Глава 1. Введение в анализ

§ 1.1. Функции, основные понятия, свойства и методы исследования

Начнем освоение курса математического анализа с повторения понятия функции. Сначала повторим определения основных связанных с функциями терминов.

1.1. Понятие функции. Способы образования новых функций.

ТЕОРИЯ

В математике значительную роль играют зависимости между величинами или объектами, отражающие зависимости между явлениями или объектами окружающего нас мира. Зависимости, рассматриваемые в математике, могут быть описаны разными способами, более того, одна и та же зависимость может быть описана разными средствами. Величины, находящиеся во взаимозависимости, могут выступать как равноправные, а может быть и так, что одна из величин считается выбираемой произвольно, а другая находится согласно определенному правилу в зависимости от выбора первой.

Среди всех зависимостей выделяют зависимости, обладающие свойством однозначности, и для них вводят отдельный термин — отображение.

Определение 1. Пусть даны множества X и Y (произвольной природы). *Отображением*, определенным (заданным) на множестве X и действующим в множество Y, называют правило, согласно которому каждому элементу x множества X сопоставляется какой-то один, вполне определенный, элемент y множества Y.

Таким образом, термин «отображение» резервируется за однозначными зависимостями. Для ситуаций, когда это требование отсутствует, а зависимость между $x \in X$ и $y \in Y$ все же есть, зарезервирован другой термин, но такие зависимости нами рассматриваться не будут.

Тот факт, что каждому $x \in X$ сопоставляется один элемент из Y, вовсе не означает, что всем элементам из X сопоставляется один и тот же элемент. Это означает, что одному x не может быть сопоставлено более одного y. При этом разным элементам может сопоставляться один и тот же элемент, а могут и разные.

Если множества X, Y числовые, т. е. состоят из вещественных чисел, то в таком случае отображение множества X в множество Y называют *функцией.*

Далее мы будем чаще всего обращаться именно к функциям, т. е. считать X, Y содержащимися в $\mathbb{R}$, поэтому при развитии терминологии будем говорить о функциях, хотя термины, определения которых не используют особенностей числового множества типа арифметических операций, сравнения и т. п., годны и для отображений. Мы будем также называть функциями отображения, действие которых распространяется на несколько числовых величин (так называемые функции нескольких переменных).

Договоримся о терминах и обозначениях. Правило, задающее функцию, часто обозначают буквами $f, g, h, \varphi, \ldots$. Если f — функция, то множество X, на элементы которого распространяется действие правила (функции) f, называют *областью определения функции* f и обозначают через $D(f)$. Число, получаемое в результате действия функции f на элемент $x \in X$, называют *значением функции* f *на элементе* x и обозначают символом $f(x)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, где x берутся из области определения $D(f)$, называют *множеством значений функции* f и обозначают через $E(f)$. Тот факт, что y — значение функции f на элементе x, выражают равенством $y = f(x)$. Это же обстоятельство иногда удобно записывать с использованием стрелки с хвостиком, а именно в виде $f : x \mapsto f(x)$, символизирующем тот факт, что элемент x правилом f переводится в $f(x)$.

Функция может быть задана описанием, задающим правило сопоставления, либо формулой, либо перечислением всех ее значений. Можно говорить и о графическом задании функции, если оно позволяет определенно установить правило сопоставления, характеризующее функцию. Вместе с указанием правила сопоставления желательно указывать и два других атрибута, сопровождающие функцию, а именно ее область определения и множество значений. Если область определения при задании функции не указана, то считается, что функция рассматривается на ее естественной области определения, т. е. на множестве всех тех чисел, для которых выполнимы предусмотренные формулой действия. Множество значений обычно не указывается по той причине, что оно однозначно характеризуется заданием самой функции и области ее определения.

Укажем способы получения новых функций из уже имеющихся. Часть таких способов связана с арифметическими операциями в множестве вещественных чисел.

Определение 2. Пусть на множестве X заданы функции f, g. *Суммой, произведением, частным функций f и g* и *произведением функции f на число* называют функции, заданные соответственно правилами

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{1.1}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0, \tag{1.3}$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

О соотношениях (1.1)–(1.4) говорят, что они понимаются *поточечно.*

Кроме того, функции можно сравнивать, а именно для заданных на множестве X функций f и g считают, что f *меньше чем* g, если $f(x) < g(x)$ для любого $x \in X$. Аналогично подходят к терминам *меньше или равна*, *больше*, *больше или равна.*

Еще один способ получения новых функций основан на последовательном действии нескольких функций. Опишем его для двух функций, для большего числа функций процедура аналогична.

Определение 3. Пусть функция f определена на множестве X и действует в множество Y, а функция g определена на множестве Y или на каком-то его подмножестве и действует в некоторое множество Z. Тогда, взяв такой элемент $x \in X$, что $f(x)$ попадает в область определения функции g, можно подействовать на $f(x)$ функцией g. Получается новое правило h, действующее на те элементы из X, для которых $f(x) \in D(g)$, следующим образом:

$$h(x) = g(f(x)). \tag{1.5}$$

Отображение h называют *сложной функцией, составленной из f и g*, или *композицией функций f и g*, или *суперпозицией функций f и g*. Композицию функций f и g обозначают так: $g \circ f$, тем самым

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Из определения композиции h функций f и g ясно, что $D(h) = \{x \in X : f(x) \in D(g)\}$.

Наконец, отметим еще один способ образования новых функций. Он основан на восстановлении «истории» значений данной функции и отражает определенную равноправность переменных. Однако этот способ требует от функции дополнительного свойства, которое сейчас опишем.

В определении функции особо было оговорено свойство ее однозначности, т. е. невозможности сопоставления одному элементу сразу двух или более элементов. Вместе с тем разным элементам из области определения функции вполне может быть сопоставлен один и тот же элемент множества ее значений. Например, функция $f(x) = x^2$ любые два противоположных значения аргумента переводит в одно значение, функция $f(x) = \sin x$ бесконечно много элементов переводит в один, и т. д. Ясно, что если в таком случае задаться целью определить, из какого значения аргумента было получено то или иное значение функции, то однозначно это сделать невозможно. Поскольку указанное восстановление «истории» значений функции бывает необходимо, обратимся к свойству функции, которое обеспечивало бы однозначность при таком восстановлении.

Определение 4. Функцию $v = f(u)$ называют *обратимой* или *взаимно однозначной на множестве* $X \subset D(f)$, если для любых $u_1, u_2 \in X$ таких, что $u_1 \neq u_2$, будет $f(u_1) \neq f(u_2)$, иначе говоря, если для любых двух различных элементов множества X соответствующие им значения функции различны.

Тем самым каждое значение $v = f(u)$ обратимой функции f получается в точности из одного значения $u \in X$ и можно вести речь об однозначном восстановлении «истории» значения $v = f(u)$, т. е. об элементе $u \in X$, из которого значение v получено.

Определение 5. Пусть $v = f(u)$ — обратимая на множестве X функция, и пусть Y — множество всех элементов $v = f(u)$, где $u \in X$. Каждому элементу $v \in Y$ сопоставим элемент $u \in X$ такой, что $v = f(u)$. Указанное однозначное правило определяет функцию, которую называют *функцией, обратной к функции* f, и обозначают символом f^{-1}.

Заметим, что если на элемент $u \in X$ сначала подействовать функцией f, а затем на элемент $v = f(u)$ подействовать функцией f^{-1}, то мы получим исходный элемент u, иначе говоря,

$$f^{-1}(f(u)) = u \quad \text{для любого } u \in X. \tag{1.6}$$

Аналогичное равенство можно записать и для элементов $v \in Y$:

$$f(f^{-1}(v)) = v \quad \text{для любого } v \in Y. \tag{1.7}$$

Из определения функции, обратной к данной, можно усмотреть, что равенство $v = f(u)$ равносильно тому, что $u = f^{-1}(v)$, тем самым можно говорить не только о функции, обратной к данной, а о паре взаимно обратных друг другу функций f и f^{-1}. Записи $v = f(u)$ и $u = f^{-1}(v)$ означают, по существу, одно и то же, а именно что элементы u и v находятся в определенной зависимости, которая в разных контекстах может принимать разные обозначения: $v = f(u)$ или $u = f^{-1}(v)$, смотря по тому, какую из переменных u и v считают аргументом функции. Кстати, равенства (1.6), (1.7) в полной мере характеризуют обратные друг другу функции f и f^{-1}.

