5. Предел функции

Определение. Точку $p \in \mathbb{R}$ называют *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) *множества* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, для любого $r > 0$ существует отличная от p точка $x \in X$ такая, что $|x - p| < r$. Говорят, что $+\infty$ (соответственно $-\infty$) является предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если для любого r найдется такое $x \in X$, что $x > r$ (соответственно $x < r$).

Говоря о пределе функции в конечной или бесконечной точке, всегда, не оговаривая каждый раз, будем предполагать, что эта точка предельная для области определения функции.

Пусть даны функция f и точка $a \in \mathbb{R}$, предельная точка области ее определения.

Определение. Число $l \in \mathbb{R}$ называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $|x-a| < \delta$ и $x \neq a$, выполнено неравенство $|f(x)-l| < \varepsilon$. При этом используют такие обозначения: $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, и говорят также, что l есть *предел* $f(x)$ *при* x*, стремящемся к* a, или что f *сходится к* l *при* x*, стремящемся к* a.

Используя кванторы, соотношение $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x,\ |x-a| < \delta,\ x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

или так:

$$(\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in (a-\delta, a+\delta),\ x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Говорят, что пределом функции f в точке $a \in \mathbb{R}$ является $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если для любого ε найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$, для которого $|x-a| < \delta$ и $x \neq a$, выполнено неравенство $f(x) > \varepsilon$ (соответственно $f(x) < \varepsilon$).

При этом используют такие обозначения: $+\infty = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ (соответственно $-\infty = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$).

Число $l \in \mathbb{R}$ (соответственно $+\infty$, $-\infty$) называют *пределом функции* $f(x)$ *при* x*, стремящемся к* $+\infty$ $(-\infty)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $x > \delta$ (соответственно $x < \delta$), выполнено неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ (соответственно $f(x) > \varepsilon$, $f(x) < -\varepsilon$). При этом используют обозначения, аналогичные данным выше, с очевидными изменениями, и говорят также, что l (соответственно

$+\infty$, $-\infty$) есть *предел $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$* (соответственно $-\infty$).

Теорема (определение предела функции с использованием предела последовательности). *Пусть даны функция f и точка a, предельная точка области ее определения. Число $l \in \mathbb{R}$ (соответственно $+\infty$, $-\infty$) является пределом функции f в точке a (на $+\infty$ или $-\infty$) в том и только в том случае, если для любой последовательности x_n из $D(f)$ такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ (соответственно $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$) и $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$$

(соответственно $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \pm\infty$).

Сформулированный критерий бывает полезен при доказательстве отсутствия какого-либо предела у функции f в точке a: достаточно найти две последовательности x_n', x_n'', удовлетворяющие указанным в теореме требованиям и такие, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n'')$.

односторонние пределы. Говорят, что $l \in \overline{\mathbb{R}}$ есть *предел $f(x)$ при x, стремящемся к $a \in \mathbb{R}$ слева* (*справа*), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D(f)$ таких, что $a - \delta x < a$ (соответственно $a < x < a + \delta$) выполнено соотношение $|f(x) - l| < \varepsilon$ (соответственно $f(x) > \varepsilon$, $f(x) < -\varepsilon$). При этом используют обозначения $l = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $l = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ соответственно. О пределах слева и справа говорят как об *односторонних пределах*.

Приведем формулировки теорем о пределах, которые будут использованы ниже при нахождении пределов конкретных функций.

Теорема (о связи предела с арифметическими операциями). *Пусть даны функции f, g, заданные на множестве X, и точка a, предельная точка множества X. Предположим, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда существуют пределы $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$, $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)$, а если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то и предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x)$, при этом*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Теорема (о пределе композиции, или о замене переменной). *Предположим, что существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{y\to l} g(y) = b$ *в расширенной числовой прямой* $\overline{\mathbb{R}}$. *Предположим, что, кроме того, выполняется по крайней мере одно из условий*

(1) *для* x *из некоторой окрестности точки* a, $x \neq a$, *будет* $f(x) \neq l$,

(2) *точка* l *входит в область определения функции* g *и* $\lim\limits_{y\to l} g(y) = g(l)$ (т. е. g непрерывна в точке l).

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = b$.

В случае выполнения условия (2) теоремы ее результат можно записать в виде $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x\to a} f(x))$, т. е. знак предела можно внести внутрь функции g.

