§ 8. Свойства дифференцируемых функций

8.1. Производная функции в данной точке отражает локальные свойства функции, т. е. свойства, присущие функции в некоторой окрестности данной точки. Вместе с тем есть группа утверждений, позволяющих из свойств производной в каждой точке некоторого промежутка получать те или иные свойства функции на всем промежутке, т. е. глобальные свойства.

Основой перехода от локальных свойств к глобальным служат формулируемые ниже теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

Теорема Ролля. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на интервале (a,b). Если $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $c \in (a,b)$, в которой $f'(c) = 0$.*

Теорема Лагранжа. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \tag{8.1}$$

или, иначе,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{8.2}$$

Теорема Коши. *Пусть функции f, g непрерывны на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируемы на интервале (a,b). Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c). \tag{8.3}$$

В случае, если $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a,b)$, равенство (8.3) обычно записывают так:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{8.4}$$

Переход от свойств производной к свойствам функции отражен в следующих утверждениях.

Теорема (критерий монотонности функции). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на (a,b). Тогда для того чтобы f была возрастающей (убывающей) на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ (соответственно $f'(x) \leqslant 0$) для любого $x \in (a,b)$. Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) в каждой точке $x \in (a,b)$, то f строго возрастает (убывает) на $[a,b]$.*

Теорема (критерий постоянства функции). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b]\subset\mathbb{R}$ и дифференцируема на (a,b). Тогда f постоянна на $[a,b]$ в том и только в том случае, если $f'(x)=0$ в каждой точке $x\in(a,b)$.*

Теорема (об оценке приращения). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b]\subset\mathbb{R}$ и дифференцируема на (a,b). Предположим, что найдутся такие константы m, M, что $m\leqslant f'(x)\leqslant M$ для каждого $x\in(a,b)$. Тогда*

$$m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a). \tag{8.5}$$

В частности, если $|f'(x)|\leqslant C$ для любого $x\in(a,b)$, то

$$|f(b)-f(a)|\leqslant C|b-a|. \tag{8.6}$$

8.2. Задачи.

1. Дать геометрическую интерпретацию теорем Ролля, Лагранжа и Коши.

2. Доказать тождество

$$2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$$

при $|x|\geqslant 1$.

3. Доказать неравенства

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$,

(2) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y),\quad 0<y<x,\ p>1$,

(3) $|\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b|\leqslant|a-b|$, **(4)** $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, $0<b<a$,

8.3. Пусть функция f имеет в точке a производные до порядка n включительно. Тогда полином

$$P_n(x)=P_n(x,a,f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

называют *полиномом Тейлора функции f в точке a.* Равенство

$$f(x)=P_n(x,a,f)+R_n(x,a,f),$$

в котором $R_n(x,a,f)=f(x)-P_n(x,a,f)$, называют *формулой Тейлора*, а $R_n(x,a,f)$ — *остатком в формуле Тейлора.*

При использовании формулы Тейлора большое значение имеют свойства остатка. Такие свойства могут носить локальный или глобальный характер. Здесь мы остановимся на локальных свойствах остатка.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть f имеет n производных в точке a. Тогда $R_n(x) = o(x-a)^n$, т. е.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n. \tag{8.7}$$

Отметим, что асимптотическое представление (8.7) функции f вблизи точки a единственно, т. е. если f представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o(x-a)^n,$$

то $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Если в формулировке задачи встречается предложение разложить какую-то функцию по целым положительным степеням $x - a$ или по степеням x, то имеется в виду необходимость записать формулу Тейлора, в которой в качестве начальной точки выбрана точка a или соответственно точка 0.

Если в качестве начальной берется нулевая точка, т. е. если идет разложение по степеням x, то формулу Тейлора часто называют *формулой Маклорена.*

Мы уже встречались с небольшим списком асимптотических разложений конкретных функций, состоящим из формул (3.11)–(3.15). Напомним и расширим его:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}), \tag{8.8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}), \tag{8.9}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \tag{8.10}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n), \tag{8.11}$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \tag{8.12}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n), \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \tag{8.13}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n), \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} + o(x^n), \tag{8.14}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1}). \tag{8.15}$$

8.4. Пример. Разложим функцию $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ по целым положительным степеням x до члена с x^6. Воспользуемся известными разложениями логарифма и синуса:

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x}$$
$$= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6)\right)\right)$$
$$= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{3!}\right)^3 + o(x^6)$$
$$= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} - \frac{x^4}{2(3!)^2} + \frac{x^6}{3!\cdot 5!} - \frac{x^6}{3\cdot(3!)^3} + o(x^6)$$
$$= -\frac{x^2}{6} - \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{120}\right)x^4 - \left(\frac{1}{5040} - \frac{2}{720} + \frac{1}{648}\right)x^6 + o(x^6)$$
$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).$$

8.5. Задачи.

1. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$:

(1) $\dfrac{x}{e^x - 1}$, **(2)** $e^{x/\sin x}$, **(3)** $\sin(\operatorname{arctg} x)$. **(4)** $\dfrac{x}{\arcsin x}$.

2. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$:

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$, **(2)** $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+4}$.

3. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o(x-x_0)^n$:

(1) $\ln(2+x-x^2)$, $x_0=1$; **(2)** $\ln(x^2-7x+12)$, $x_0=1$;

(3) $\dfrac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$, **(4)** $\dfrac{(x-2)^2}{3-x}$, $x_0=2$.

4. Функцию $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ $(x>0)$ разложить по целым положительным степеням дроби $1/x$ до члена с $1/x^3$.

8.6. Пример. Подобрать коэффициенты A,B так, чтобы при $x\to 0$ имело место асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5). \tag{8.16}$$

Воспользуемся разложениями для синуса и косинуса. Равенство (8.16) запишем так:

$$\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)}-\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}=O(x^5),$$

или

$$\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6))(x+Bx^3)-(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7))(1+Ax^2)}{(x+o(x))(x+o(x))}$$
$$=O(x^5),$$

а это по определению означает, что отношение выражения в левой части последнего равенства к x^5 ограничено. Запишем это отношение, одновременно проведя преобразования:

$$\frac{(B-A-1/3)x^3+(A/6-B/2+1/30)x^5+O(x^7)}{x^7+o(x^7)}.$$

Это выражение ограничено в окрестности нуля в том случае, если члены с x^3 и x^5 отсутствуют, т. е. если

$$B-A-\frac{1}{3}=0,\quad \frac{A}{6}-\frac{B}{2}+\frac{1}{30}=0.$$

Решая эту систему, получим $A=-2/5$, $B=-1/15$.

8.7. Задачи.

1. При каких a и b величина $x-(a+b\cos x)\sin x$ будет бесконечно малой 5-го порядка относительно x?

2. При каких A, B, C, D при $x \to 0$ справедлива формула

$$e^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2} + O(x^5)?$$

3. Найти такие A, B, чтобы при $x \to 0$ были справедливы асимптотические равенства

(1) $Ae^x - \dfrac{B}{1-x} = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$,

(2) $A\arcsin x + B\,\mathrm{arctg}\,x = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{8}x^5 + o(x^6)$.

8.8. Локальная форма остатка в формуле Тейлора дает лишь асимптотическую информацию. По ней невозможно ответить, например, на вопрос об оценке абсолютной погрешности остатка при каком-либо фиксированном x или на каком-то отрезке и на другие вопросы нелокального характера.

Для получения глобальных свойств служат соответствующие формы остатка в формуле Тейлора.

Теорема (формы Лагранжа и Коши остатка в формуле Тейлора). *Пусть функция f имеет непрерывные производные до порядка n в каждой точке отрезка I с концами a, x и в открытом промежутке с этими концами имеет производную порядка $n+1$. Тогда*

(Л) *Существует такая точка ξ между a и x, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{8.17}$$

(форма Лагранжа остатка),

(К) *существует такое $\theta \in (0,1)$, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1} \tag{8.18}$$

(форма Коши).

Остаток в форме Лагранжа можно записать и так: найдется такое $\mu \in (0,1)$, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\mu(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{8.19}$$

Глобальные формы остатка уже позволяют ответить, например, на вопрос о величине остатка на данном отрезке при заданном количестве членов в формуле Тейлора или на вопрос о количестве членов для достижения заданной точности в процессе приближенного вычисления значения функции на данном элементе. Для этого мы можем оценить сверху остаток, и такая оценка позволит ответить на поставленный вопрос.