ТЕХНОЛОГИИ

Образование новых функций: композиция, обратная функция. Композиция двух функций формируется согласно определению. Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$ (одна и та же буква x использована для указания аргумента обеих функций специально, а именно для того, чтобы подчеркнуть существенность не буквы, а положения, которое она занимает). Для нахождения значения композиции $h(x) = g(f(x))$ надо на место аргумента функции g подставить значение $f(x)$ функции f и результатом будет значения композиции. Аналогичное можно сказать о композиции $f(g(x))$.

Пример 1. Составим композиции функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \sqrt{x}$ и найдем их области определения и множества значений.

Для нахождения композиции $g(f(x))$ надо на место аргумента в функцию $\sqrt{x}$ подставить выражение $\sin x$, т. е. $g(f(x)) = \sqrt{\sin x}$. Область определения этой композиции характеризуется неравенством $\sin x \geqslant 0$, выражающим требование принадлежности значений $\sin x$ области определения функции $t \mapsto \sqrt{t}$. Множество решений этого неравенства есть объединение всех промежутков вида $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$, где $k \in \mathbb{Z}$. Множеством значений служит промежуток $[0, 1]$.

Для другой композиции имеем $f(g(x)) = \sin\sqrt{x}$. ее область определения совпадает с областью определения корня квадратного и заполняет промежуток $[0, +\infty)$, а множеством значений является множество $[-1, 1]$ значений синуса.

Для выяснения обратимости функции $z = f(x)$ надо ответить на вопрос: при каких z уравнение $z = f(x)$ относительно x имеет единственное решение? Ответ можно получить, например, непосредственно выражая x через y, если такая возможность имеется. Если ее нет, то надо использовать свойства, гарантирующие обратимость, например, монотонность. Пока ограничимся примерами, в которых монотонность можно не привлекать.

Пример 2. Исследуем обратимость функции $z = x + \dfrac{1}{x}$ на множестве $x > 0$ и найдем к ней обратную. Если функций не обратима, выясним, на каких частях области определения она обратима и найдем соответствующие обратные функции.

Будем выражать x через z и отвечать на вопрос: единственно ли такое выражение и если нет, то на каких множествах переменной x есть единственность? Имеем

$$z = x + \frac{1}{x} \iff x^2 - zx + 1 = 0 \iff \left(x - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4} + 1 = 0$$
$$\iff \left(x - \frac{z}{2}\right)^2 = \frac{z^2 - 4}{4},$$

и ясно, что возможность выразить x через z есть при $z \geqslant 2$, при этом можно показать, что для $x \in (0, 1]$ выражение будет таким:

$$x = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

а для $x \in [1, +\infty)$ — таким:

$$x = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

Получили, что обратимости на всем $(0, +\infty)$ нет, но на промежутках $(0, 1]$ и $[1, +\infty)$ есть, и соответствующие обратные, определенные на множестве $z \in [2, +\infty)$ имеют указанный выше вид.

Нахождение области определения и множества значений. Область определения, видимо, первое, что надо изучить при общении с данной функцией. Для функции, заданной графически, т. е. предъявлением ее графика, метод нахождения области определения состоит в следующем. Встанем в точку x оси абсцисс и проведем через нее вертикальную прямую. Если она пересечет график (кстати, в единственной точке), то такое

x входит в область определения функции f, если не пересечет — не входит. Двигаясь по оси абсцисс слева направо и при каждом x проделывая указанную процедуру, мы можем увидеть, какую часть оси абсцисс занимает область определения (рис. 1.1(a)).

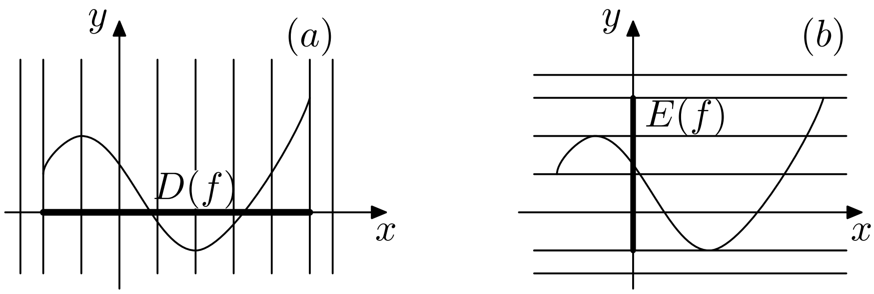

Рис. 1.1.

Аналогично выявляется множество значений, но для этого мы должны взять точку y оси ординат и провести через нее горизонтальную прямую. Если она пересечет график функции (возможно, в нескольких точках), то такое y входит в множество значений, если не пересечет — не входит. Двигаясь по оси ординат снизу вверх и при каждом y проделывая указанную процедуру, мы можем увидеть, какую часть оси ординат занимает множество значений (рис. 1.1(b)).

Напомним области определения и множества значений основных элементарных функций, при этом аргумент и значения будем обозначать не традиционно используемыми для них буквами x, y, а какими-то другими, например t, z. Это сделано для того, чтобы в требования, предъявляемые к области определения и множеству значений той или иной функции, можно было на место аргумента или значения подставлять какие-то зависящие от другой переменной выражения и получать соотношения, характеризующие область определения и множество значений данной функции. Вся информация представлена в виде таблицы.

Начинать нахождение области определения функции лучше всего с вопроса «как устроена функция?» Это может быть сумма, или произведение конечного набора функций, или частное двух функций, или композиция (сложная функция). После ответа на этот вопрос можно приступать к нахождению области определения, пользуясь следующими фактами.

1. Сумма или произведение конечного набора функций определены на множестве тех чисел, для которых определены **все** слагаемые или со-

Таблица областей определения и множеств значений

$z = f(t)$	описание $D(f)$	описание $E(f)$
$z = t^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$	$t \in \mathbb{R}$	$z \geqslant 0$
$z = t^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,	$t \in \mathbb{R}$	$z \in \mathbb{R}$
$z = \sqrt[2n]{t}$	$t \geqslant 0$	$z \geqslant 0$
$z = \sqrt{t}$	$t \geqslant 0$	$z \geqslant 0$
$z = \frac{1}{t}$	$t \neq 0$	$z \neq 0$
$z = a^t$	$t \in \mathbb{R}$	$z > 0$
$z = \log_a t$	$t > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$	$z \in \mathbb{R}$
$z = \sin t$	$t \in \mathbb{R}$	$-1 \leqslant z \leqslant 1$
$z = \cos t$	$t \in \mathbb{R}$	$-1 \leqslant z \leqslant 1$
$z = \operatorname{tg} t$	$t \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$	$z \in \mathbb{R}$
$z = \operatorname{ctg} t$	$t \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$	$z \in \mathbb{R}$
$z = \arcsin t$	$-1 \leqslant t \leqslant 1$	$-\pi/2 \leqslant z \leqslant \pi/2$
$z = \arccos t$	$-1 \leqslant t \leqslant 1$	$0 \leqslant z \leqslant \pi$
$z = \operatorname{arctg} t$	$t \in \mathbb{R}$	$-\pi/2 < z < \pi/2$
$z = \operatorname{arcctg} t$	$t \in \mathbb{R}$	$0 < z < \pi$

множители, т. е. область определения суммы или произведения равна пересечению областей определения слагаемых или сомножителей.

Если функцию умножить на какое-то число, то ее область определения не изменится.

2. Частное двух функций определено для тех чисел, для которых определены числитель и знаменатель и при этом значения знаменателя отличны от нуля.

3. Композиция $g(f(x))$ функций f (внутренняя функция) и g (внешняя функция) определена на множестве таких значений аргумента x, для которых, во-первых, определена внутренняя функция f, а во-вторых, значения $f(x)$ принадлежат области определения внешней функции g. При нахождении области определения композиции достаточно записать в виде соотношений требование принадлежности значений $t = f(x)$ внутренней функции области определения внешней функции $g(t)$ и перейти к решению записанных соотношений (область определения внутренней функции учтется в ходе их решения).

При определении вида (устройства) функции надо выделить последнее действие, которое производится при нахождении ее значений. Если такое действие есть сложение, умножение или деление, то это сумма, произведение или частное двух функций; если же это нахождение значения какой-то из основных элементарных функций, то это композиция, в которой последней действует та функция, значения которой находятся на последнем шаге. После определения вида функции надо воспользоваться указанными выше фактами и перейти к изучению областей определения функций, из которых составлена данная функция.