Применение теоремы о замене переменной обычно происходит следующим образом. Допустим, нам надо найти предел функции $h(x)$ при $x \to a$. Допустим, нам удалось так преобразовать данную функцию, что в ней оказался выделенным какой-то блок, который могли бы обозначить новой буквой, т. е. нам удается представить функцию $h(x)$ в виде композиции $h(x) = g(f(x))$. Если теперь положим $y = f(x)$ и найдем, что выполнены условия теоремы о пределе композиции, т. е. существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, существует $\lim\limits_{y\to l} g(y) = b$, а также выполнены условия пунктов (1) или (2) теоремы, то результат ее гарантирует существование предела $\lim\limits_{x\to a} h(x)$, равного b. Иначе говоря, нахождение предела сложной функции эта теорема позволяет сводить к нахождению пределов более простых функций, ее составляющих.

Теорема (о пределе монотонной функции). *Пусть функция* f *возрастает на множестве* $(a-r, a) \cap D(f)$ *или на множестве* $(a, a+r) \cap D(f)$ *при некотором* $r > 0$. *Тогда существуют соответственно*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D(f),\ x \in (a-r, a)\},$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D(f),\ x \in (a, a+r)\}.$$

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для убывающей вблизи точки a функции.

Теорема (о пределе произведения бесконечно малой на ограниченную). *Пусть* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, *а функция* g *ограничена в некоторой окрестности точки* a. *Тогда* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции в точке) *Пусть даны функция* f *и точка* a, *предельная точка области ее определения. Для существования конечного предела функции* f *в точке* a *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *можно было указать такую окрестность* V *точки* a, *что для любых* $x', x'' \in V$ *таких, что* $x' \neq a$, $x'' \neq a$, *выполнялось неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Техника нахождения предела функции в точке с использованием замечательных пределов. При нахождении пределов будем использовать небольшой набор пределов, называемых обычно *замечательными пределами.* В нем собраны пределы, отражающие предельные свойства основных элементарных функций:

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = e, \tag{1}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1, \tag{2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{a^z - 1}{z} = \ln a, \tag{3}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z} = 1, \tag{4}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^\mu - 1}{z} = \mu. \tag{5}$$

Кроме выписанных будем также использовать равенство, отражающее сравнительный рост показательной и степенной функций:

$$\lim_{z\to +\infty}\frac{a^z}{z^\alpha} = +\infty \quad \text{для любых } a > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

При нахождении пределов надо пользоваться теоремами о пределах суммы, произведения, отношения, композиции, если выполнены их условия. Однако определенную трудность вызывают ситуации, когда не выполнены условия утверждения, которое следовало бы применить. Так бывает, например, когда рассматривается предел отношения, но пределы знаменателя и числителя равны нулю или бесконечны. В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность соответствующего вида, например, вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, и при нахождении предела такую неопределенность надо «раскрыть», т. е. провести такие преобразования, которые ее исключили бы. Кроме указанных встречаются также неопределенности вида 0^0, $0 \cdot \infty$, 1^∞ — это значит, что рассматриваются соответственно пределы

$$\lim_{x \to p} f(x)^{g(x)} \ (f(x) > 0), \quad \lim_{x \to p} f(x) \cdot h(x), \quad \lim_{x \to p} l(x)^{h(x)},$$

где

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0, \ \lim_{x \to p} g(x) = 0, \ \lim_{x \to p} h(x) = \infty, \ \lim_{x \to p} l(x) = 1.$$

Для раскрытия первых двух полезно иметь в виду соотношения

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad f(x)h(x) = \frac{f(x)}{1/h(x)} = \frac{h(x)}{1/f(x)}.$$

В случае неопределенности вида 1^∞ можно обратить к замечательному пределу (1) либо использовать равенство $a^b = e^{b \ln a}$.

При нахождении пределов будем использовать следующее легко устанавливаемое равенство:

$$\lim_{x \to p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to p} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to p} g(x) \ln f(x)},$$

если только $\lim\limits_{x \to p} g(x) \ln f(x)$ существует (хотя бы бесконечный). В частности, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = a^b. \tag{7}$$

Примеры.

1. Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

Заметим, что имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как предел числителя и предел знаменателя равны бесконечности. Преобразуем знаменатель, выделив отдельно стремящуюся к бесконечности переменную: $(2x-1)^4 = x^4(2-1/x)^4$. Совершая аналогичное преобразование в числителе и применяя теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{x^4(2-1/x)^4}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{(2-1/x)^4} = \frac{49}{16}.$$

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$.

Здесь имеем дело с неопределенностью вида $\infty-\infty$ (ранее в тексте не отмеченной, ибо такие неопределенности проще раскрывать с помощью преобразований конкретных выражений). Умножив и разделив на сумму корней, а затем применив теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=0,$$

ибо знаменатель стремится к ∞.

Найдем этот предел иначе. Вынося из-под корня переменную x, получим

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})&=\lim_{x\to\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x^2}-\sqrt{1+1/x^2}}{1/|x|}=\lim_{y\to0}\frac{\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1+y^2}}{y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{(1-y^2)^{1/2}-1+(1-(1+y^2)^{1/2})}{y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{(1-y^2)^{1/2}-1}{-y^2}\cdot(-y)+\lim_{y\to0}\frac{1-(1+y^2)^{1/2}}{y^2}\cdot y=0,\end{aligned}$$

где сделана замена $y=1/|x|$ и использованы соответствующие теоремы.

3. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos4x}-\sqrt[3]{\cos5x}}{1-\cos3x}$.

Легко заметить, что здесь имеем дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$. В числителе стоят кубические корни, т. е. степенные функции, и нам желательно узнать, можно ли будет применить замечательный предел, связанный со степенной функцией. Для этого надо, чтобы предел подкоренного выражения был равен единице (поскольку в соответствующем пределе (3.5) участвует выражение вида $(1+x)^\mu$, где $x\to0$). У нас требуемое свойство выполняется, ибо $\lim\limits_{x\to0}\cos4x=1$, $\lim\limits_{x\to0}\cos5x=1$. Для того чтобы использовать замечательный предел, надо подкоренное выражение представить в виде $1+t$, где $t\to0$. Это сделать легко, прибавив и отняв под корнем единицу: $\cos4x=1+(\cos4x-1)$, $\cos5x=1+(\cos5x-1)$.

Теперь проведем необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+(\cos 4x-1)}-\sqrt[3]{1+(\cos 5x-1)}}{1-\cos 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)-((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{1-\cos 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)-((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)}-\frac{((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)}=L.$$

Для возможности использования замечательного предела умножим и разделим соответствующие дроби на стремящиеся к нулю выражения $\cos 4x-1$, $\cos 5x-1$, сделаем подходящую группировку и займемся возникшими дробями:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)}{\cos 4x-1}\cdot\frac{\cos 4x-1}{2\sin^2(3x/2)}$$
$$-\frac{((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{\cos 5x-1}\cdot\frac{\cos 5x-1}{2\sin^2(3x/2)}$$

Используя теорему о замене переменной и предел (3.5), имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)}{\cos 4x-1}=\frac{1}{3},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{\cos 5x-1}=\frac{1}{3}.$$

Займемся пределами

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{2\sin^2(3x/2)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-1}{2\sin^2(3x/2)}.$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{2\sin^2(3x/2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(4x/2)}{2\sin^2(3x/2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(4x/2)}{(4x/2)^2}\cdot\frac{(4x/2)^2}{(3x/2)^2}\cdot\frac{(3x/2)^2}{\sin^2(3x/2)}=-\frac{16}{9}.$$

Аналогично
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-1}{2\sin^2(3x/2)}=-\frac{25}{9}.$$
Собирая полученные результаты, имеем
$$L=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{16}{9}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{25}{9}\right)=\frac{1}{3}.$$

4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2}$.

Заметим, что в этом примере имеем дело с неопределенностью вида 1^∞, которая связана с пределом (3.1). Чтобы воспользоваться указанным пределом, надо в основании степени выделить слагаемое вида $1+\alpha$, где α — бесконечно малая. Для этого в основании прибавим и отнимем единицу, а затем умножим и разделим показатель степени на получившуюся бесконечно малую величину:
$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{-x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left((1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{-x^2}}.$$
Ориентируясь на использование равенства (3.6), займемся отдельно пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{-x^2}$. Имеем
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(x/2)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$
Согласно равенству (3.6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2}=e^{1/2}$.

