§ 1.2. Построение графиков на основе исследования простейших свойств функции

2.1. Координатная плоскость. График функции.

ТЕОРИЯ

Многие свойства функций легче воспринимать, обращаясь к их графикам. Прежде чем определить понятие графика, поговорим об обстановке, в которой это происходит.

Определение 1. Пусть X, Y — какие-то множества. Будем говорить, что элементы $x \in X$, $y \in Y$ *образуют упорядоченную пару* (x, y), если элемент x считается первым, а y — вторым. Далее вместо слов «упорядоченная пара» будем нередко писать просто «пара», если это не приведет к недоразумению.

Для пары (x, y) важен не только состав ее элементов, но и порядок их расположения, так что пары (x, y) и (y, x) при неравных x, y различны. Кроме того, пары (x, y) и (u, v) равны в том и только в том случае, если $x = u$, $y = v$.

Для множества упорядоченных пар вещественных чисел, обозначаемого символом $\mathbb{R}^2$, обычно используют следующую геометрическую интерпретацию. На плоскости изображают две взаимно перпендикулярные числовые прямые (числовые оси) так, что точка их пересечения соответствует числу нуль на каждой из прямых. Одну из этих прямых называют *осью абсцисс*, а другую — *осью ординат*, если выполнены следующие условия: результат поворота положительной части оси абсцисс вокруг точки пересечения прямых на угол $\pi/2$ против часовой стрелки совпадет с положительной частью оси ординат (рис. 2.1).

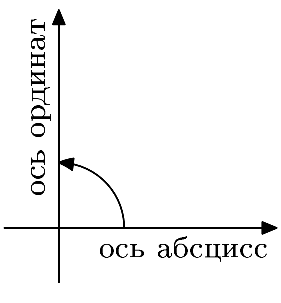


Рис. 2.1.

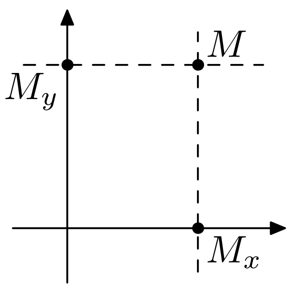


Рис. 2.2.

Каждой паре (x, y) вещественных чисел x, y поставим в соответствие точку координатной плоскости по следующему правилу. Отметим на оси абсцисс точку M_x, соответствующую числу x, на оси ординат — точку M_y, соответствующую числу y. Через точку M_x проведем прямую, перпендикулярную оси абсцисс (тем самым параллельную оси ординат), а через точку M_y — прямую, перпендикулярную оси ординат (т. е. параллельную оси абсцисс). Паре (x, y) сопоставляется точка M пересечения этих прямых (рис. 2.2).

В построенной конструкции точки M_x, M_y или соответствующие им числа x, y называют *первой* и *второй координатами точки* M и обычно для точки M используют обозначение (x, y), отведенное ранее для упорядоченной пары. Также говорят, что x — это *абсцисса* точки M (или точки (x, y)), а y — ее *ордината*. Саму плоскость с выделенными взаимно перпендикулярными прямыми называют *прямоугольной* (или *декартовой*) *системой координат*, а точку пересечения осей абсцисс и ординат — *началом координат*.

Имея в виду указанную геометрическую модель множества упорядоченных пар вещественных чисел, будем воспринимать упорядоченные пары как точки координатной плоскости, т. е. отождествлять пары чисел и точки координатной плоскости. Такое отождествление, как правило, не приводит к недоразумению.

Определение 2. *Графиком функции* f называют множество точек (x, y) координатной плоскости таких, что $x \in D(f)$, а $y = f(x)$.