Посмотрим на примерах, как работают описанные соображения.

Пример 3. Найдем область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{9 - x^2}.$$

Наша функция представляет собой сумму двух функций, так что для нахождения ее области определения надлежит найти области определения каждого из слагаемых и взять их пересечение.

Функция $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ устроена так, что последней при нахождении ее значений является операция взятия корня, т. е. мы имеем композицию, в которой последней действует функция «корень квадратный». Ее область определения порождает требование $x^2 - 4 \geqslant 0$. Аналогично область определения функции $f_2(x) = \sqrt{9 - x^2}$ добавляет требование $9 - x^2 \geqslant 0$.

Нетрудно найти множества решений этих неравенств: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, $[-3, 3]$, и взять их пересечение: $[-3, -2] \cup [2, 3]$, в результате получаем область определения функции f.

Пример 4. Найдем область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{12 + x - x^2}}{x^2 - 9}.$$

Функция представляет собой частное двух функций, поэтому она определена там, где определены обе эти функции при добавлении требования отличия от нуля знаменателя. Ясно, что знаменатель определен всюду, а обращается в нуль при $x = 3$ или $x = -3$. Теперь надлежит найти область определения числителя и из нее удалить нули знаменателя (если, конечно, какой-то их них туда попадет).

Числитель представляет собой композицию, в которой последняя функция — это взятие корня квадратного. Функция определена там, где подкоренное выражение неотрицательно, т. е. область определения числителя характеризуется как множество решений неравенства $12 + x - x^2 \geqslant 0$. Легко установить, что это промежуток $[-3, 4]$. Для нахождения области определения всей дроби из этого промежутка надо удалить числа -3 и 3 как нули знаменателя, в итоге получим множество $(-3, 3) \cup (3, 4]$.

Пример 5. Найдем область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x - \sqrt{4x - 1}).$$

Функция представляет собой композицию, в которой внешней (последней действующей) функцией служит логарифм, поэтому область определения функции f будет находиться из условия положительности подлогарифмического выражения:

$$2x - \sqrt{4x - 1} > 0, \tag{1}$$

и будет множеством решений неравенства (1). Найдем это множество, т. е. решим неравенство (1). Имеем

$$2x - \sqrt{4x-1} > 0 \Longleftrightarrow 2x > \sqrt{4x-1} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 4x - 1 \geqslant 0, \\ 4x^2 > 4x - 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{4}, \\ (2x-1)^2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{4}, \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [1/4, 1/2) \cup (1/2, +\infty).$$

Пример 6. Найдем область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}.$$

Функция является композицией функций, последней из которых действует функция извлечения квадратного корня, поэтому область определения всей функции будет находиться из требования неотрицательности подкоренного выражения, т. е. как множество решений неравенства $\log_{0,3} \dfrac{x-1}{x+5} \geqslant 0$.

Решим это неравенство. Оно представляет собой логарифмическое неравенство, в котором логарифм с основанием, меньшим единицы, сравнивается с нулем. Имеем

$$\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}\geqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-1}{x+5}>0,\\ \dfrac{x-1}{x+5}\leqslant 1\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-5,\\ x>1,\end{array}\right.\\ x>-5\end{cases} \Longleftrightarrow x>1.$$

Нахождение множества значений функции связано с использованием ее свойств, поэтому вопрос о нахождении множества значений отдельно рассматривать не будем. Оно формируется на основе области определения и функции, и если в этом появится необходимость, будем искать множество значений исходя из области определения и свойств функции.

ПРАКТИКА

1. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ составить композиции $f(g(x)$ и $g(f(x))$ и найти их области определения и множества значений:

(1) $f(x)=1-x^2$, $g(x)=\ln x$, (2) $f(x)=\ln x$, $g(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

2. Изучить обратимость следующих функций и найти обратные к ним. В случае отсутствия обратимости на всей области определения выделить области обратимости и найти соответствующие обратные функции.

(1) $\dfrac{x}{x+1}$, (2) x^2+x.

3. На каких промежутках функции $\sin x$ и $\cos x$ обратимы? Найти обратную к функции

(1) $\sin x$ на промежутках $\left[\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{13\pi}{2},\dfrac{15\pi}{2}\right]$.

(2) $\cos x$ на промежутках $[4\pi,5\pi]$ и $[7\pi,8\pi]$.

4. Найти область определения следующих функций:

(1) $\lg(x-1)-\lg(x+1)$, (2) $\lg\dfrac{x-1}{x+1}$, (3) $\sqrt{\lg(1-x^2)}$,

(4) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, (5) $\sin\arcsin x$, (6) $\arcsin\sin x$,

(7) $\sqrt{(x-\log_2 3)(\log_3 4-x)}$, (8) $\log_{\sin x}\cos x$,

1.2. Четность и нечетность.

ТЕОРИЯ

Определение 6. Функцию f называют *четной* (*нечетной*), если **для любого** элемента x из $D(f)$ противоположный ему элемент $-x$ также входит в $D(f)$ и имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$). Кратко это можно выразить так:

$$(\forall x \in D(f)) \quad -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x) \quad (\text{соответственно} f(-x) = -f(x)).$$

Отсутствие свойства четности у функции f запишется так:

$$(\exists x \in D(f)) \quad (\text{либо } -x \notin D(f), \text{ либо } f(-x) \neq f(x)).$$

Тем самым для проверки отсутствия четности достаточно либо установить несимметричность области определения f относительно нуля, либо предъявить такое $x \in D(f)$, при котором значения $f(-x)$ и $f(x)$ различны.

Так же анализируется отсутствие свойства нечетности функции.

Если f не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности, то ее называют *функцией общего вида.*

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат, т. е. относительно точки $(0, 0)$.

Если f, g — нечетные (четные) функции, то их сумма также нечетна (соответственно четна).

ТЕХНОЛОГИИ

Наличие свойств четности или нечетности помогает упростить процедуру построения графика функции — для четной или нечетной функции график можно строить только для неотрицательных значений аргумента.

Если дан график функции и спрашивается, будет ли она четной (нечетной), то сначала надо обратить внимание на ее область определения, и если она не симметрична относительно нуля на оси абсцисс, то это функция общего вида, если же симметрична, то исследование можно продолжить и тогда следует обратиться к графику. Если он симметричен относительно оси ординат, то функция четная, если симметричен относительно начала координат, то нечетная. Кстати, график нечетной функции, определенной в нуле, всегда проходит через начало координат.

Если функция задана на промежутке, расположенном справа (слева) от нуля, то ее можно распространить на область, состоящую из данного промежутка в объединении с его образом при симметричном отражении относительно нуля. Если речь идет о функции, заданной графиком, то для получения графика нечетной функции данный график надо отразить симметрично относительно точки $(0, 0)$, а если четной, то симметрично относительно оси ординат. Если же функция задана правилом f, то для распространения надо использовать определение и для $x < 0$ полагать $f(x) = f(-x)$ для четной функции и $f(x) = -f(-x)$ для нечетной.

Указанные способы доопределения функции по четности или нечетности на отрицательную полуось легко показать геометрически, учитывая симметрию либо относительно оси ординат (для четной функции), либо относительно начала координат (для нечетной). Пусть функция f определяется тем, что она нечетная и для неотрицательных значений аргумента x из области ее определения совпадает с функций g (заданной по крайней мере на каком-то множестве неотрицательных чисел). Возьмем отрицательное число x и посмотрим, где брать значение функции f в точке x. Естественно, среди значений функции g на неотрицательных числах из области ее определения. Отразим x относительно нуля, т. е. возьмем число $-x$ (рис. 1.2(a)). Оно положительно, и функция f при таком значении аргумента определена, а именно $f(-x) = g(-x)$ (рис. 1.2(b)). Теперь определим значение f в точке x так, чтобы полученная функция была нечетной. Для этого согласно определению надо положить $f(x) = -f(-x) = -g(-x)$ (рис. 1.2(c)).

Аналогичными действиями можно распространить заданную на части положительной полуоси функцию до четной функции.