Задачи.

1. Найти пределы

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n\in\mathbb{N}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$, **(8)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\textbf{(9)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}, \quad m,n\in\mathbb{N},$$

$$\textbf{(10)} \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x),$$

$$\textbf{(11)} \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}, \quad \textbf{(12)} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x},$$

$$\textbf{(13)} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2},$$

$$\textbf{(14)} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2},$$

$$\textbf{(15)} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}, \quad \textbf{(16)} \lim_{n\to\infty}\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1},$$

$$\textbf{(17)} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}, \quad \textbf{(18)} \lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x},$$

$$\textbf{(19)} \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}, \quad \textbf{(20)} \lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x},$$

$$\textbf{(21)} \lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a},\ a>0, \quad \textbf{(22)} \lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a},\ a>0,$$

$$\textbf{(23)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2}, \quad \textbf{(24)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x},\ a>0,\ b>0,$$

$$\textbf{(25)} \lim_{x\to+0} x\ln x, \quad \textbf{(26)} \lim_{x\to+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}.$$

3.15. Ответы. К п. 3.8. (1) 10; (2) 1; (3) $\frac{mn(n-m)}{2}$; (4) $\frac{m}{n}$; (5) $\frac{n(n+1)}{2}$; (6) $\frac{n(n+1)}{2}$; (7) $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$; (8) $\frac{n}{m}$; (9) $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$; (10) $\frac{a+b}{2}$; (11) $\cos a$; (12) $\frac{1}{2}$; (13) $-\sin a$; (14) $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$, $a\neq(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$; (15) 0; (16) 0; (17) e^{2a}; (18) e^{-1}; (19) $e^{\operatorname{ctg} a}$, $a\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; (20) 1; (21) $a^a\ln\frac{a}{e}$; (22) $a^a\ln ae$; (23) $\frac{e}{\pi}$; (24) $\sqrt{ab}$; (25) 0; (26) $\frac{1}{2}$.

Асимптотические сравнения. Опишем терминологию, связанную с асимптотическим сравнением функций, т. е. сравнением их в пределе при стремлении аргумента к какой-то точке. Нам надо будет договориться о сравнении одной функции относительно другой. Для этого естественно рассматривать их отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, однако при этом надо делать оговорки, связанные с возможностью знаменателя обращаться в нуль.

Чтобы не иметь таких неудобств, можно для указанного выше отношения ввести свое обозначение и тем самым рассматривать представление одной из сравниваемых функций, например $f(x)$, через другую в виде произведения $f(x) = g(x)\varphi(x)$, где в качестве $\varphi(x)$ может выступать отношение $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ в тех точках, где $g(x) \neq 0$.

Две функции асимптотически сравниваются как правило в тех случаях, когда они обе либо бесконечно малые, либо бесконечно большие. Используемые при этом обозначения одинаковы в соответствующих ситуациях, а терминология немного отличается.

Итак, обращаясь к сравнению функций f и g, предположим, что f представлена в виде $f(x) = g(x)\varphi(x)$. Пусть a — предельная точка того множества, на котором эти функции рассматриваются. Если имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, то говорят, что f есть *о-малое относительно* g при x, стремящемся к a, и используют обозначение $f(x) = o(g(x))$. Если при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая более высокого порядка, чем* g, или что *порядок малости функции* f *выше, чем у* g, или что f *стремится к нулю быстрее, чем* g. Если же $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет медленнее, чем* g, или что g *растет быстрее, чем* f.

Предположим теперь, что в представлении $f(x) = g(x)\varphi(x)$ функция φ обладает следующим свойством: существует такая окрестность точки a, на которой φ ограничена. В этом случае говорят, что f — *О-большое по сравнению с* g при x, стремящемся к a, и используют обозначение $f(x) = O(g(x))$. Если при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая порядка не ниже, чем* g, или что *порядок малости функции* f *не ниже, чем у* g. Если же $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет не быстрее, чем* g.

Если одновременно $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, то говорят, что *функции* f *и* g *одного порядка* (*малости или роста*) при $x \to a$, используя при этом обозначение $f \asymp g$.

