ним номеров n будет $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$.

Ясно, что без использования условия нам не обойтись. Что же нам дано в условии? Распишем по определению данные в условии предельные соотношения:

$$\forall \varepsilon_1 > 0\, \exists n_1\, \forall n \geqslant n_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon_1, \tag{2.8}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0\, \exists n_2\, \forall n \geqslant n_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon_2. \tag{2.9}$$

Обратим внимание на то, что утверждения (2.8) и (2.9) нам даны по условию, поэтому величины ε_1 и ε_2 мы можем выбирать по нашему усмотрению и использовать гарантируемые числа n_1, n_2 в наших целях.

Для использования утверждений (2.8), (2.9) надо оценить сверху разность $|x_n y_n - ab|$ так, чтобы участвовали разности $|x_n - a|$ и $|y_n - b|$. Затем, беря ε_1 и ε_2 в зависимости от данного $\varepsilon > 0$, с учетом проводимых оценок получим сначала номера n_1 и n_2, а затем на их основе обеспечим требуемый номер n_0 для разности $|x_n y_n - ab|$.

Воспользуемся мощным методом доказательства, заключающемся в прибавлении нуля. Это безопасная операция, так как она ничего не изменяет. Конечно, нуль прибавлять будем не просто так, а в виде добавления к разности $x_n y_n - ab$ какого-то выражения и одновременного его вычитания. Успех применения метода зависит от подбора добавляемого и вычитаемого выражения. Нам хотелось связать нашу разность с теми разностями, о которых говорится в условии, т. е. с разностями $x_n - a$ и $y_n - b$. Поэтому неудивительно, что мы добавим к разности $x_n y_n - ab$ и отнимем от нее, например, выражение $a y_n$ (или $b x_n$). Производя нехитрые действия и пользуясь неравенством треугольника, получим

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \\ &= |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Итак, мы ограничили нашу разность сверху чем-то более связанным с условием, чем сама разность. Займемся правой частью неравенства. Чтобы сумму сделать меньшей чем ε, достаточно сделать каждое из слагаемых, например, меньшим чем $\varepsilon/2$.

Первое слагаемое представляет собой произведение $|x_n - a||y_n|$, из множителей которого первый можно сделать сколь угодно малым. Проделаем процедуру, показывающую, как учесть наличие второго множителя. Так как $\lim y_n = b$, имеет место высказывание (2.9), взяв в котором в качестве ε_2, например, число 1 (мы можем это сделать, ибо (2.9) нам дано по условию), получим существование такого номера n', что $|y_n - b| < 1$ для любого $n \geqslant n'$, откуда, вновь используя прибавление нуля, получаем, что

$$|y_n| = |y_n - b + b| \leqslant |y_n - b| + |b| < 1 + |b|$$

для любого $n \geqslant n'$.

Мы подготовились к выработке правила выбора номера, начиная с которого первое слагаемое будет меньше чем $\varepsilon/2$. Поскольку высказывание (2.8) нам дано по условию, мы вправе выбрать в нем в качестве ε_1 любое положительное число. Возьмем $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$. Тогда согласно (2.8) существует номер n_1 такой, что $n_1 \geqslant n'$ и для любого $n \geqslant n_1$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}. \tag{2.11}$$

Перейдем ко второму слагаемому. С ним дело обстоит проще, чем с первым, так как в нем множитель при модуле разности постоянен. Если $a = 0$, то второе слагаемое равно нулю и заведомо меньше чем $\varepsilon/2$ при любом n. Пусть $a \neq 0$. Высказывание (2.9), в котором в качестве ε_2 возьмем величину $\dfrac{\varepsilon}{2|a|}$, гарантирует наличие номера n_2 такого, что для любого $n \geqslant n_2$ будет

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}. \tag{2.12}$$

Если в качестве номера n_0 взять наибольший из номеров n_1, n_2, т. е. положить $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то для $n \geqslant n_0$ выполнены одновременно соотношения (2.11) и (2.12). Следовательно, для любого $n \geqslant n_0$ (считая $a \neq 0$, для $a = 0$ ситуация только упрощается) имеем

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \\ &\leqslant |y_n|\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$ выработано, значит, утверждение доказано.

Задачи.

1. Доказать равенства

$$\textbf{(1)}\quad \lim \frac{n}{n+1} = 1, \qquad \textbf{(2)}\quad \lim \frac{1}{n!} = 0,$$

$$\textbf{(3)}\quad \lim \frac{n^2 \sin n!}{(n+1)^3} = 0, \qquad \textbf{(4)}\quad \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

2. Доказать равенства

$$\textbf{(1)}\quad \lim \frac{2^n}{n!} = 0, \qquad \textbf{(2)}\quad \lim \frac{a^n}{n!} = 0,$$

$$\textbf{(3)}\quad \lim \frac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1, \qquad \textbf{(4)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,\ a > 1,\ k \in \mathbb{R},$$

$$\textbf{(5)}\quad \lim \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0, \qquad \textbf{(6)}\quad \lim nq^n = 0,\ |q| < 1,$$

$$\textbf{(7)}\quad \lim \sqrt[n]{n} = 1, \quad \textbf{(8)}\quad \lim \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad \textbf{(9)}\quad \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

3*. Доказать, что если последовательность x_n сходится, то последовательность средних арифметических $a_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ также сходится, при этом $\lim a_n = \lim x_n$. Обратное неверно.

Бесконечные пределы последовательностей. Говорят, что предел последовательности x_n равен $+\infty$ или $-\infty$, или ∞ и пишут соответственно $\lim x_n = +\infty$, $\lim x_n = -\infty$, $\lim x_n = \infty$, если

$$(\forall \mathrm{E} > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\ x_n > \mathrm{E} \quad (\text{соответственно } x_n < -\mathrm{E},\ |x_n| > \mathrm{E}).$$

О последовательности с бесконечным пределом говорят, что она *бесконечно большая.* Если последовательность имеет конечный предел, ее называют *сходящейся.* Если $\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, то говорят, что последовательность *имеет предел* (в $\overline{\mathbb{R}}$).

Задачи.

1. Доказать, что последовательность $x_n = n^2 \cos \dfrac{n\pi}{2}$ неограниченная, но не является бесконечно большой.

2. Доказать, что (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\log_a n)^p = +\infty$, $a > 1$, $p \geq 1$; (2) $\lim(4\sqrt{n} - n) = -\infty$.

Утверждение. *Если x_n, y_n — сходящиеся последовательности и $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, то последовательности $x_n + y_n$, $x_n \cdot y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ также сходятся (последняя при условии $y \neq 0$), при этом*

$$\lim(x_n + y_n) = x + y, \quad \lim x_n y_n = xy, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Задача. Пусть последовательность x_n сходится, а y_n расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей $x_n + y_n$, $x_n y_n$?

Критерий Коши сходимости последовательности. Как можно заметить, в определении предела участвует само значение предела. Однако бывает важно всего лишь знать, сходится последовательность или нет. Сформулированный ниже критерий дает принципиальную возможность судить о сходимости числовой последовательности, не прибегая к значению ее предела.

Определение. Последовательность x_n называют *фундаментальной*, или *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*, если

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall m > n_0\, \forall n > n_0) \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Условие фундаментальности иногда удобно использовать в следующем виде:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n > n_0\, \forall p \geq 0) \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Критерий Коши. *Для существования конечного предела числовой последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Задачи.

1. Используя критерий Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n, \quad |a_k| \leq M,\ k = 0, 1, \dots,\ |q| < 1; \tag{1}$$

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}; \tag{2}$$

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}; \tag{3}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}. \tag{4}$$

2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$