Если функция задана формулой, то при изучении четности или нечетности функции f на место аргумента $x \in D(f)$ подставляют значение $-x$, и совершают упрощающие действия. Если при этом получается $f(x)$, то функция четная, если $-f(x)$, то — нечетная. Если хотя бы при одном $x \in D(f)$ либо $-x$ не входит в область определения функции f, либо не выполнено равенство $f(-x) = f(x)$ (или $f(-x) = -f(x)$), то функция свойством четности (соответственно нечетности) не обладает.

Нетрудно заметить, что если в композиции $h(x) = g(f(x))$ внутренняя функция f четная, то h тоже четная. Ясно также, что если f и g нечетные, то h нечетная.

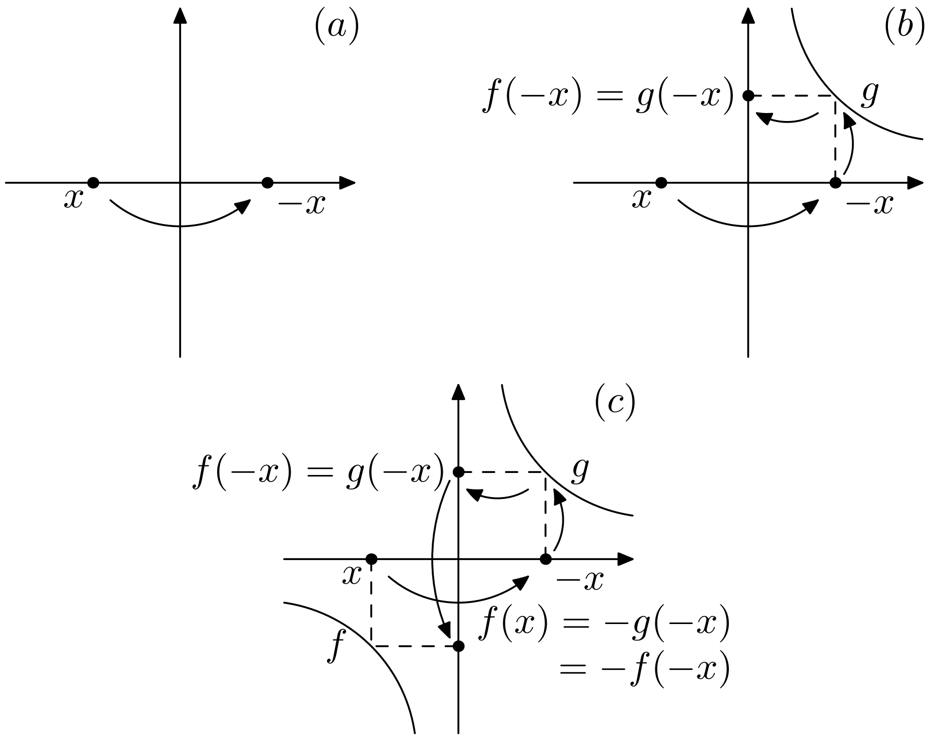

Рис. 1.2.

Пример 1. Определим функцию sgn, называемую *знак числа* (читается «сигнум»), полагая

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, это эта функция нечетная.

Пример 2. Является ли четной или нечетной функция $f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$?

Сначала исследуем, верно ли, что с каждый элементом x из области определения данной функции противоположный ему элемент $-x$ также входит в область определения. Функция f определена на множестве $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, стало быть, число -1 лежит в области ее определения, тогда как 1 — нет. Функция общего вида.

Заметим, что при $x \neq 1$ будет $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1)$.

ПРАКТИКА

1. Исследовать, какие из следующих функций обладают свойствами четности, а какие общего вида:

(1) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, (2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$,

(3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, (4) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$,

(5) $f(x)=\sin\arccos x$, (6) $f(x)=\arccos\sin x$,

(7) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$, (8) $f(x)=\arcsin x+\arccos x$.

1.3. Возрастание и убывание. Экстремум.

ТЕОРИЯ

Определение 7. Функцию f называют *возрастающей* (*неубывающей*) *на множестве* $X\subset D(f)$, если **для любых** $x_1,x_2\in X$ таких, что $x_2>x_1$, имеет место неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ (соответственно $f(x_2)\geqslant f(x_1)$). Кратко это выразится так:

$$(\forall x_1\in X\forall x_2\in X)\quad x_2>x_1\Longleftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

$$(\text{соответственно } f(x_1)\geqslant f(x_2)).$$

Функцию f называют *убывающей* (*невозрастающей*) *на множестве* $X\subset D(f)$, если **для любых** $x_1,x_2\in X$ таких, что $x_2>x_1$, имеет место неравенство $f(x_2)<f(x_1)$ (соответственно $f(x_2)\leqslant f(x_1)$). Кратко:

$$(\forall x_1\in X\forall x_2\in X)\quad x_2>x_1\Longleftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

$$(\text{соответственно } f(x_1)\leqslant f(x_2)).$$

Если функция f либо возрастающая, либо убывающая на множестве X, то ее называют (*строго*) *монотонной* на X. Термин «монотонная» используют и в тех случаях, когда функция неубывающая или невозрастающая.

Несколько слов о терминологии. Иногда сформулированные здесь свойства возрастания или убывания называют строгим возрастанием или убыванием, а термин «возрастающая» («убывающая») функция относят к таким функциям, которые здесь названы неубывающими (невозрастающими). Поэтому если в задаче существенно, знак какого неравенства, строгого или нестрогого, имеется в виду при сравнении значений $f(x_1)$ и $f(x_2)$, то лучше уточнить в том источнике, откуда взята задача, что авторы понимают под той или иной разновидностью монотонности.

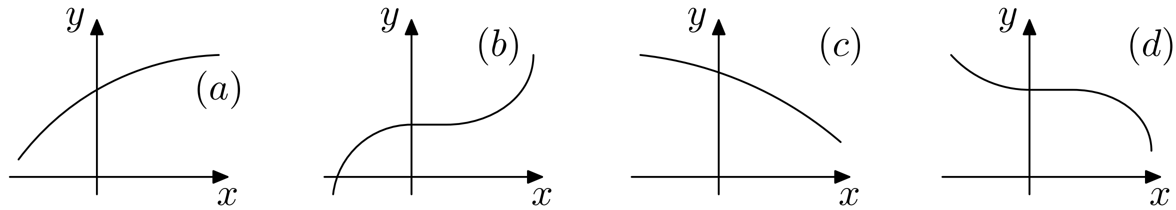

Рис. 1.3.

Примеры возрастающей, неубывающей, убывающей и невозрастающей функций приведены на рис. 1.3(a)–(d).

Строгая монотонность функции служит достаточным условием ее обратимости. Более того, для обратной функции сохраняется вид монотонности исходной: *если f возрастающая, то f^{-1} тоже возрастающая, а если f убывающая, то f^{-1} тоже убывающая.* Обоснуем это утверждение для случая возрастающей функции, для убывающей рассуждения аналогичны.

Пусть f возрастает на множестве X и переводит его на множество Y. Если $x_1, x_2 \in X$ различны, то либо $x_1 < x_2$, либо $x_2 < x_1$, и ввиду возрастания f либо $f(x_1) < f(x_2)$, либо $f(x_2) < f(x_1)$, стало быть в любом случае $f(x_2) \neq f(x_1)$ и f обратима на X.

Пусть f возрастает на X. Предположим, что f^{-1} не является возрастающей функцией на множестве Y. Тогда найдутся такие два элемента $y_1, y_2 \in Y$, что $y_1 < y_2$, но $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$. Пусть $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$. Тогда $x_1 \geqslant x_2$. Если $x_1 = x_2$, то $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ ввиду свойства однозначности функции, что противоречит предположению $y_1 < y_2$, а если $x_1 > x_2$, то $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ ввиду предполагаемого возрастания f, что также противоречит предположению $y_1 < y_2$. Стало быть, предположение об отсутствии у f^{-1} свойства возрастания несостоятельно.

Определение 8. Рассмотрим функцию f на некотором множестве X из области ее определения. Говорят, что точка $x_0 \in X$ является *точкой максимума* (*минимума*) функции f, если **найдется** такое число $r > 0$, что **для любого** элемента $x \in X$, из интервала $(x_0 - r, x_0 + r)$, имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$) (рис. 1.4).

Если x_0 либо точка максимума, либо точка минимума функции f, то ее называют *точкой экстремума функции f*.