Если при $x \to a$ функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то говорят, что $g(x)$ — *главная часть функции* $f(x)$. Полагая $o(g(x)) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, тот факт, что g есть главная часть f, можно записать в виде $f(x) = g(x)(1 + \alpha(x))$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Если при этом в некоторой окрестности точки a функция g

отлична от нуля, то последнее соотношение можно записать в виде $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1+\alpha(x)$, $\alpha(x)\to 0$, $x\to a$, или $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Если $g(x)$ — главная часть $f(x)$ при $x\to a$, то говорят также, что *функции f и g эквивалентны при $x\to a$* и используют обозначение $f(x)\sim g(x)$.

Чаще всего в качестве бесконечно малых или бесконечно больших, с которыми сравнивают данные функции, берут функции вида $(x-a)^\alpha$, $a\in\mathbb{R}$. Если $f(x) = o(x-a)^\alpha$ при $x\to a$ и $\alpha>0$, то говорят, что f — *величина более высокого порядка (малости), чем α*, или что у f *порядок малости более высокий, чем α*. Если же $f(x)\sim(x-a)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, то говорят, что f *имеет порядок α* (малости или роста, в зависимости от знака α). Аналогичную терминологию можно описать и в том случае, если сравнивают с функцией вида x^α при $x\to+\infty$.

Важно понимать, что символами типа $O(f(x))$, $o(f(x))$, если они не используются в конкретных равенствах, обозначают не одну функцию, а **класс функций, обладающих отмеченным в символе свойством**, так что если говорят «возьмем функцию $O(f(x))$ или $o(f(x))$ при $x\to a$», то имеют в виду, что рассматривается **некоторая** функция, обладающая указанным свойством, т. е. некоторая функция $h(x)$ такая, что $h(x) = \varphi(x)f(x)$, где $\varphi(x)$ ограничена вблизи a или $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$. В следующих ниже примерах и задачах познакомимся с некоторыми правилами обращения с асимптотическими равенствами.

Примеры.

1. Доказать, что $o(o(f(x))) = o(f(x))$ при $x\to a$.

Написанное равенство означает, что любая функция, обладающая указанным в левой части равенства свойством, будет бесконечно малой по сравнению с f. Пусть $h(x)$ — какая-либо функция, обладающая тем свойством, что $h(x) = o(o(f(x)))$, и надо показать, что $h(x) = o(f(x))$. Согласно условию существует такая бесконечно малая при $x\to a$ функция $\theta(x)$, что $h(x) = \theta(x)g(x)$, где $g(x) = o(f(x))$. Последнее означает, что $g(x) = \eta(x)f(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}\eta(x) = 0$. Собирая, получим $h(x) = \theta(x)\eta(x)f(x)$, а так как $\lim\limits_{x\to a}\theta(x)\eta(x) = 0$, по определению $h(x) = o(f(x))$. Требуемое равенство установлено.

2. Доказать, что $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$ при $x\to a$.

Действительно, это соотношение означает, что функция, обладающая свойством, указанным в левой части, будет обладать также свойством, указанным в правой. Свойство, указанное в левой части, означает, что рассматривается сумма двух функций $h(x) + g(x)$, где $h(x) = \varphi(x)f(x)$, $g(x) = \psi(x)f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 0$. Тогда $h(x) + g(x) = (\varphi(x) + \psi(x))f(x)$, а поскольку $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x) + \psi(x)) = 0$, то $h(x) + g(x) = o(f(x))$, что и требовалось.

Задачи.

1. Доказать соотношения при $x \to a$:

(1) $O(o(f(x))) = o(f(x))$, **(2)** $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

2. Пусть $x \to 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\alpha)$, **(2)** $o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$.

3. Пусть $x \to 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\alpha)$, **(2)** $O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta})$.

4. Пусть $x \to \infty$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\beta)$, **(2)** $O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta})$.

