## 9. Первообразная и неопределенный интеграл

**9.1.** Пусть на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ задана функция $f(x)$. Функцию $F(x)$ называют *первообразной функции* $f(x)$ *на промежутке* $I$, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in I$, и *первообразной в обобщенном смысле функции* $f(x)$ *на промежутке* $I$, если $F$ непрерывна на $I$ и существует такое конечное подмножество $E \subset I$, что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in I \setminus E$.

Разность любых двух первообразных данной функции постоянна. Совокупность всех первообразных функции $f$ называют *неопределенным интегралом функции* $f$ и обозначают символом $\int f(x)\,dx$ (фрагмент $dx$ в этом обозначении как правило указывает на переменную интегрирования). Если $f$ имеет первообразную на $I$, то говорят, что $f$ *интегрируема на* $I$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то используют обозначение

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $C$ — произвольная постоянная. Допуская вольность в обозначениях, указание постоянной опускают, и мы обычно будем так поступать при записи результата нахождения неопределенного интеграла.

Чаще всего мы будем решать задачу нахождения (точной) первообразной, но в тех ситуациях, когда точной первообразной нет, будем изучать вопрос наличия и нахождения первообразной в обобщенном смысле. Все приводимые ниже утверждения с возможными очевидными уточнениями в формулировках справедливы и для первообразных в обобщенном смысле.

**9.2. Теорема** (линейность интеграла). *Если функции $f, g$ интегрируемы на $I$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на $I$ и*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx. \tag{9.1}$$

**9.3. Теорема** (интегрирование по частям). *Если $f, g$ дифференцируемы на $I$ и произведение $g(x)f'(x)$ интегрируемо на $I$, то произведение $f(x)g'(x)$ также интегрируемо на $I$ и имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{9.2}$$

*Используя символическую запись $df(x) = f'(x)dx$, формулу интегрирования по частям можно записать в одном из видов*

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x). \tag{9.3a}$$

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{9.3b}$$

Интегрирование по частям применяется в следующей ситуации. Если подынтегральная функция представима (или представлена) в виде произведения двух дифференцируемых функций и мы находим, что дифференцирование одной из них приводит к более простой функции, то можно попробовать воспользоваться интегрированием по частям. В таком случае второй сомножитель надо представить в виде производной от соответствующей функции (т. е. найти первообразную второго сомножителя) и применить формулу интегрирования по частям. В результате после дифференцирования первой функции может получиться подынтегральная функция более простого вида. При этом чаще всего удобно пользоваться формулой вида (9.3b).

Процесс интегрирования по частям организуется так. Допустим, что в интеграле вида $\int f(x)\varphi(x)\,dx$ мы нашли, что функция $f(x)$ в результате ее дифференцирования становится проще (например, это $x^n$ или $\operatorname{arctg} x$, или $\arcsin x$ и т. п.). Тогда ищем первообразную функции $\varphi(x)$, т. е. представляем $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = g'(x)$. Далее «заносим $g(x)$ под $d$», т. е. делаем запись вида $g'(x)\,dx = dg(x)$. Затем выполняем операцию интегрирования по частям:

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

Наконец, в последнем интеграле делаем подготовку для дальнейшего его нахождения:

$$\int g(x)\,df(x) = \int g(x)f'(x)\,dx,$$

и переходим к нахождению последнего интеграла. Символически эту последовательность действий можно записать так:

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx = \int f(x)\,dg(x)$$
$$= f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

**9.4. Теорема** (о замене переменной). *Пусть $f(u)$ — функция, имеющая на промежутке $I$ первообразную $F(u)$, и пусть $\varphi$ — дифференцируемая на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функция, отображающая этот промежуток на промежуток $I$. Тогда функция $F(\varphi(x))$ будет первообразной функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ на промежутке $\Delta$. Иначе говоря, если*

$$\int f(u)\,du = F(u), \quad u \in I,$$

*то*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)), \quad x \in \Delta.$$

Заменой переменных можно воспользоваться в следующей ситуации. Допустим, что исходный интеграл $\displaystyle\int g(x)\,dx$ удалось представить в виде

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x), \tag{9.4}$$

и если первообразная $F(u)$ функции $f(u)$ известна или может быть найдена, т. е. если $\displaystyle\int f(u)\,du = F(u)$, то можно найти и первообразную функции $g(x)$:

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)).$$

Другими словами, если исходная подынтегральная функция устроена таким образом, что она, по существу, формируется с использованием некоторого единого выражения, зависящего от $x$, то, взяв всё это выражение в качестве новой переменной (заменив это выражение единым символом, новой переменной), мы сводим нахождение первообразной исходной функции к нахождению первообразной другой, как правило более простой функции.