Значение $f(x_0)$ в точке максимума (минимума) называют *максимальным* (*минимальным*) значением функции f или, короче, *максимумом* (*минимумом*) функции f. Максимальное или минимальное значение функции называют ее *экстремумом.*

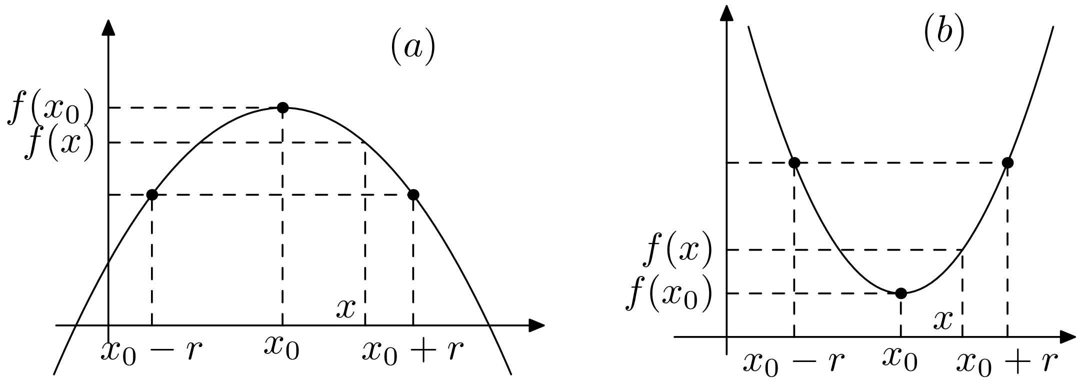

Рис. 1.4.

Обратим внимание на то, что свойство функции иметь экстремум в точке отражает ее поведение вблизи рассматриваемой точки, иначе говоря, это *локальное свойство* и, говоря об экстремумах, в случае необходимости подчеркивают, что это локальные максимумы или минимумы.

ТЕХНОЛОГИИ

Возрастание или убывание — одни из наиболее часто отмечаемых свойств функции. Как правило, свойство монотонности функции проявляется на каких-то промежутках. Функция, не являющаяся монотонной на всем рассматриваемом множестве, может обладать свойствами монотонности на промежутках, содержащихся в этом множестве. Так, функция на рис. 1.5(a) возрастает на каждом из промежутков $[a, x_1]$ и $[x_2, b]$ и убывает на промежутке $[x_1, x_2]$, а функция на рис. 1.5(b) убывает на каждом из промежутков $[-1, 0)$ и $(0, 1]$ (но не монотонна на их объединении).

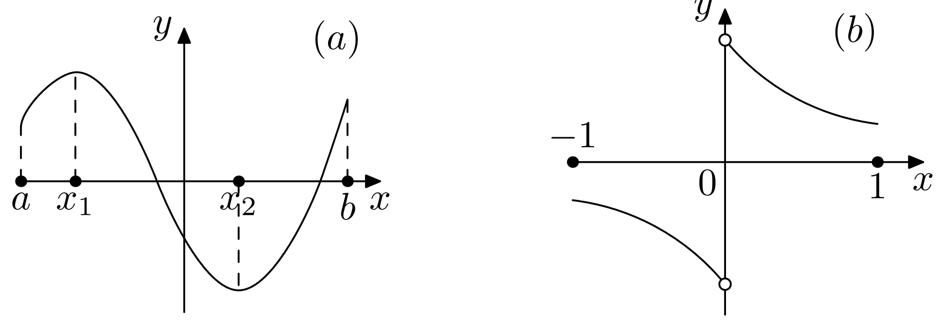

Рис. 1.5.

Если дан график функции и поставлен вопрос: указать (найти) промежутки, на которых функция возрастает (или убывает), то требуется указать промежутки **на оси абсцисс** (а не фрагменты графика функции!), на которых есть указанное свойство. Двигаясь по оси абсцисс слева направо (т. е. в положительном направлении оси), констатируем, что происходит с функцией в процессе возрастания аргумента. Если график уходит вверх, то функция возрастает, а если вниз — убывает, и так до тех пор, пока не прекратится процесс возрастания или убывания. Как только возрастание или убывание прекращается, так сразу заканчивается промежуток соответствующей монотонности. Например, на рис. 1.6 промежутками возрастания будут $[a, x_1]$, $[x_2, x_3]$ и $[x_4, b]$, а промежутками убывания — $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$.

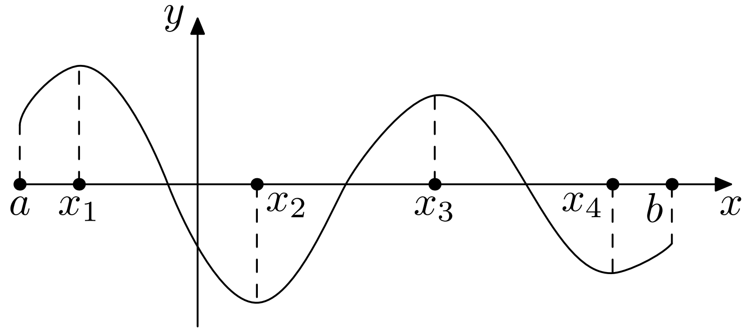

Рис. 1.6.

Наблюдение 1. *Пусть f представляет собой сложную функцию (композицию), составленную из функций g и h, т. е.*

$$f(x) = h(g(x)).$$

1. *Пусть функция h возрастает. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке $I \subset D(f)$ в том и только в том случае, если $g(x)$ возрастает (убывает) на этом промежутке. Точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$ в том и только в том случае, если она является точкой максимума (минимума) функции $g(x)$.*

2. *Пусть функция h убывает. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке $I \subset D(f)$ в том и только в том случае, если $g(x)$ убывает (возрастает) на этом промежутке. Точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$ в том и только в том случае, если она является точкой минимума (максимума) функции $g(x)$.*

Иными словами, возрастание внешней функции h в композиции $h(g(x))$ сохраняет монотонность и вид экстремума внутренней функции $g(x)$, а ее убывание меняет тип монотонности и экстремума внутренней функции на противоположный.

Полезность наблюдения 1 состоит в том, что при изучении монотонности и точек экстремума f можно перейти к исследованию монотонности и точек экстремума функции g (внутренней функции в композиции) без учета функции h (внешней функции в композиции), если h монотонна. Однако надо понимать, что так мы можем найти только **промежутки** монотонности и **точки** экстремума, сами значения функции f в точках экстремума надо искать, подставляя найденные точки экстремума в функцию f и находя ее значения в таких точках.

Поскольку для элементарных функций промежутки их монотонности хорошо известны, наблюдение 1 оказывается весьма эффективным, ибо нередко изучаемая функция устроена как композиция, в которой в качестве внешней участвует функция с известными свойствами монотонности.

Пример 1. Возьмем какие-либо несложные функции, составим из них композиции и посмотрим, как можно исследовать промежутки монотонности и точки экстремума композиций.

Начнем с совсем простой ситуации, например, рассмотрим функцию $g(x) = (x+1)(3-x)$. Это квадратичная функция, она отрицательна на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(3, +\infty)$, положительна на промежутке $(-1, 3)$, на $(-\infty, 1]$ она возрастает, на $[1, +\infty)$ убывает, у нее в точке $x = 1$ наблюдается максимум, который будет также ее наибольшим значением, при этом $f(1) = 4$.

Теперь составим композицию этой функции с корнем квадратным, т. е. обратимся к функции $f(x) = h(g(x))$, где $h(z) = \sqrt{z}$. Получается функция $f(x) = \sqrt{(x+1)(3-x)}$. Она определена там, где подкоренное выражение неотрицательно, т. е. на отрезке $[-1, 3]$. Поскольку h, внешняя функция в композиции, возрастает, композиция f окажется монотонной там, где монотонна внутренняя функция $g(x) = (x+1)(3-x)$, с сохранением типа монотонности, т. е. на множестве $[-1, 1]$ функция f возрастает, а на $[1, 3]$ убывает. При $x = 1$ у нее максимум (возрастание при переходе через эту точку сменяется убыванием), при этом значение в точке максимума будет уже не 4, а $f(1) = \sqrt{4} = 2$.