Иначе можно сказать, что график функции f — это множество упорядоченных пар чисел $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Для изображения графика функции f поступают следующим образом. Изображают прямоугольную систему координат и около стрелки, показывающей положительное направление оси абсцисс (ординат) ставят букву, которой обозначается аргумент (соответственно значения) функции (на рис. 2.3 это буквы x и y). Затем, следуя определению графика, отмечают на плоскости множество точек (x, y) таких, что $x \in D(f)$, а $y = f(x)$, т. е. множество точек вида $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$ (см. рис. 2.3). Надо иметь в виду, что, например, две буквы x, стоящие на рис. 2.3 чуть ниже оси абсцисс, несут разную смысловую нагрузку (т. е. их следует воспринимать как разные объекты): одна (около стрелки) указывает обозначение оси, где отмечаются значения аргумента функции, а другая — символ собственно аргумента.

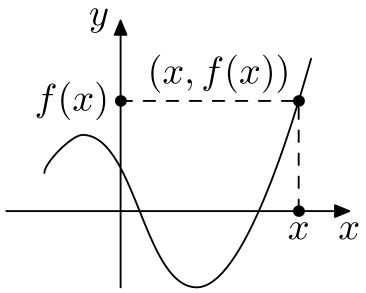


Рис. 2.3.

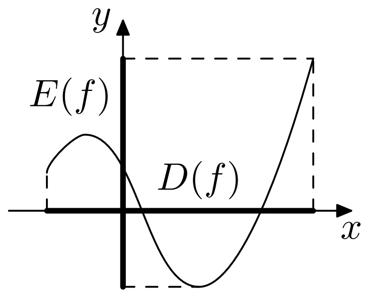


Рис. 2.4.

Область определения $D(f)$ располагается на (горизонтальной) оси абсцисс, множество значений $E(f)$ — на (вертикальной) оси ординат (рис. 2.4).

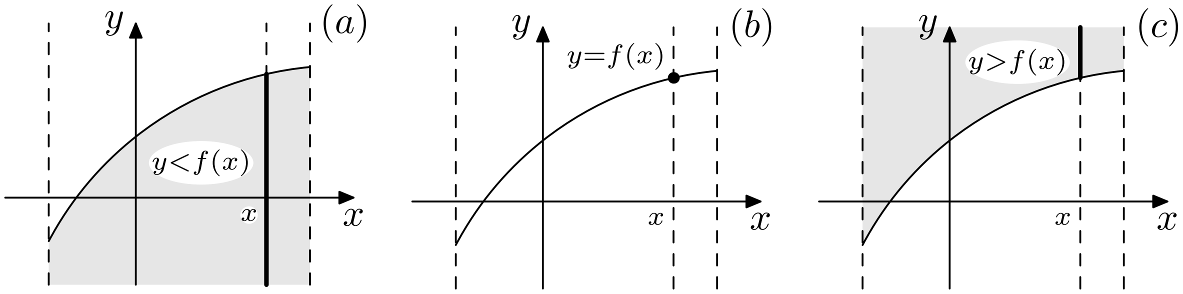


Рис. 2.5.

Вместе с графиком бывают полезны *подграфик* и *надграфик* функции f, а именно множества точек (x, y) координатной плоскости таких, что $x \in D(f)$, а $y < f(x)$ и соответственно $y > f(x)$. Подграфик, график и надграфик функции f можно представить себе так. Фиксируем $x \in D(f)$ и при этом x двигаемся по прямой снизу вверх, изменяя y. Сначала y расположен настолько низко, что $y < f(x)$, и мы находимся в подграфике (рис. 2.5(a)). Поднимаясь вверх, мы придем в такую точку (x, y), где будет $y = f(x)$, и окажемся в точке графика (рис. 2.5(b)). Поднимаясь далее вверх, мы оказываемся в таких точках (x, y), где $y > f(x)$, т. е. в надграфике функции f (рис. 2.5(c)). Проделывая эту процедуру при всех x из области определения f, получаем подграфик, график и надграфик функции f.