**9.5. Теорема** (о подстановке). *Пусть $f(x)$ — функция, заданная на промежутке $I$, и пусть $\varphi(t)$ — заданная на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ строго монотонная дифференцируемая функция, отображающая $\Delta$ на $I$ и имеющая дифференцируемую обратную. Тогда если функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную $\Phi(t)$ на промежутке $\Delta$, то $f$ имеет первообразную на $I$, равную $\Phi(\varphi^{-1}(x))$. Иначе говоря, если*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(t), \quad t \in \Delta,$$

то
$$\int f(x)\,dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in I.$$

Метод подстановки для нахождения интеграла $\displaystyle\int f(x)\,dx$ применяют обычно так. Из каких-то соображений берут удовлетворяющую условиям теоремы о подстановке функцию $\varphi(t)$ и на место $x$ в исходном интеграле подставляют $x = \varphi(t)$, при этом расписывая $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$. В результате переходят к нахождению первообразной новой функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т. е. к нахождению интеграла $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Если его удается найти и при этом

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(t),$$

то интеграл от $f(x)$ получают подстановкой в $\Phi$ на место $t$ выражения $\varphi^{-1}(x)$, т. е.
$$\int f(x)\,dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)).$$

### 9.6. Таблица простейших неопределенных интегралов.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1,\ x > 0; \tag{9.5}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \quad x \neq 0; \tag{9.6}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}; \quad \int e^x\,dx = e^x, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{9.7}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \quad \int \cos x\,dx = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{9.8}$$

$$\begin{gathered}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z};\\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z};\end{gathered} \tag{9.9}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, \\ -\operatorname{arcctg} x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}; \tag{9.10}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x, \\ -\arccos x, \end{cases} \quad x \in [-1, 1]; \tag{9.11}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \quad |x| \neq 1; \tag{9.12}$$

$$\begin{gathered}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),\\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ |x|>1;\end{gathered} \tag{9.13}$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x, \quad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x; \tag{9.14}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x. \tag{9.15}$$

**9.7. Примеры.** Найдем указанные ниже интегралы.

**1.** В простейших случаях можно, воспользовавшись несложными преобразованиями, привести интеграл к табличным:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= \int \sqrt{x}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{1/2}\,dx + \int x^{-1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}.$$

**2.** При интегрировании выражений, связанных с тригонометрическими функциями, прежде всего надо попробовать провести простейшие преобразования, используя формулы, с тем, чтобы, возможно, прийти к табличным интегралам:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x.$$

**3.** Если искомый интеграл отличается от табличного только постоянными множителями в каких-то частях подынтегрального выражения, то можно воспользоваться простой заменой:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{b}{a}x)^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{d(\frac{b}{a}x)}{1+(\frac{b}{a}x)^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x.$$

**4.** Иногда для поиска замены приходится применять хитрости. Найдем при $x>0$ интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+1/x^2}} = -\int \frac{d(1/x)}{\sqrt{1+1/x^2}}$$

(замена $u = 1/x$)

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\ln(u+\sqrt{u^2+1}) = -\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

**5.** Применяемые для поиска замены хитрости могут оказаться очевидными:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$(\text{замена } u = \cos x)$$

$$= -\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

**6.** При интегрировании дробно-рациональной функции обычно раскладывают ее в сумму простейших дробей, и иногда это легко сделать без обращения к специальным методам:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}\right) dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

**7.** Вид подынтегральной функции может подсказать удачную подстановку. Так, например, в интеграле

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx, \quad a > 0,$$

учитывая формулы

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1, \quad \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t, \quad \operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$$

для гиперболических функций, можно сделать подстановку $x = a\operatorname{sh} t$, разумеется, подготовив ее, т. е. выразив $t$ через $x$, и проанализировав, на каких промежутках изменения переменных $t$ и $x$ это возможно. При нашей подстановке, учитывая свойства синуса гиперболического, обе переменные можно рассматривать на всей числовой прямой. Итак, после подстановки получим такой интеграл:

$$\int \sqrt{a^2+a^2\operatorname{sh}^2 t}\cdot a\cdot \operatorname{ch} t\, dt = a^2 \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\, dt$$

$$= a^2 \int \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\operatorname{ch} 2t)\, dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4}\operatorname{sh} 2t.$$

Учитывая, что $\operatorname{arsh} z = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$ и тем самым

$$t = \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

вернемся к переменной $x$:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arsh}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\frac{x}{a}\right)\operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh}\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{a^2}\right).$$