Пример 2. Рассмотрим композицию функций из примера 13, взятую в обратном порядке, т. е. функцию

$$\varphi(x) = g(h(x)) = (\sqrt{x}+1)(3-\sqrt{x}).$$

Она определена при $x \geqslant 0$. Ввиду возрастания внутренней функции $h(x) = \sqrt{x}$ на всей области определения $x \geqslant 0$ составная функция φ

возрастает там, где возрастает функция g, т. е. на множестве $[0,1]$, и убывает на множестве $[1,+\infty)$. Точка $x=1$ является точкой максимума, при этом значение f в ней равно 4.

Напомним, что *последовательностью* называют функцию, определенную на множестве натуральных чисел. Для краткости значение $x(n)$ функции x на номере n обозначают через x_n, при этом если n берется не из всего $\mathbb{N}$, то добавляют указание области изменения n, например, так: x_n, $n=3,4,\ldots$.

Можно заметить, что возрастание последовательности равносильно тому, что $x_{n+1}>x_n$ а убывание — тому, что $x_{n+1}<x_n$ для любого натурального n.

ПРАКТИКА

1. Найти промежутки монотонности следующих функций:
(1) $f(x)=x^2-4x+3$, (2) $f(x)=x^2-4|x|+3$,
(3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, (4) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$,
(5) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, (6) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. Доказать, что следующие функции немонотонны:
(1) $f(x)=x^4-x^2$, (2) $f(x)=x^3-x$,
(3) $f(x)=\arcsin\sin x$, (4) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

3. Исследовать на монотонность последовательности. Если они не монотонны, изучить, существует ли номер, начиная с которого они монотонны:
(1) $x_n=\dfrac{2n+3}{n+1}$, (2) $x_n=\dfrac{n^2+5}{n+1}$,
(3) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$, (4) $\sqrt{n^2+n}-n$.

4. Доказать немонотонность последовательностей:
(1) $x_n=(-1)^n$, (2) $x_n=n+(-1)^n$.

1.4. Периодичность.

ТЕОРИЯ

Определение 9. Функцию f называют *периодической*, если **существует** такое число $T\neq 0$, называемое ее *периодом*, что **для любого** элемента x из $D(f)$ элементы $x+T$, $x-T$ также входят в $D(f)$ и имеют место равенства $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$.

Образно периодическую функцию можно представить как функцию, каждое значение которой повторяется через величину, равную периоду.

Примеры графиков периодических функций даны на рис. 1.7(a), (b) (имеется в виду, что графики продолжаются неограниченно влево и вправо).

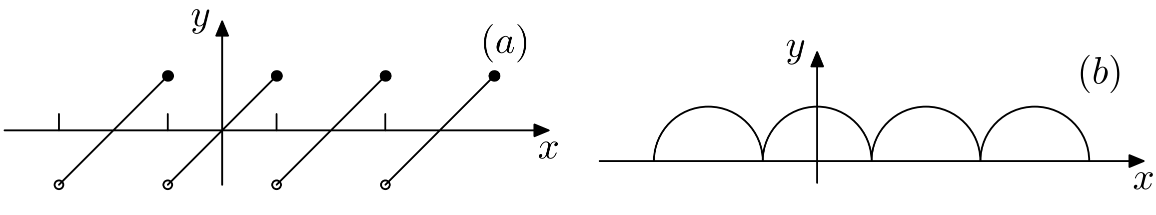

Рис. 1.7.

Если f задана на каком-то промежутке $[a, b]$ и говорится, что она распространяется по периодичности на всё $\mathbb{R}$, или что задана периодическая функция, у которой изображен график на промежутке длиной периода, то имеется в виду следующее. Строится периодическая функция g с периодом $T = b - a$ (период равен длине отрезка $[a, b]$) следующим образом. Если $x \in [a, b]$, то $g(x) = f(x)$. Если же $x \notin [a, b]$, то добавляем к x (или вычитаем из x) столько периодов, чтобы получаемая точка лежала в $[a, b]$, т. е. находим такое целое n, что $x + nT \in [a, b]$, и полагаем $g(x) = f(x + nT)$.

ТЕХНОЛОГИИ

Простейшие задачи, связанные с использованием периодичности, обычно решаются на основе определения без привлечения логических ходов, и мы рассмотрим несколько примеров таких задач. Затем обратимся к традиционно более сложно проводимому исследованию периодичности.

Пример 1. Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке $[-3, 5]$.

Начнем с того, что функция задана только на отрезке длиной 3, а период ее равен 6. Если не добиться задания функции на отрезке длиной 6, то по периодичности ее распространить на всю числовую прямую не удастся. Так что сначала обеспечим задание функции на отрезке длиной 6. Поскольку h четна и задана на $[0, 3]$, она с учетом четности определена и на отрезке $[-3, 3]$, а именно, если $x \in [0, 3]$, то $h(x) = x^2 - 4x + 1$, а если $x \in [-3, 0]$ и тем самым $-x \in [0, 3]$, то

$$h(x) = h(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 1 = x^2 + 4x + 1.$$

Итак, задание функции на промежутке длиной 6 состоялось.

Для удобства обозначим через f функцию, полученную из построенной на $[-3, 3]$ функции h путем распространения на $\mathbb{R}$ по периодичности. Периодичность, в частности, обеспечит повторяемость на всех промежутках длиной периода нулей функции f, выявленных на промежутке $[-3, 3]$. Поэтому для ответа на поставленный вопрос надо тщательно проанализировать, сколько нулей у функции f на $[-3, 3]$ и как они на этом промежутке расположены.

У первоначальной функции $h(x) = x^2 - 4x + 1$ нулей всего два, а именно $2 \pm \sqrt{3}$, из которых только $2 - \sqrt{3}$ принадлежит промежутку $[0, 3]$ и тем самым будет участвовать в дальнейших рассмотрениях. Насколько точно нам надо знать расположение этой точки, покажет анализ того, что надо найти. А найти надо количество нулей функции f на промежутке $[-3, 5]$. С нулями на части $[-3, 3]$ промежутка $[-3, 5]$ все ясно — там их два, один из которых $2 - \sqrt{3}$ появился от исходной функции, а другой расположен симметрично ему относительно нуля координатной оси (и равен, если это интересно, $-2 + \sqrt{3}$). Остается понять, есть ли нули у f на оставшейся части $(3, 5]$. Функция f периодична с периодом, равным 6, а значит, ее значения на $(3, 5]$ повторят значения на промежутке $(-3, -1]$ (полученном из промежутка $(3, 5]$ сдвигом влево на 6). Тем самым если на $(-3, -1]$ был нуль функции f, то нуль будет и на $(3, 5]$. Ясно, что число $2 - \sqrt{3}$, которое положительно, принимать во внимание не надо. Вопрос стал таким: точка $-2 + \sqrt{3}$ будет лежать в промежутке $(-3, -1]$ или нет, т. е. верны ли неравенства $-3 < -2 + \sqrt{3} \leqslant -1$? Левое неравенство, очевидно, верно. Для проверки правого запишем цепочку равносильных утверждений, и если в конце придем к верному, то исходное было верным, если к неверному, то — неверным:

$$-2 + \sqrt{3} \leqslant -1 \iff \sqrt{3} \leqslant 1 \iff 3 \leqslant 1,$$

что неверно. Таким образом, точка $-2 + \sqrt{3}$ в промежутке $(3, 5]$ не повторится. В итоге нулей у функции f на $[-3, 5]$ два.

Более трудны задачи, в которых предлагается доказать периодичность, найти наименьший положительный период или обосновать непериодичность функции. Дело в том, что в определении периодичности заложена логическая структура, содержащая два требования: «существует» и «для любого». В этой ситуации если при исследовании периодичности не удается применить какое-то несложное соображение и приходится опираться на определение, то возникают некоторые трудности.

Как правило, в конкретных ситуациях наличие или отсутствие периодичности просматривается из каких-то простых общих соображений. Так, если область определения не удовлетворяет условиям, предъявляемым к области определения периодической функции, например, нет возможности повторяться каким-то элементам из области определения или область определения ограничена хотя бы с одной стороны, то о периодичности можно не вспоминать. Периодичность тригонометрических функций известна, и обычно если рассматриваемая функция создана с использованием тригонометрических функций, то о периодичности можно подозревать и зачастую она есть. Если же простых соображений для исследования периодичности недостаточно, то надо привлекать что-то дополнительное, а это может оказаться не совсем простым делом.

Пример 2. Докажем непериодичность функции $\sin x^2$.

