7. Производная

7.1. Рассмотрим интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$, функцию f, заданную на (a,b), и точку $x \in (a,b)$. Если существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

его называют *производной функции f в точке x* и обозначают символом $f'(x)$. Если производная $f'(x)$ конечна, то f называют *дифференцируемой в точке x*. Дифференцируемую в каждой точке интервала (a,b) функцию называют *дифференцируемой* на этом интервале.

Пределы

$$f'_-(x) = \lim_{h\to -0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_+(x) = \lim_{h\to +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

если они существуют, называют *левой* и *правой* производными (или *производной слева* и *справа*, или *односторонними производными*) функции f в точке x. Если существует производная функции в точке, то существуют равные ей односторонние производные. Обратно, если существуют равные между собой односторонние производные, то существует и производная функции в данной точке, равная значению односторонних производных. Если f определена на замкнутом промежутке $[a,b]$, то в точках a, b можно рассматривать соответственно производные справа и слева.

Дифференцируемость f в точке x равносильна возможности выделения главной линейной части у приращения $f(x+h)-f(x)$ функции f в окрестности точки x, т. е. возможности представления

$$f(x+h)-f(x) = K\cdot h + o(h) \quad \text{при } h\to 0,$$

или

$$f(x+h) = f(x) + K\cdot h + \alpha(h)\cdot h \quad \text{при } h\to 0,$$

где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. В этом асимптотическом равенстве коэффициент K главной линейной части равен производной $f'(x)$, так что дифференцируемость f в точке x равносильна справедливости асимптотического равенства

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + o(h) \quad \text{при } h\to 0.$$

Нахождение производной основано на соответствующих теоремах и на производных элементарных функций.

Утверждение 1. *Пусть функции f, g дифференцируемы в точке x. Тогда сумма $f+g$, произведение $f \cdot g$ и частное f/g* (последнее при условии $g(x) \neq 0$) *дифференцируемы в точке x и*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Утверждение 2 (теорема о производной композиции). *Пусть функция f дифференцируема в точке x, а функция g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и*

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

При исследовании функции на дифференцируемость и нахождении производной в первую очередь надо воспользоваться сформулированными утверждениями, если выполнены их условия. Если же условия в какой-то точке не выполнены, то при исследовании дифференцируемости надо использовать определение — составлять отношение приращения функции к приращению аргумента и изучать существование предела этого отношения при стремлении к нулю приращения аргумента.

7.2. Приведем таблицу производных основных функций, при этом мы не будем указывать каждый раз на область изменения переменной x или параметров α, a — она всегда будет определяться из условия существования соответствующей функции:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \tag{7.1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x, \tag{7.2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{7.3}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \tag{7.4}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{7.5}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{7.6}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \tag{7.7}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{7.8}$$

7.3. Пример. Исследуем на дифференцируемость и найдем производную функции $f(x) = |x|$. Согласно определению имеем

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

так что в некоторой окрестности каждой точки $x > 0$ эта функция совпадает с функцией $y(x) = x$, а значит, ее производная в такой точке равна 1. Рассуждая аналогично, можно прийти к выводу, что $f'(x) = -1$ в каждой точке $x < 0$. Остается рассмотреть $x = 0$. Воспользуемся тем, что $f(x)$ определена по-разному слева и справа от нуля и обратимся к пределам слева и справа:

$$\lim_{h\to-0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to-0} \frac{-h}{h} = -1, \quad \lim_{h\to+0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{h}{h} = 1,$$

и ввиду того, что соответствующие пределы слева и справа различны, в точке 0 предела нет, а вместе с этим и производной нет.

Отметим, что при $x \neq 0$ производную модуля можно записать с использованием функции «знак числа»: $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$.