8.9. Пример. Оценим абсолютную погрешность приближенной формулы $\sin x \approx x - x^3/6$ при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (считая, что разложение доводится до x^4) имеем

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{\sin^{(5)}\xi}{120}x^5 = \frac{\cos\xi}{120}x^5,$$

где $\xi \in (0, x)$. Поскольку $|\cos\xi| \leqslant 1$, то

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{x^5}{120} \leqslant \sup_{x\in[0,1/2]} \frac{x^5}{120} = \frac{(1/2)^5}{120} = \frac{1}{3840}.$$

8.10. Пример. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислим $\sqrt[12]{4000}$ и оценим погрешность. Воспользуемся формулой Тейлора для функции $(1+x)^\mu = 1+\mu x+R_1(x)$ с начальной точкой $a = 0$, взяв для простоты всего два члена в формуле Тейлора. Представим $4000 = 2^{12} - 96$. Тогда

$$\sqrt[12]{4000} = (2^{12} - 96)^{1/12} = 2\left(1 - \frac{96}{2^{12}}\right)^{1/12}.$$

Положим $\mu = 1/12$, $x = -96/2^{12} = -3/128$. Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt[12]{4000} = 2\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{1/12} &= 2\left(1 + \frac{1}{12}\left(-\frac{3}{2^7}\right) + R_1(x)\right)\\ &= 2\left(1 - \frac{1}{2^9} + R_1(x)\right) = \frac{2^9-1}{2^8} + 2R_1(x).\end{aligned}$$

Оценим остаток $R_1(x)$, воспользовавшись формой Лагранжа остаточного члена: найдется такое $\xi \in (-3/2^7, 0)$, что

$$\begin{aligned}2|R_1(x)| = 2\left|\frac{((1+\xi)^{1/12})''}{2!}x^2\right| &= 2\cdot\frac{1}{12}\frac{11}{12}\frac{(1+\xi)^{-23/12}}{2!}\left(\frac{3}{2^7}\right)^2\\ &= 2\cdot\frac{11\cdot 3^2}{3^2\cdot 2^{19}(1+\xi)^{23/12}} \leqslant \frac{22}{2^{19}(1-3/128)^{23/12}} \leqslant \frac{22}{10^5}.\end{aligned}$$

Такова оценка погрешности.

8.11. Задачи.

1. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить и оценить погрешность:

(1) $\sqrt[3]{30}$, **(2)** $\sqrt[5]{250}$.

2. Вычислить

(1) e с точностью до 10^{-3}, **(2)** $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-6}.

8.12. Еще одним применением производной является возможность ее использования при нахождении пределов отношений функций.

Теорема (правило Лопиталя). *Рассмотрим промежуток $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$, предельную точку $a \in \overline{\mathbb{R}}$ промежутка Δ и две функции f, g, определенные и дифференцируемые на Δ всюду, кроме, может быть, точки a, причем $g'(x) \neq 0$ для $x \in \Delta$. Предположим, что либо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, либо $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. При этих условиях если существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$ (где K может быть равным ∞), то существует и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.*

Полезно вспомнить, как приводятся к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ неопределенности вида $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞, $\infty - \infty$. Пусть $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$, $\varphi(x) \to 1$, $h(x) \to \infty$. Тогда можно использовать следующие соотношения:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}, \quad g(x)^{f(x)} = e^{f(x)\ln g(x)},$$

$$\varphi(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln \varphi(x)}, \quad g(x) - h(x) = g(x)\left(1 - \frac{h(x)}{g(x)}\right).$$

В конкретных примерах можно, разумеется, воспользоваться простейшими преобразованиями.

8.13. Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$. Имеем

$$\frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \operatorname{arctg} x}.$$

Поскольку

$$(x - \operatorname{arctg} x)' = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad (x^2 \operatorname{arctg} x)' = \frac{2x(1+x^2)\operatorname{arctg} x + x^2}{1+x^2},$$

приходим к отношению

$$\frac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)x(2(1+x^2)\operatorname{arctg} x + x)} = \frac{x}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x + x}.$$

Снова предел числителя и знаменателя нулевые, так что еще раз воспользуемся правилом Лопиталя. Найдем производную знаменателя: $2((1+x^2)\operatorname{arctg} x + x)' = 4x \operatorname{arctg} x + 3$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x + x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4x\operatorname{arctg} x + 3} = \frac{1}{3}.$$

8.14. Задачи. Воспользовавшись правилом Лопиталя, найти пределы:

(1) $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha \ln^\beta \dfrac{1}{x}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$,

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$, **(6)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + \sqrt{x^2+1})^{1/\ln x}$.

8.15. Использование производной для нахождения экстремумов основано на следующем утверждении.

Теорема. *Пусть f — дифференцируемая на (a,b) функция и $x \in (a,b)$ — такая точка, что $f'(x) = 0$ (так называемая стационарная, или критическая точка). Тогда если в некоторой окрестности слева от точки x производная положительна, а в некоторой окрестности справа отрицательна, то x — точка максимума, если же в некоторой окрестности слева от точки x производная отрицательна, а в некоторой окрестности справа положительна, то x — точка минимума функции f.*

Теорема. *Если f — дважды дифференцируемая на (a,b) функция. Тогда если $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$), то x — точка минимума (максимума) функции f.*

Как известно, всякая непрерывная на замкнутом ограниченном промежутке $[a,b]$ функция f достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Для их нахождения можно найти все (локальные) максимальные и минимальные значения f на $[a, b]$ и выбрать наибольшее (соответственно наименьшее) значение среди максимальных (минимальных) значений и значений $f(a)$ и $f(b)$ на концах промежутка.