Простые средства, приводящие к отсутствию периодичности этой функции, не срабатывают — определена она на множестве всех действительных чисел, в ее формировании участвует периодическая функция и, мало ли, вдруг и эта окажется периодической. Рассмотрим ее положительные нули, т. е. найдем положительные корни уравнения $\sin x^2 = 0$. Это такие числа x, что $x^2 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Выражая отсюда x через n, получаем последовательность

$$x_n = \sqrt{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z},\ n > 0,$$

идущих подряд положительных нулей функции $\sin x^2$. Докажем, что она убывающая. Действительно, рассмотрим разность $x_k - x_{k-1}$ и представим ее в виде

$$x_k - x_{k-1} = \sqrt{\pi k} - \sqrt{\pi(k-1)} = \frac{(\sqrt{\pi k} + \sqrt{\pi(k-1)})(\sqrt{\pi k} - \sqrt{\pi(k-1)})}{\sqrt{\pi k} + \sqrt{\pi(k-1)}}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{\pi k} + \sqrt{\pi(k-1)}}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ будет

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{\sqrt{\pi(n+1)} + \sqrt{\pi n}} < \frac{\pi}{\sqrt{\pi n} + \sqrt{\pi(n-1)}} = x_n - x_{n-1},$$

так что последовательность расстояний между соседними нулями функции $\sin x^2$ убывает, а значит, функция непериодическая.

Для обоснования периодичности могут быть полезными соображения, о которых сообщается ниже.

При проверке периодичности согласно определению надо сначала понять, какое число может быть периодом, а затем доказать, что это действительно период. Для подбора претендента на период можно воспользоваться необходимыми условиями или, иначе говоря, переходом к следствию. Можно рассуждать так. Если f периодична и $T > 0$ — ее период, то для любого $x \in D(f)$ должны выполняться указанные в определении свойства, в частности равенство $f(x+T) = f(x)$. Если они должны выполняться для любого $x \in D(f)$, то они выполняются и для каждого конкретного x. Взяв какое-либо значение x_0, приходим к выводу, что тогда должно быть $f(x_0 + T) = f(x_0)$. Тем самым получаем уравнение относительно T, среди корней которого должен находиться период (разумеется, если он есть). Что дает такое рассуждение? Оно позволяет ограничиться рассмотрением, возможно, небольшого набора претендентов на значение периода. Действительно, перефразируем утверждение «если T — период, то $f(x_0 + T) = f(x_0)$», заменив его равносильным «если T не удовлетворяет равенству $f(x_0 + T) = f(x_0)$, то это не период». Следовательно, период надо искать только среди корней уравнения $f(x_0 + T) = f(x_0)$, и успех во многом зависит от того, насколько эффективно можно это уравнение решить и насколько небольшой набор корней получится. Если набор небольшой, то путем последовательного перебора элементов этого набора (начиная с наименьшего положительного в сторону возрастания) есть шанс наткнуться на период, если таковой существует.

ПРАКТИКА

1. Исследовать периодичность следующих функций и в случае периодичности найти наименьший положительный период:

(1) $f(x) = |\cos^3 x|$, (2) $f(x) = 2\sin x + \cos x$, (3) $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$,

(4) $f(x) = x \sin x$, (5) $f(x) = \arcsin \sin x$, (6) $f(x) = \sin |x|$.

1.5. Ограниченность и неограниченность.

ТЕОРИЯ

Определение 10. Функцию f называют *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subset D(f)$, если

$$\exists C \; \forall x \in X \quad f(x) \leqslant C,$$

соответственно
$$\exists C\ \forall x \in X \quad f(x) \geqslant C.$$

Функцию f называют *ограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если
$$\exists C\ \forall x \in X \quad |f(x)| \leqslant C.$$
Ясно, что функция ограничена на данном множестве тогда и только тогда, когда она на нем ограничена сверху и снизу одновременно.

Определение 11. Функцию f называют *неограниченной сверху* (*снизу*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если она не обладает свойством соответствующей ограниченности, т. е., обращаясь к отрицанию, если
$$\forall C\ \exists x \in X \quad f(x) > C,$$
соответственно
$$\forall C\ \exists x \in X \quad f(x) < C.$$
Функцию f называют *неограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если
$$\forall C\ \exists x \in X \quad |f(x)| > C.$$
Ясно, что функция неограниченная тогда и только тогда, когда она неограниченная либо сверху, либо снизу.

Определение 12. Рассмотрим функцию f на множестве X. Значение $f(x_0)$ функции f в точке $x_0 \in X$ называют *наибольшим* (*наименьшим*) *значением функции f на множестве* X, если $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$) **для всех** точек $x \in X$.

ТЕХНОЛОГИИ

Будем вести речь об ограниченности сверху, для ограниченности снизу и с обеих сторон рассуждения аналогичны.

Для доказательства ограниченности сверху функции $f(x)$ на множестве X требуется обосновать существование такого числа C, что для любого $x \in X$ выполнено $f(x) \leqslant C$. Гарантию наличия верхней границы можно получить на основе свойств множества значений элементарных функций. Например, если $f(x) = h(g(x))$ и h ограничена сверху, то независимо от функции g композиция $h(g(x))$ ограничена сверху (на соответствующем множестве).

Можно прибегнуть к такому рассуждению. Попробуем ограничить сверху функцию $f(x)$ более простой функцией, для которой требуемую верхнюю границу можно получить из каких-то соображений. Если не удается это сделать сразу, то можно новую, ограничивающую сверху функцию, в свою очередь также ограничить сверху более простой функцией, для которой больше шансов подобрать границу, и так далее до тех пор, пока не появится реальная возможность установить верхнюю границу очередной функции. Если такая возможность появилась, верхняя граница последней функции будет верхней границей исходной.

Можно записать требуемое неравенство $f(x) \leqslant C$ и, намечая действовать по определению, озаботиться тем, есть ли такие C, при которых это неравенство выполнено для всех x из данного множества X.

Есть и другие средства изучения ограниченности, но они связаны с техникой, которую предстоит освоить в дальнейшем, поэтому здесь на применении такой техники останавливаться не будем.

Здесь ситуация совсем иная по сравнению с ограниченностью. Судя по тому, что первым в определении неограниченности стоит квантор общности, при обосновании неограниченности (сверху) нам предстоит, ориентируясь на неизвестное нам число C, пытаться сформировать правило поиска элемента $x \in X$ такого, что $f(x) > C$. Здесь полезно ограничивать $f(x)$ снизу чем-то более простым, но все еще большим, т. е. таким выражением, для которого есть надежда подобрать требуемое число x. Разумеется, при этом надо использовать всю имеющуюся информацию о неограниченности элементарных функций.

Пример 1. Докажем ограниченность сверху функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

на множестве $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$.

Начнем рассуждать, например, так. Чтобы ограничить дробь сверху (числитель по условию неотрицателен), можно ограничить знаменатель снизу и взять такую функцию, где числитель остается прежним, а в знаменателе стоит оценка исходного знаменателя снизу. Ясно, что $x^2+1 \geqslant 1$, поэтому

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant x, \quad x \geqslant 0.$$

Мы ограничили сверху нашу функцию другой функцией, ясно проще зависящей от x. Теперь бы ограничить полученную функцию сверху, но, судя по ее виду, нам это сделать не удастся — мы можем брать сколь угодно большие значения x, так что подобрать постоянную не удастся. Можно ли сделать вывод о том, что и наша функция не ограниченная? Нет, можно лишь сделать вывод о том, что предложенный нами путь не привел к успеху. Выходит, рассуждения были слишком простыми, а предложенная оценка слишком грубой.

Посмотрим, в каком месте числовой прямой могут возникнуть проблемы с ограниченностью и по какой причине? Ясно, что проблемы могут быть в связи с возрастанием числителя. Однако и знаменатель при этом также будет возрастать, причем более быстрыми темпами. Уберем эффект возрастания числителя, считая $x > 0$ (это не отразится на доказательстве ограниченности сверху — ведь при $x = 0$ вся дробь равна нулю). Для этого разделим числитель и знаменатель на x:

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1/x}.$$

Теперь числитель ограничен (более того, там стоит постоянная). Можно ли ограничить знаменатель снизу и чем? Воспользуемся известной оценкой

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

для $x > 0$. Заменяя знаменатель меньшей величиной, можно утверждать, что

$$\frac{1}{x+1/x} \leqslant \frac{1}{2} \text{ для любого } x > 0,$$

и доказательство ограниченности закончено — мы нашли постоянную, обеспечивающую оценку из определения ограниченности сверху для любого $x \geqslant 0$.