7.4. Пример. Исследуем на дифференцируемость и найдем производную функции $f(x) = |\sin^3 x|$. Заметим, что $f(x)$ является композицией $\lambda \circ \psi \circ \varphi$ функций $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(t) = t^3$ и $\lambda(u) = |u|$. Функции φ и ψ дифференцируемы всюду, а функция λ — всюду, кроме нуля. Поэтому утверждение 2 из п. 7.1 гарантирует дифференцируемость композиции в тех точках x, где $\sin^3 x \neq 0$, и в таких точках будет $f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$. Займемся теми точками, в которых $\sin^3 x = 0$, т. е. точками вида $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\frac{|\sin^3(k\pi + h)| - |\sin^3 k\pi|}{h} = \frac{|\sin^3 h|}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

следовательно, $f(x)$ дифференцируема и в каждой точке вида $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, при этом $f'(k\pi) = 0$.

7.5. Задачи.

1. Исследовать на дифференцируемость, найти производные и изобразить графики функций и их производных:

(1) $f(x) = x|x|$, **(2)** $f(x) = |\cos x|$,

(3) $f(x) = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$, **(4)** $f(x) = \arcsin(\cos x)$,

(5) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 1/e, & |x| > 1. \end{cases}$

2. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет производную в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, разрывную в нуле.

3. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

4. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq x_0, \\ ax + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция f была дифференцируемой в точке x_0?

5. Пусть

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leq x_0, \\ ax + b, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева в точке x_0. При каком выборе коэффициентов a, b функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0?

6. Можно ли утверждать, что сумма $f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке x, если (а) функция f имеет производную в точке x, а функция g — нет; (б) обе функции f и g не имеют производной в точке x?

7. Можно ли утверждать, что произведение $f(x) \cdot g(x)$ не имеет производной в точке x, если (а) функция f имеет производную в точке x, а функция g — нет; (б) обе функции f и g не имеют производной в точке x?

8. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \infty$?

9. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$?

10. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$?

11. Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, конечный или бесконечный?

7.6. Пусть на (a, b) задана функция f, и пусть $x_0 \in (a, b)$ — точка, в которой существует конечная производная функции f. С геометрической точки зрения прямая с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, являющаяся графиком функции

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

представляет собой касательную к графику функции f в точке x_0. График функции

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

перпендикулярен касательной и является нормалью к графику функции f.

7.7. Задачи.

1. Под какими углами пересекаются кривые

(1) $y = x^2$, $x = y^2$; **(2)** $y = \sin x$, $y = \cos x$?

2. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

7.8. Как указано в п. 7.1, дифференцируемость функции f в точке $x \in (a, b)$ равносильна справедливости асимптотического равенства

$$f(x + h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h) \quad \text{при } h \to 0 \tag{7.9}$$

для приращения $f(x + h) - f(x)$ функции f в точке x. Главную часть справа в этом равенстве, т. е. линейную относительно h функцию $f'(x) \cdot h$, называют *дифференциалом функции* f *в точке* x и при этом используют обозначение

$$df(x)(h) = f'(x) \cdot h. \tag{7.10}$$

В терминах дифференциала равенство (7.9) принимает вид

$$f(x + h) - f(x) = df(x)(h) + o(h), \quad h \to 0. \tag{7.11}$$

Так как для тождественной функции $f(x) = x$ будет $f'(x) = x' = 1$, можно записать, что $dx(h) = 1 \cdot h = h$, и если на место h в правой части (7.10) подставить выражение $dx(h)$, то равенство станет таким:

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h). \tag{7.12}$$

Переходя от равенства, выражающего совпадение значений функций слева и справа при каждом h, к равенству в терминах только символов функций, т. е. убирая h слева и справа, получим равенство

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{7.13}$$

Именно эту запись и используют для выражения дифференциала функции f в точке x. Таким образом, чтобы найти дифференциал функции, надо просто найти ее производную и сделать запись вида (7.13).

Возможность выделения главной части функции в виде дифференциала можно использовать для нахождения приближенных значений функции вблизи таких точек, в которых значение производной легко находится — для этого надо в формуле (7.11) ограничиться только главной частью и написать, что $f(x+h)-f(x) \approx df(x)(h) = f'(x)\cdot h$ для малых h. Важно при этом иметь в виду, что поскольку дифференциал определяется на основе асимптотического равенства, невозможно оценить погрешность найденного приближенного значения.