8.16. Задача. Находя наибольшие и наименьшие значения соответствующих функций, доказать неравенства

(1) $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ p > 1;$

(2) $x^m(a-x)^n \leqslant \dfrac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}, \quad m > 0,\ n > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a;$

(3) $\dfrac{x+a}{2^{(n-1)/n}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a, \quad x \geqslant 0,\ a > 0,\ n > 1;$

(4) $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$

8.17. Выше мы отметили основные возможности использования производной для установления некоторых свойств функций. Теперь, собрав эту информацию, займемся возможно полным исследованием свойств функций и построением их графиков.

В разд. 1 мы учились делать прикидку графиков на основе исследования простейших свойств функции. Здесь к этим средствам добавим ресурсы, основанные на пределе функции и ее производной. Но сначала еще раз обратимся к простейшим средствам, а именно к анализу графика композиции на основе графиков составляющих ее функций. Для этого надо вслед за изменением аргумента следить затем, как изменяется первая из функций в композиции и как затем на ее изменение реагирует вторая функция.

8.28. Задача. Провести простейший анализ композиций двух функций и изобразить эскизы их графиков:

(1) $2^{\frac{1}{x^2}}$, (2) $2^{\operatorname{tg} x}$, (3) $2^{\sin x}$, (4) $2^{\arcsin x}$.

(5) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, (6) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$, (7) $\operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x+1}$, (8) $\operatorname{arcctg} \dfrac{x-1}{x+1}$,

(9) $\lg \dfrac{x-1}{x+1}$, (10) $2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

В дополнение к развитым средствам применим производную для анализа функции и более точного изображения ее графика. Для этого, вычислив производную, найдем участки монотонности и точки экстремума, а затем, вычислив (если это не составляет больших технических трудностей) вторую производную, найдем участки выпуклости, вогнутости и точки перегиба. По завершении исследования применим всю найденную информацию для построения графика.

Напомним основные сведения об асимптотах. Рассмотрим функцию f, у которой какая-то из бесконечно удаленных точек $+\infty$, $-\infty$ является предельной для области определения. Пусть для определенности это $+\infty$. Тогда прямую $y = kx + b$ такую, что

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0,$$

называют *асимптотой функции* f *на* $+\infty$. Для ее нахождения можно воспользоваться тем, что

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx), \tag{8.20}$$

при условии существования пределов в (8.20). Если при этом $k = 0$, то асимптоту называют *горизонтальной*, а если $k \neq 0$, то *наклонной.* В частности, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то положительная часть оси абсцисс является горизонтальной асимптотой.

Аналогичное можно сказать и для точки $-\infty$.

Если в некоторой конечной точке a оказывается, что предел $f(x)$, хотя бы какой-либо односторонний, бесконечен, то прямую $x = a$ называют *вертикальной асимптотой* функции f.

8.29. Пример. Построим график функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$.

Функция определена при всех x, кроме $x = 0$, обращается в нуль при $x = -1$. Отметим, что функция всюду неотрицательна. Ясно, что никакими свойствами четности или периодичности она не обладает.

Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$, так что прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота. Вместе с тем $\lim\limits_{x\to0} y(x) = +\infty$, так что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Найдем участки монотонности и экстремумы функции. Вычислим ее производную: $y' = 2\dfrac{-2x-3}{3x^3(x+1)^{1/3}}$. Она обращается в нуль в точке $x = -3/2$, если же $x \in (-\infty, -3/2)$, то $y'(x) > 0$ и функция возрастает, если $x \in (-3/2, -1)$, то $y'(x) < 0$, и функция убывает. В точке $x = -1$ конечной производной нет, однако для односторонних производных имеем $y'_-(-1) = -\infty$, $y'_+(-1) = +\infty$. На промежутке $(-1, 0)$ будет $y'(x) > 0$ и функция возрастает, а на $(0, +\infty)$ имеем $y'(x) < 0$ и функция убывает. Ясно, что точка $x = -3/2$, в которой производная обратилась в нуль, будет точкой максимума, а точка $x = -1$,