Полезно знать, как связаны между собой графики данной функции и обратной к ней (если, разумеется, таковая есть). Как отмечено выше, исходная функция и ей обратная — это два разных способа записи одной и той же зависимости между переменными u и v, поэтому в рамках множества упорядоченных пар прямая и обратная функции отличаются только тем, какая из переменных стоит на первом месте, а какая — на втором. Тем самым пара (v, u) лежит на графике обратной функции в том и только в том случае, если пара (u, v) находится на графике исходной функции. Мы договорились изображать горизонтально прямую, отведенную для первой координаты, и вертикально — для второй, стало быть, для получения точки (v, u) графика обратной функции нам надо взять точку (u, v) графика исходной и отразить ее симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. относительно множества точек вида (u, u), $u \in \mathbb{R}$ (рис. 2.6(a)). Поскольку так получается любая точка графика обратной функции, весь график обратной функции получается отражением графика исходной относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Пример получения графика обратной функции из графика исходной функции показан на рис. 2.6(a), (b).

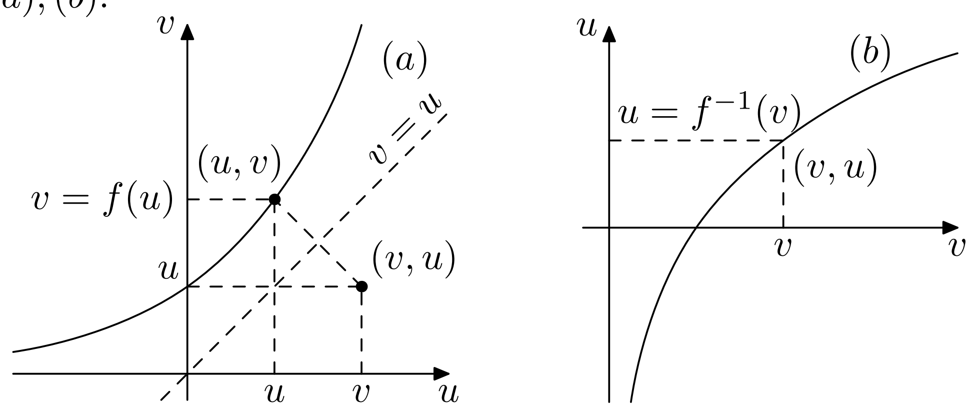


Рис. 2.6.

Кстати, операцию отражения относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов можно применить к графику любой функции (даже к любому множеству на плоскости), однако если исходная функция не была обратимой, то получится некое множество точек плоскости, которое не окажется графиком какой-либо функции (будет отсутствовать однозначность). Пример такой ситуации дан на рис. 2.7(a), (b).

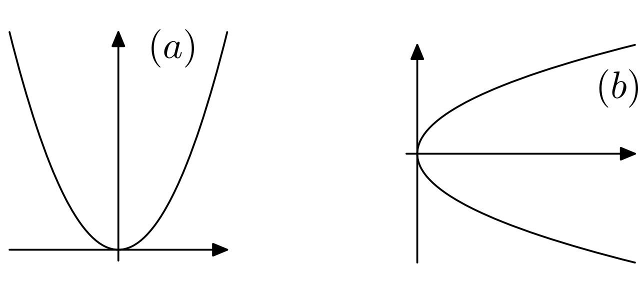
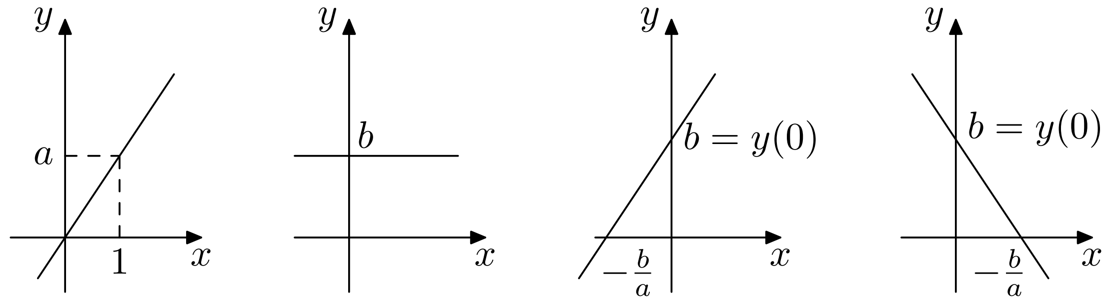


Рис. 2.7.