Можно рассудить иначе. Заметим, что если $x \in [0, 1]$, то, последовательно ограничивая числитель сверху, а знаменатель снизу, имеем

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1.$$

Если же $x > 1$, то, ограничивая знаменатель снизу, мы ограничиваем всю дробь сверху, т. е. удаление единицы в знаменателе дает оценку

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

что не больше единицы при рассматриваемых x. Таким образом, при любом $x \geqslant 0$ имеем $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant 1$.

Пример 2. Докажем ограниченность функции

$$\frac{2\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Как и в предыдущем примере, здесь дробь, числитель которой на этот раз ограничен. Заменив стоящую в числителе функцию (отметив положительность знаменателя) ее оценкой сверху, т. е. использовав неравенство $|\sin x| \leqslant 1$, мы всю дробь не уменьшим:

$$\left|\frac{2\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right| \leqslant \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

и если нам удастся подобрать постоянную, ограничивающую функцию $\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, то эта постоянная будет ограничивать и исходную функцию. Для последней функции подобрать такую постоянную легко, заменив знаменатель величиной, меньшей его при всех (допустимых) x:

$$\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x} \leqslant 2, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Постоянная 2 будет границей и первоначальной функции.

Пример 3. Докажем ограниченность функции $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

Рассудим, например, так. Надо подобрать такое C, что

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant C$$

для любого $x \in \mathbb{R}$ (заметим, что функция определена всюду). Начнем выражать x через C, т. е. решать неравенство с параметром C, и анализировать, есть ли такие C, при которых множество решений этого неравенства совпадает с $\mathbb{R}$. Имеем

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant C \Longleftrightarrow x^2+x+1 \leqslant C(x^2+1) \Longleftrightarrow (C-1)x^2 - x + C - 1 \geqslant 0.$$

Для выполнения этого неравенства при любом x надо, во-первых, взять $C > 1$, а во-вторых, обеспечить отрицательность дискриминанта квадратичной функции в левой части неравенства, т. е. неравенство $4(C-1)^2 > 1$, что имеет место например при $C = 2$. Таким образом, гарантируется, что $f(x) \leqslant 2$, тем самым функция ограничена сверху. Ограниченность снизу очевидна хотя бы потому, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Обоснование ограниченности функции f можно свести к ограниченности функции из примера 1, если представить функцию в виде

$$f(x) = 1 + \frac{x}{x^2+1}.$$

Пример 4. Докажем ограниченность функции $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ на множестве $[1, +\infty)$.

Воспользуемся мелкой хитростью, а именно умножим и одновременно разделим выражение $x - \sqrt{x^2-1}$ на $x + \sqrt{x^2-1}$:

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}.$$

Уменьшим знаменатель, удалив из него неотрицательное слагаемое $\sqrt{x^2-1}$. Этим действием мы увеличим дробь, т. е.

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$$

на заданном множестве $[1, +\infty)$. Остается заметить, что $f(x) \geqslant 0$, так что f ограничена снизу.

Пример 5. Докажем ограниченность функции $f(x) = 2^{\sin x}$.

Функция f представляет собой композицию, в которой последней действует возрастающая функция $h : z \mapsto 2^z$, стало быть, если есть верхняя и нижняя границы для внутренней функции $\sin x$, то их образы при действии h будут соответственно верхней и нижней границей функции f. Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, имеем $2^{-1} \leqslant 2^{\sin x} \leqslant 2$, так что f ограничена.

Пример 6. Докажем неограниченность функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Доказательство утверждений, в которых для произвольной величины что-то требуется установить, лучше начинать словами «пусть дано (произвольное) … », где на место многоточия ставится обозначение заранее задаваемой произвольной величины. Так как в определении неограниченности для обозначения произвольно выбираемого числа мы использовали букву C, с нее и начнем обоснование неограниченности сверху функции $\operatorname{ctg} x$. Итак, пусть дано произвольное C. Требуется выработать правило поиска значения x из области определения котангенса такого, что $\operatorname{ctg} x > C$. Для этого будем ограничивать нашу функцию снизу (в отличие от доказательства ограниченности, где уместнее было ограничивать сверху) чем-то более простым, но оставляющим надежды на возможность нахождения требуемого x. Воспользуемся определением котангенса: $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, и заметим, что большие положительные значения надо искать там, где знаменатель близок к нулю, а числитель отделен от нуля и они оба положительны. Так будет, например, вблизи нуля, где числитель близок к единице, а знаменатель к нулю. Стремясь ограничить котангенс снизу, ограничимся рассмотрением таких значений x, на которых, допустим, $\cos x \geqslant 1/2$, т. е. промежутком $(0, \pi/3]$. На этом промежутке $\operatorname{ctg} x \geqslant \dfrac{1}{2\sin x}$. Продолжим оценивать снизу. Переменная осталась только в знаменателе, и если ограничить его сверху, то при положительном числителе дробь ограничится снизу. Воспользуемся известным для положительных x неравенством $\sin x < x$, учитывая которое получаем

$$\operatorname{ctg} x \geqslant \frac{1}{2\sin x} > \frac{1}{2x}.$$

Последнее выражение достаточно простое, чтобы, записав для заданного C неравенство $\dfrac{1}{2x} > C$, найти хотя бы одно его решение. В качестве искомого x можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству $x < \dfrac{1}{2C}$. Правило выбора по заданному C требуемого x сформировано, стало быть, неограниченность сверху котангенса доказана.

Нетрудно доказать и его неограниченность снизу.

Пример 7. Докажем неограниченность функции $f(x) = x\cos x$.

Будем доказывать неограниченность сверху. Начнем с традиционного «пусть дано произвольное C». Теперь посмотрим на функцию и задумаемся, за счет какого ее фрагмента и в какой части области определения есть шанс найти требуемое x? Ясно, что множитель $\cos x$ ограничен, так что от него лучше бы избавиться, а вот множитель x может дать желаемое значение x. Ограничить снизу все произведение затруднительно — функция $\cos x$ устроена так, что она периодически возвращается к значению 0. Поэтому надо брать такие значения x, на которых $\cos x \neq 0$, лучше всего такие значения, на которых $\cos x = 1$. Это числа вида $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если брать только такие x, то тогда

$$f(x) = f(2\pi n) = 2\pi n,$$

и вопрос встал такой: для произвольного C подобрать $n \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$2\pi n > C.$$

Решая это неравенство относительно n, находим, что можно взять любое целое n, удовлетворяющее неравенству

$$n > \frac{C}{2\pi}.$$

Например, можно взять $n = [C/(2\pi)]+1$, где квадратные скобки означают целую часть (взятие целой части дает натуральное число, которое может быть меньше чем n, но ненамного, и добавление 1 приведет уже к целому числу, обладающему требуемым свойством).

Правило выбора требуемого x по заданному C сформировано, и этим неограниченность функции f доказана.

Мы доказали неограниченность функции $x \cos x$ сверху, ясно, что она будет и неограниченной снизу.

Пример 8. Докажем ограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Запишем сумму подробно, без применения символа суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)},$$

и обратим внимание на легко проверяемое равенство $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Применим его к каждому из слагаемых в сумме:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$$

Ограниченность сверху доказана, ограниченность снизу очевидна, так как все члены последовательности положительны.

Пример 9. Докажем ограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Обратим внимание на то, что

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

стало быть,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k},$$

и остается воспользоваться результатом предыдущего примера.

ПРАКТИКА

1. Доказать ограниченность следующих функций:

(1) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 1}$, (2) $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin(x+1)}{1 + x^2}$,

(3) $f(x) = 2^{\lg(1-x^2)}$, (4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

2. Выяснить, ограничены ли следующие функции:

(1) $f(x) = x - \sqrt{x-1}$, (2) $f(x) = |x+1| - |x|$.

3. Доказать ограниченность последовательностей

(1) $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$, (2) $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n-1}$,

(3) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}$, (4) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

4. Доказать неограниченность функций и последовательностей

(1) $f(x) = x \sin x$, (2) $f(x) = 1/\cos x$,

(3) $x_n = n + (-1)^n n$, (4) $x_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$.