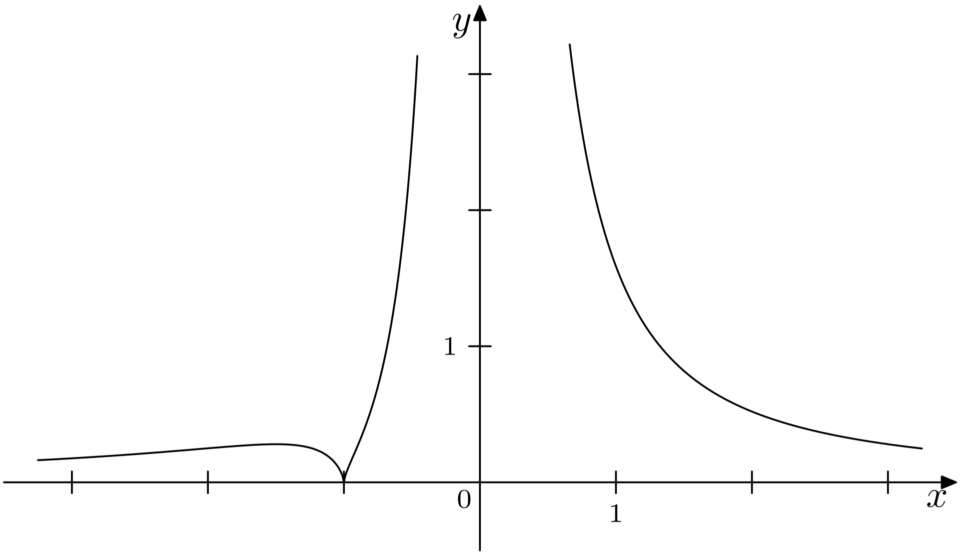

Рис. 1.

в которой производной нет, оказывается точкой минимума функции, кроме того, в этой точке функция имеет вертикальную касательную. Отметим, что $y(-1) = 0$.

Изучим наличие точек перегиба. Найдем

$$y''(x) = -\frac{2}{3}\frac{14x^2 + 42x + 27}{x^4(x+1)^{4/3}}$$

и отметим, что $y''(x) = 0$ при $x = \dfrac{-42 \pm \sqrt{252}}{28} \approx \dfrac{-42 \pm 16}{28}$. Таким образом, $y''(x) = 0$ в точках $x_1 \approx -58/28 \approx -2.07$, $x_2 \approx -24/28 \approx -0.86$. Ясно, что при $x < x_1$ и при $x > x_2$ будет $y''(x) > 0$ и $y(x)$ выпукла вниз, а при $x \in (x_1, x_2)$ имеем $y''(x) < 0$ и $y(x)$ выпукла вверх. Отметим, что $y(x_1) \approx 0.24$, $y(x_2) \approx 0.37$. Изобразим график на рис. 1.

8.30. Задачи. Применяя различные средства, построить графики функций

(1) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$, **(2)** $x\sqrt{x+1}$, **(3)** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1+x}}$,

(4) $y = |x|\sqrt{1 - x^2}$, **(5)** $y = x\sqrt{|x^2 - 1|}$, **(6)** $y = x^2 e^{-x}$,

(7) $e^{\frac{1-x}{1+x}}$, **(8)** $y = x^2 \ln x$, **(9)** $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$, **(10)** $y = xe^{-x^2}$,

8.31. Ответы. К п. 8.5. 1. (1) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4)$; (2) $e + \frac{e}{6}x^2 + \frac{e}{30}x^4 + o(x^4)$; (3) $x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$; (4) $1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{360}x^4 + o(x^4)$. **2.** (1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{3}((-1)^{k+1} - 2^{-(k+1)})x^k + o(x^n)$; (2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k(1 + 4^{(k+1)})x^k +$

$o(x^n)$. **3.** (1) $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^{-k}-1}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$; (2) $\ln 6 - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$; (3) $3 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k(x-2)^k + o((x-2)^n)$; (4) $\sum\limits_{k=2}^{n}(x-2)^k + o((x-2)^n)$. **4.** $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\big(\frac{1}{x^3}\big)$.

К п. 8.7. 1. $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. **2.** $A = -\frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{15}$; **3.** (1) $A = 1$, $B = 1$; (2) $A = 1$, $B = -1$.

К п. 8.11. 1. (1) 3.1072; (2) 3.0171. **2.** 2.718; (2) 0.017452.

К п. 8.14. (1) 0; (2) 0 при $0 < a < 1$ (α любое), $+\infty$ при $a > 1$ (α любое); (3) $\frac{1}{2}$; (4) $-\frac{1}{3}$; (5) $e^{-2/\pi}$; (6) e.