**8.** Найдем интеграл $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$. Заметим, что под интегралом стоит произведение двух функций, одна их которых, а именно $f(x)=x$, после дифференцирования становится проще. Это подсказывает нам, что следует попробовать воспользоваться интегрированием по частям. Представим второй сомножитель как производную соответствующей функции: $e^{-x}=(-e^{-x})'$. Проведем предварительную подготовку для использования одной из формул (9.2), (9.3), т. е. запишем интеграл так:

$$\int xe^{-x}\,dx = -\int x\,de^{-x}.$$

Теперь завершим нахождение путем применения формулы (9.3b):

$$\int xe^{-x}\,dx = -\int x\,de^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(1+x).$$

**9.** В этом примере совместим использование замены и затем интегрирования по частям. Найдем интеграл $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. Поскольку с функцией вида $e^t$ обращаться проще, чем с функцией вида $e^{\sqrt{x}}$, можно весь корень в показателе степени взять в качестве новой переменной, благо свойство строгого возрастания корня позволяет выразить $x$ через $t$. Итак, сделаем замену $\sqrt{x}=t$ и подготовим переход к новой переменной: $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, $t\geqslant 0$. Применяя интегрирование по частям, имеем

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t\,dt = 2\int t\,de^t$$

$$= 2\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = 2e^t(t-1) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1).$$

**9.8. Задачи.** Найти интегралы

**(1)** $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$, **(2)** $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$, **(3)** $\int \frac{dx}{2-3x^2}$,

**(4)** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$, **(5)** $\int \frac{dx}{1+\cos x}$, **(6)** $\int \frac{dx}{1-\cos x}$,

**(7)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(8)** $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, **(9)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

**(10)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$, **(11)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, **(12)** $\int x\sqrt{1+x}\,dx$,

**(13)** $\int \operatorname{tg} x\,dx$, **(14)** $\int \frac{dx}{\cos x}$, **(15)** $\int \frac{x\,dx}{(1-x^2)^2}$,

**(16)** $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$, **(17)** $\int \sin^2 x\,dx$, **(18)** $\int \cos^2 x\,dx$,

**(19)** $\int \sin^3 x\,dx$, **(20)** $\int \cos^3 x\,dx$, **(21)** $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x\,dx$,

**(22)** $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$, **(23)** $\int x^2 e^{-2x}\,dx$,

**(24)** $\int x\cos x\,dx$, **(25)** $\int \arcsin x\,dx$, **(26)** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$,

**(27)** $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$, **(28)** $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$,

**(29)** $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, **(30)** $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

**9.9.** Интегрирование рациональных функций, т. е. функций вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P, Q$ — полиномы, основано на возможности представления рациональной функции в виде суммы таких рациональных функций, интегрирование которых провести сравнительно просто.

Для краткости и простоты ограничимся рассмотрением функции вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^m(x^2+px+q)^k},$$

где полином $x^2+px+q$ не имеет вещественных корней и степень $P(x)$ меньше, чем степень $m+2k$ знаменателя. Утверждается, что существуют числа $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_k$, $c_1, \ldots, c_k$, при которых верно равенство

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m(x^2+px+q)^k} = \frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{a_m}{(x-a)^m} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{b_kx+c_k}{(x^2+px+q)^k}. \quad (9.16)$$

Рассматривая числа $a_i$, $b_j$, $c_j$ как неопределенные коэффициенты, приведем к общему знаменателю сумму дробей в правой части (9.16), в результате в числителе получится некоторый полином степени не выше чем $m+2k-1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях у полученного полинома и у полинома $P(x)$, придем к системе уравнений, решая которую, найдем требуемые коэффициенты.

Обратим внимание на то, что каждый множитель в знаменателе исходного дробного выражения порождает свою группу слагаемых.

На практике иногда вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной бывает проще подставить на место $x$ какие-то конкретные значения переменной и получить требуемую систему уравнений. Обычно подставляют такие значения, которые обращают в нуль как можно больше сомножителей в числителе после приведения к общему знаменателю.