Более того, можно изображать и «график» какой-либо, необязательно однозначной зависимости между x и y, считая x независимой величиной, но к этому средству обращаются при изображении множеств на координатной плоскости, элементы которых обладают определенным свойством.

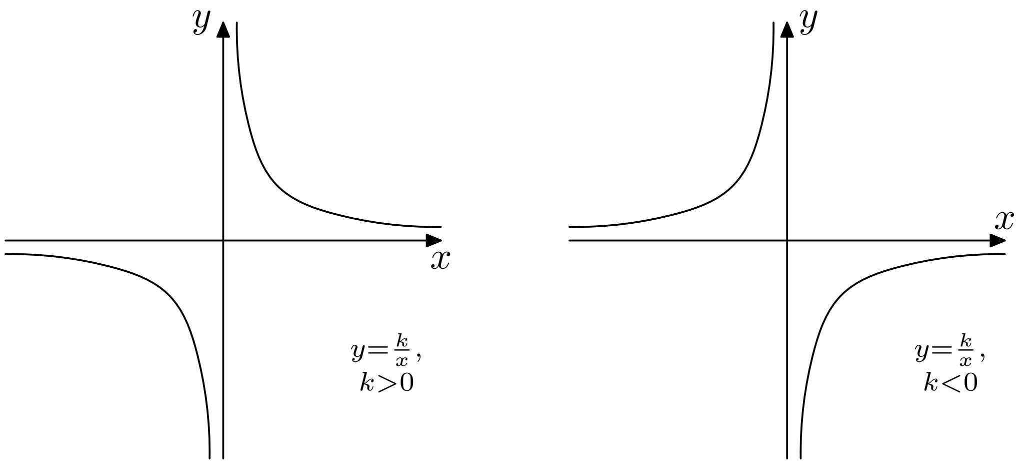
Напомним графики элементарных функций:

Линейная функция (вида $y = ax + b$ при разных вариантах a и b):

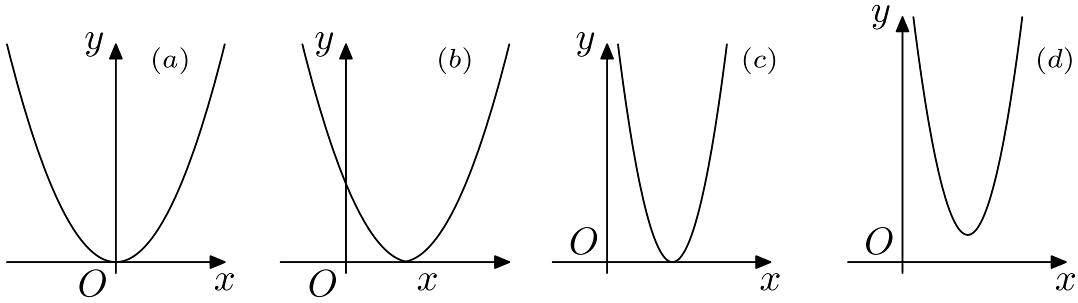


$a>0,\ b=0$ $\quad a=0,\ b>0$ $\quad a>0,\ b>0$ $\quad a<0,\ b>0$

Обратная пропорциональность:

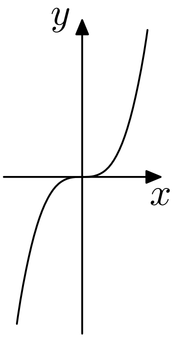


Квадратичная функция:

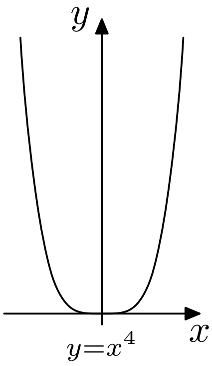


$y=x^2$ $\quad y=(x-x_v)^2,\ x_v>0$ $\quad y=2(x-x_v)^2,\ x_v>0$ $\quad y=2(x-x_v)^2+y_v,\ x_v>0,\ y_v>0$