7.9. Задачи.

1. Найти дифференциалы:

(1) $d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2))$, **(2)** $d\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

2. Найти дифференциалы в указанных точках:

(1) $d\left(\dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{x-1}{x}\right)$, $x = -1$;

(2) $d\operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{x}$, $x_1 = 1/e$, $x_2 = e$.

3. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение функции $y = y(x)$ в указанных точках:

(1) $y = \sqrt[3]{x}$, (а) $x = 65$, (б) $x = 125,1342$;

(2) $y = \sin x$, (а) $x = 29°$, (б) $x = 359°$.

7.10. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на промежутке (a,b). Если при некотором натуральном n определена производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$ в точках $x \in (a,b)$, полагают $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ в тех точках, в которых существует указанная в правой части производная. При этом саму функцию считают производной нулевого порядка.

При нахождении производных высших порядков можно использовать формулы

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad (x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$
$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2).$$

Производная порядка n от произведения n раз дифференцируемых функций f, g может быть найдена по формуле Лейбница

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$.

7.11. Задачи.

1. Пусть f — трижды дифференцируемая функция. Найти $y''(x)$, $y'''(x)$, если

(1) $y(x) = f(x^2)$, **(2)** $y(x) = f(e^x)$.

2. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема при $x \le x_0$. Как следует подобрать коэффициенты a, b, c, чтобы функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \le x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

была дважды дифференцируемой?

3. Найти $f^{(n)}(x)$, если

(1) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$, **(3)** $f(x) = \sin^2 x$,

(4) $f(x) = \sin^3 x$,

7.12. Пусть на промежутке $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ заданы гладкие (т. е. имеющие на I непрерывные производные) функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $\varphi'(t_0) \ne 0$ в некоторой точке $t_0 \in I$. Тогда в некоторой окрестности (α, β) точки t_0 функция $x = \varphi(t)$ обратима. Пусть $t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к φ функция, определенная в некоторой окрестности (c, d) точки $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда на (c, d) определена функция

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)). \tag{7.14}$$

Если учесть, что $x = \varphi(t)$, последнее равенство можно записать и так:

$$\psi(t) = f(\varphi(t)) \tag{7.15}$$

для $t \in (\alpha, \beta)$. О функции f говорят, что она *задана параметрически посредством функций* φ, ψ. Обратим внимание на локальный характер параметрически заданной функции, хотя, конечно, множества, на которых она может быть определена, бывают обширными.

При выполнении указанных выше условий параметрически заданная функция дифференцируема и ее производная может быть найдена путем дифференцирования либо равенства (7.14) по x, либо равенства (7.15) по t, т. е.

$$f'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}, \tag{7.16}$$

если исходить из равенства (7.14), и

$$f'(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{7.17}$$

если из равенства (7.15).

Если определяющие функцию f функции φ, ψ имеют вблизи точки t_0 производные более высокого чем первый порядков, то в некоторой окрестности точки x_0 параметрически заданная функция имеет того же порядка производные, которые могут быть найдены последовательным дифференцированием равенства (7.14) либо равенства (7.15).

7.13. Задача. Найти производные первого и второго порядков от функций $f(x)$, заданных параметрически посредством функций $x(t)$, $y(t)$:

(1) $x = e^{-t}, \quad y = t^3$; **(2)** $x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t$;

(3) $x = e^{2t} \cos^2 t, \quad y = e^{2t} \sin^2 t$;

(4) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$.