**9.10. Примеры.**

**1.** Найдем интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$. Запишем представление подынтегральной функции в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x+1)(x-1)+b(x-1)+c(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)},$$

откуда, приравнивая числители, получаем равенство

$$x^2+1 = a(x+1)(x-1)+b(x-1)+c(x+1)^2, \quad (9.17)$$

на основе которого мы и составим систему для нахождения $a, b, c$. Можно было бы раскрыть скобки в правой части (9.17) и затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях. Однако в нашем случае проще поступить следующим образом. Подставим в (9.17) на место $x$ значения $x=1$, $x=-1$, при которых обращаются в нуль выражения $x-1$ и $x+1$, а также какое-либо значение, при котором правую часть нетрудно вычислить, например $x = 0$. Тогда получим соответственно равенства

$$2 = 4c, \quad 2 = -2b, \quad 1 = -a - b + c,$$

откуда $a = 1/2$, $b = -1$, $c = 1/2$. Таким образом,

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1}.$$

**2.** Найдем интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$. Для этого представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)},$$

откуда $1 = a(x^2+1) + (bx+c)(x+1)$. Полагая здесь $x = -1$, сразу найдем, что $1 = 2a$, т. е. $a = 1/2$. Раскроем теперь скобки и приведем подобные члены:

$$1 = ax^2 + a + bx^2 + cx + bx + c = (a+b)x^2 + (b+c)x + a + c,$$

откуда

$$a + b = 0, \quad b + c = 0, \quad a + c = 1,$$

и учитывая, что $a = 1/2$, получаем $b = -1/2$, $c = 1/2$. Итак,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{1-x}{x^2+1}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

**9.11. Задачи.** Найти интегралы

**(1)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, **(2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$, **(3)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$,

**(4)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$, **(5)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$, **(6)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

**9.12.** При интегрировании функций, содержащих иррациональные выражения, стараются сделать подстановку или замену переменной так, чтобы в результате прийти к интегралу от рациональной функции. Отметим несколько наблюдений по поиску таких замен.

**1.** Если подынтегральная функция рационально зависит от $x$ и от выражения $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, то можно сделать замену $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (конечно, если коэффициенты $a, b, c, d$ таковы, что $x$ однозначно выражается через $t$ с выполнением условий теоремы 9.5), т. е. подстановку $x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$. В результате получаем интеграл от рациональной функции, после нахождения которого возвращаемся к старой переменной $x$.

**2.** При интегрировании функций, рационально зависящих от $x$ и от выражения $\sqrt{ax^2+bx+c}$, могут быть полезны *подстановки Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t, \quad \text{если } a > 0, \tag{9.19}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, \quad \text{если } c > 0, \tag{9.20}$$

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1), \tag{9.21}$$

приводящие к интегрированию рациональной функции от $t$.

**3.** При интегрировании функций вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $P, Q$ — полиномы, бывает полезно разложить дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей.

**4.** При интегрировании функции вида $x^m(a+bx^n)^p$, где $m, n, p$ рациональны, следует сделать такие подстановки:

1) если $p$ целое, то полагают $x = t^N$, где $N$ — общий знаменатель дробей $m, n$;

2) если $\dfrac{m+1}{n}$ целое, то полагают $a + bx^n = t^N$, где $N$ — знаменатель дроби $p$;

3) если $\dfrac{m+1}{n} + p$ целое, то полагают $ax^{-n} + b = t^N$, где $N$ — знаменатель дроби $p$.

В других случаях интеграл от функции $x^m(a+bx^n)^p$ в элементарных функциях не выражается.

**9.13. Примеры.**

**1.** Найдем интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}},$$

рассматривая для простоты случай $a < b$ и $x > b$ (остальные получаются аналогично). Положим

$$t = \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}},\ a \neq b, \quad x = \frac{a-bt^n}{1-t^n}, \quad dx = \frac{(a-b)nt^{n-1}}{(1-t^n)^2}\,dt,$$

$$x-b = \frac{a-b}{1-t^n}, \quad x-a = t^n(x-b) = \frac{(a-b)t^n}{1-t^n}.$$

Тогда

$$I = \int \frac{(a-b)nt^{n-1}\,dt}{(1-t^n)^2 \frac{(a-b)t^n}{1-t^n}\,\frac{a-b}{1-t^n}\,t} = \frac{n}{a-b}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{n}{(b-a)t} = \frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}.$$

**2.** Сведем следующий интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$I = \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx.$$

Воспользуемся подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2+3x+2} = x+t$. Тогда $x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2tx + t^2$, или

$$x(3-2t) = t^2 - 2, \quad x = \frac{t^2-2}{3-2t}, \quad dx = -2\frac{t^2+3t-2}{(3-2t)^2}\,dt.$$

Подставив, получим

$$I = 2\int \frac{t(t^2+3t-2)}{(3t-4)(3-2t)}\,dt.$$

**9.14. Задачи.** Найти интегралы

**(1)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$, **(2)** $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$, **(3)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$,

**(4)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$, **(5)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, **(6)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

**9.15.** Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция переменных $u, v$, приводятся к интегрированию рациональной функции заменой $\operatorname{tg}(x/2) = t$, т. е. подстановкой $x = 2 \operatorname{arctg} t$. При этом полезно помнить формулы (9.25) (см. ниже).

