6. Непрерывные функции

Непрерывность функции в точке. Рассмотрим функцию f и точку $a \in \mathbb{R}$. Если a принадлежит области определения $D(f)$ функции f, то будем говорить, что функция f *непрерывна в точке* a, если

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D(f),\ |x-a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Если к тому же a — предельная точка множества $D(f)$, то непрерывность f в a равносильна тому, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и выполнено равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Если же a не является предельной точкой $D(f)$ и тем самым говорить о пределе в этой точке невозможно, то любая функция в такой точке непрерывна. Договоримся также считать функцию f непрерывной в предельной точке множества $D(f)$, не принадлежащей $D(f)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (требовать в этом случае равенства его значению функции в точке затруднительно — точка по предположению не входит в область определения, так что такого значения просто нет).

При исследовании непрерывности функции в данной точке сначала надо определить, что это за точка — входит ли она в область определения функции или нет и является ли она предельной точкой области определения. Если это точка из области определения, но не предельная точка, то ответ готов — функция в такой точке непрерывна. Как правило, рассматриваемая точка будет предельной точкой области определения. В этом случае надо найти предел функции в этой точке, используя по возможности теоремы о пределах. Если же использовать теоремы невозможно (например, по причине невыполнения их условий), то надо найти предел по определению, в случае необходимости прибегая к односторонним пределам. Если конечного предела нет, то нет и непрерывности. Если конечный предел есть, то надо посмотреть, определена ли функция в этой точке, и если нет, то она в ней уже непрерывна (только за счет существования предела). Если определена, то надо сравнить значение предела со значением функции, и если они одинаковы, то функция непрерывна, если нет, то разрывна.

Утверждение 1. *Линейная комбинация, произведение и отношение (последнее при условии отличия от нуля знаменателя) непрерывных в точке a функций непрерывны в этой точке.*

Утверждение 2. *Пусть функция f непрерывна в точке a, а функция g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.*

Классификация точек разрыва. Иногда описание точек разрыва функции сопровождают указанием, какого типа разрыв в данной точке. Напомним, что точку a называют *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные односторонние пределы $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$. Говорят, что разрыв первого рода *устранимый*, если $f(a+0) = f(a-0)$. Во всех остальных случаях говорят, что a — *точка разрыва второго рода.*

Пример. Исследуем на непрерывность функцию

$$f(x) = [x] \sin \pi x,$$

где квадратные скобки указывают на целую часть числа, т. е. $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Функция f определена на всем $\mathbb{R}$ и представляет собой произведение двух функций, из которых $\sin \pi x$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Покажем, что функция $[x]$ непрерывна в каждой точке $a \notin \mathbb{Z}$, и тогда f будет непрерывной на множестве всех нецелых вещественных чисел как произведение непрерывных функций. Действительно, если $a \notin \mathbb{Z}$, то существует такая окрестность $(a-r, a+r)$ точки a, которая не содержит целых чисел, а тогда целая часть $[x]$ во всех точках такой окрестности принимает одно и то же значение, т. е. совпадает с непрерывной (тождественно постоянной) функцией и, значит, сама непрерывна в a.

Пусть теперь $a \in \mathbb{Z}$. Тогда в любой достаточно малой (настолько малой, чтобы в ней не было отличных от a целых точек) окрестности точки a слева от a будет $[x] = a - 1$, а справа от a оказывается $[x] = a$. Отсюда $\lim\limits_{x \to a-0} [x] = a - 1$, $\lim\limits_{x \to a+0} [x] = a$, и ввиду различия пределов слева и справа заключаем, что предела в этой точке нет, так что $[x]$ разрывна в произвольной целой точке.

Итак, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций приходим к непрерывности нашей функции во всех нецелых точках. Можно ли утверждать, что в каждой целой точке она будет разрывна? Нет, пока нельзя. Нам только известно, что в таких точках не выполняются условия теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций, но будет ли при этом произведение разрывным — вопрос пока открытый.

Отметим, что $\lim\limits_{x\to n} \sin \pi x = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, а тогда по теореме о пределе произведения ограниченной функции на бесконечно малую будет $\lim\limits_{x\to n} [x] \sin \pi x = 0$, так как целая часть вблизи любой конечной точки ограничена. Вместе с тем имеем $[n] \sin \pi n = 0$, если $n \in \mathbb{Z}$. Мы получили, что предел функции в любой целочисленной точке совпадает с ее значением в такой точке, следовательно, наша функция непрерывна в каждой целочисленной точке. В итоге приходим к тому, что f непрерывна в каждой точке области определения.

Задачи.

1. Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

(1) $f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(5) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

(6) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi/x))$,

(7) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(8) $f(x) = \cos^2 \dfrac{1}{x}$,

(9) $f(x) = e^{-1/x}$,

(10) $f(x) = \arcsin(1/x)$.

2. Обязательно ли будет разрывной в данной точке a сумма $f(x) + g(x)$, если (а) функция f непрерывна, а g разрывна в точке a; (б) обе функции f, g разрывны в точке a?

3. Обязательно ли будет разрывным в данной точке a произведение $f(x)g(x)$, если (а) функция f непрерывна, а g разрывна в точке a; (б) обе функции f, g разрывны в точке a?