Нахождение пределов функции с использованием асимптотических сравнений. Асимптотические равенства удобно использовать при нахождении пределов — они позволяют свести процесс нахождения предела к простым преобразованиям многочленов, раскрытию скобок, приведению подобных членов и выделению главной части. Конечно, для этого надо иметь набор конкретных асимптотических равенств. Поскольку все примеры по нахождению пределов связаны с элементарными функциями, ограничимся тем, что основные замечательные пределы перепишем в форме асимптотических равенств, в которых $x \to 0$:

$$\sin x = x + o(x), \tag{8}$$

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x), \tag{9}$$

$$\ln(1 + x) = x + o(x), \tag{10}$$

$$(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + o(x). \tag{11}$$

Во всех этих равенствах бесконечно малые $o(x)$ можно конкретизировать, т. е. записать более точные приближения функций многочленами. Такие равенства будут обоснованы позже, мы же будем сейчас их использовать при нахождении пределов в случае необходимости. Итак, для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства, в которых $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \tag{13}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{14}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \dots \\ \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая теорему о замене переменной, можно гарантировать, что эти равенства останутся верными, если в них на месте переменной x будет стоять какая-либо функция $x = \varphi(t)$ такая, что $\lim\limits_{t \to a} \varphi(t) = 0$, и ищется предел соответствующего выражения при $t \to a$.

Примеры.

1. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Воспользовавшись равенствами (3.12), (3.15), (3.9), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} &= \frac{1 + x\cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1 + x(1 - x^2/2 + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) + o(x)}{x + o(x) - x} \\ &= \frac{1 + x - x^3/2 + o(x^3) - 1 - x + o(x)}{o(x)} = \frac{o(x)}{o(x)},\end{aligned}$$

и никакой пользы проделанные выкладки не несут, ибо мы в итоге пришли к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Это означает, что нами использована недостаточно глубокая информация об асимптотике имеющихся функций. Простое наблюдение:

$$\ln(1+x) - x = x - x^2/2 + o(x^2) - x = -x^2/2 + o(x^2)$$

показывает, что в знаменателе — величина второго порядка, а тогда и в числителе надо использовать асимптотические равенства, обеспечивающие выделение главного члена второго порядка:

$$\begin{aligned}
&\frac{1 + x\cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\
&\quad = \frac{1 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) - \frac{(1/2)\cdot(-1/2)}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\
&\qquad = \frac{1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 - x + \frac{4x^2}{8} + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\
&\qquad\quad = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(x^2)/x^2}{-1/2 + o(x^2)/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -1.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $x^3/2 = o(x^2)$ и что $o(x^2) + o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.

При нахождении пределов бывает удобно комбинировать использование замечательных пределов и асимптотических равенств.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

Имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = \left(\frac{1 - x^2/2 + o(x^2)}{1 - (2x)^2/2 + o(x^2)}\right)^{1/x^2} \\
&= \left(1 + \frac{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 - o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)}\right)^{1/x^2} = \left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)}\right)^{1/x^2} \\
&\qquad = \left(\left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)}\right)^{\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}}\right)^{\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1+o(1)}\cdot\frac{1}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \dfrac{3}{2}$, согласно (3.6) имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = e^{3/2}.$$

Решим этот же пример другим способом. Воспользуемся равенством $a^b = e^{b \ln a}$, $a > 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}.$$

Рассмотрим выражение в показателе степени:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}{x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1-x^2/2+o(x^2)}{1-4x^2/2+o(x^2)}\right)}{x^2} \\ = \frac{\ln(1 - x^2/2 + o(x^2)) - \ln(1 - 2x^2 + o(x^2))}{x^2} \\ = \frac{-x^2/2 + 2x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \to \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый предел равен $e^{3/2}$.

Задачи.

1. Используя асимптотические равенства, найти пределы

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + x2^x}{1 + x3^x}\right)^{1/x^2}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{x + \sin x}\right)^{1/(1-\cos x)}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$, **(8)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$,

(9) $\lim\limits_{x\to 2} (\sqrt{3 - x} + \ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)}$,

(10) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{7/4}(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x})$,

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{1 + \sin x} - (1/2)\ln(1 + x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x}$,

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - \sqrt{1 + x^2} - x \cos x}{\ln^3(1 - x)}$.

2*. Найти пределы

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$,

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, $n\in\mathbb{N}$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$, $n\in\mathbb{N}$.

Ответы. 1. (1) 3; (2) -2; (3) $\frac{2}{3}$; (4) $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$; (5) 1; (6) $e^{5/6}$; (7) $\frac{1}{2}$; (8) -2; (9) $e^{-1/4}$; (10) $-\frac{3}{16}$; (11) $-\frac{1}{8}$; (12) $-\frac{1}{2}$; **2.** (1) $\frac{1}{1+x^2}$; (2) $\sqrt{2}$; (3) 0; (4) 1.