7.14. Пусть дана функция $F(x, y)$. Рассмотрим множество M точек (x, y) таких, что $F(x, y) = 0$. Пусть $(x_0, y_0) \in M$, т. е. $F(x_0, y_0) = 0$. Допустим, что для каждого x из некоторого включающего x_0 интервала (a, b) существует единственное y из некоторого включающего точку y_0 интервала (c, d) такое, что $F(x, y) = 0$. Тогда, сопоставляя каждому $x \in (a, b)$ то единственное $y \in (c, d)$, для которого $F(x, y) = 0$, получаем функцию, о которой говорят, что она *задана неявно вблизи точки* (x_0, y_0) *посредством отображения* F или *посредством равенства* $F(x, y) = 0$.

Согласно определению вблизи x_0 должно выполняться тождество $F(x(\varphi(x)) \equiv 0$. Функция в его левой части является функцией одной переменной x. Дифференцируя ее и приравнивая к нулю результат, можно выразить производную $\varphi'(x)$ в точке x_0 и в ее окрестности. Повторное дифференцирование полученного равенства приводит к нахождению второй производной, и т. д.

7.15. Задачи.

1. Найти производные первого и второго порядков функций $\varphi(x)$, неявно заданных следующими равенствами:

(1) $x^2+2xy-y^2=2x$, **(2)** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$,

(3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, **(4)** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

7.16. Ответы. К п. 5.5. (1) $mn(x^{m-1}+x^{n-1}+(m+n)x^{m+n-1})$; (2) $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x|\neq 1)$; (3) $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}(p-(q+1)x-(p+q-1)x^2)$ $(x\neq -1)$; (4) $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x>0)$; (5) $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$; (6) $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}$; (7) $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<|a|)$; (8) $n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$; (9) $\frac{2\sin x(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$; (10) $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$ $(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z})$; (11) $-2xe^{-x^2}$; (12) $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2(x/2)}$; (13) $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$; (14) $\frac{x}{x^4-1}$ $(|x|>1)$; (15) $a^a\cdot x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$; (16) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (17) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (18) $\frac{1}{\sin x}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\in\mathbb{Z})$; (19) $-\frac{1}{\cos x}$ $x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z})$; (20) $2\sin(\ln x)$ $(x>0)$; (21) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $(|x|<2)$; (22) $\frac{2ax}{x^4+a^2}$; (23) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; (24) $\operatorname{sgn}(\cos x)$ $(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z})$; (25) $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $(x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$; (26) $\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<|x|<1)$; (27) $\frac{1}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$; (28) $-\frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$; (29) $\sqrt{a^2-x^2}$; (30) $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $(x>0,\ x\neq 1)$; (31) $x^{1/x-2}(1-\ln x)$ $(x>0)$; (32) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x)$.

1. (1) дифференцируема всюду; (2) недифференцируема при $x=\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; (3) дифференцируема всюду; (4) недифференцируема при $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; (5) дифференцируема всюду.

7. $a=2x_0,\ b=-x_0^2$. **8.** $a=f'_-(x_0),\ b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$.

К п. 7.7. 1. (1) $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; (2) $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. **2.** $a=\frac{1}{2e}$.

К п. 7.9. 1. (1) $9\sqrt{x}\ln x\,dx$; (2) $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2. (1) $-\frac{1}{2}\,dx$; (2) $\frac{2e^2}{e^2+1}\,dx$.

3. (1) (а) $4,0208$, (б) $5,00177$; (2) (а) $0,485$, (б) $-0,017$.

К п. 7.11. **1.** (1) $y'' = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2)$, $y''' = 8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2)$; (2) $y'' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$, $y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$. **3.** $a = \frac{1}{2} f''(x_0)$, $b = f'(x_0)$, $c = f(x_0)$.

5. (1) $\frac{(-1)^{n-1} n! c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$; (2) $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$; (3) $-2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$; (4) $\frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$;

К п. 7.13. (1) $y'_x = -3t^2 e^t$, $y''_x = 3t(2+t)e^{2t}$; (2) $y'_x = -1$, $y''_x = 0$ $(0 < x < 1)$; (3) $y'_x = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, $y''_x = \frac{e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)}{2\cos^3 t(\cos t - \sin t)^3}$ $(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z})$; (4) $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $y''_x = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$ $(t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z})$.