Если функция $R$ обладает дополнительно некоторыми свойствами, то можно применить другие подстановки, которые, как правило, приводят к уменьшению объема вычислений. А именно, если

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x), \tag{9.22}$$

то можно положить $\cos x = t$, а если

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x), \tag{9.23}$$

то можно взять $\sin x = t$. В случае, если

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x), \tag{9.24}$$

полагают $\operatorname{tg} x = t$.

**9.16. Пример.** Найдем интеграл $I = \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$. Положим $\cos x = t$, тогда $x = \arccos t$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Имеем

$$\begin{aligned} I = -\int \frac{dt}{(2+t)\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}} \\ = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{(2+t)(t-1)(t+1)} \\ = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}. \end{aligned}$$

**9.17. Задачи.**

**1.** Найти интегралы

**(1)** $\int \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x}$ при $0 < \varepsilon < 1$ и при $\varepsilon > 1$,

**(2)** $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx$, **(3)** $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$, **(4)** $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$,

**(5)** $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\, dx$, **(6)** $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$,

**2.** Вывести формулы понижения для интегралов

$$\text{(а)} \quad I_n = \int \sin^n x\, dx; \quad \text{(б)} \quad K_n = \int \cos^n x\, dx \quad (n > 2)$$

и с их помощью вычислить $\int \sin^6 x\, dx$ и $\int \cos^8 x\, dx$.

**3.** Вывести формулы понижения для интегралов

$$\text{(а)} \quad I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad \text{(б)} \quad K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2)$$

и с их помощью вычислить $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ и $\int \frac{dx}{\cos^7 x}$.

**9.18.** Приведем небольшой список формул, которые могут пригодиться при нахождении первообразных:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \tag{9.25}$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \tag{9.26}$$

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \end{aligned} \tag{9.27}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \end{aligned} \tag{9.28}$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \end{aligned} \tag{9.29}$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \end{aligned} \tag{9.30}$$

$$\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), \\ \cos x \sin y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)), \end{aligned} \tag{9.31}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \tag{9.32}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \tag{9.33}$$

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, \tag{9.34}$$

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2-1}), \quad x \geqslant 1,\ -\infty < y \leqslant 0, \tag{9.35}$$

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y < +\infty. \tag{9.36}$$

**9.22. Ответы. К п. 9.8.**

(1) $x - \operatorname{arctg} x$; (2) $-x - \operatorname{ctg} x$; (3) $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|$; (4) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}|/2$; (5) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; (6) $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; (7) $-\sqrt{1-x^2}$; (8) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; (9) $-\arcsin\frac{1}{|x|}$; (10) $2\operatorname{sgn} x \cdot \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|})$; (11) $2\arcsin\sqrt{x}$; (12) $\frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}$; (13) $-\ln|\cos x|$; (14) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; (15) $\frac{1}{2(1-x^2)}$; (16) $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$; (17) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$; (18) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$; (19) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$; (20) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$; (21) $2\left(\frac{1}{11}\sin^4 x - \frac{2}{7}\sin^2 x + \frac{1}{3}\right)\sqrt{\sin^3 x}$; (22) $-\sqrt{a^2-x^2} + a\arcsin\frac{x}{a}$; (23) $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$; (24) $x\sin x + \cos x$; (25) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; (26) $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$; (27) $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$; (28) $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$; (29) $\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$; (30) $\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

**К п. 9.11.** (1) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$; (2) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; (3) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; (4) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$; (5) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$; (6) $\frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2} - \frac{3}{625}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|$;

**К п. 9.14.** (1) $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$; (2) $\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$; (3) $\frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$, где $z = x + \sqrt{x^2+x+1}$; (4) $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right| - 2\operatorname{arctg} z$, где $z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; (5) $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, где $z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$; (6) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z$, где $z = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

**К п. 9.17. 1.** (1) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, если $0 < \varepsilon < 1$; $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}$, если $\varepsilon > 1$; (2) $x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$; (3) $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$; (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)$; (5) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x)$; (6) $-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos x - \sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)$. **2.** (а) $I_n = -\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$; (б) $K_n = \frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}k_{n-2}$; $I_6 = -\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x\sin^3 x - \frac{5}{16}\cos x\sin x + \frac{5}{16}x$; $K_8 = \frac{1}{8}\sin x\cos^7 x + \frac{7}{48}\sin x\cos^5 x + \frac{35}{192}\sin x\cos^3 x +$

$\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x$. **3.** (а) $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; (б) $\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$; $I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$; $\quad K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5}{24}\frac{\sin x}{\cos^4 x}+\frac{5}{16}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{5}{16}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.