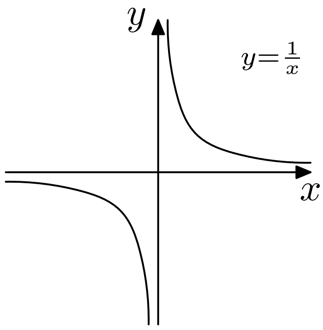
Степенная функция при некоторых показателях степени:



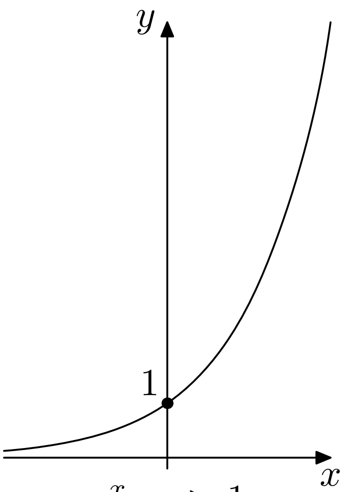
$y=x^3$



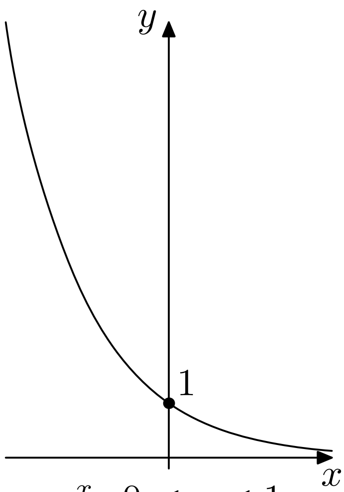
$y=x^4$



Показательная функция:

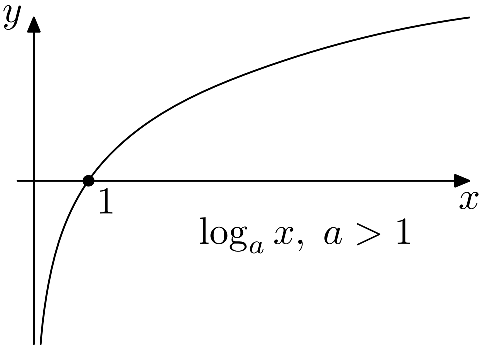


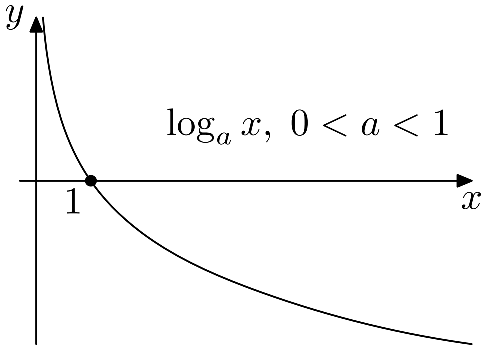
$a^x,\ a>1$



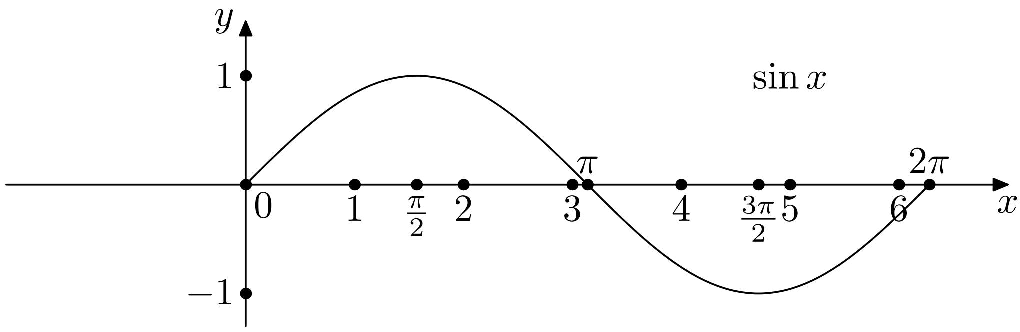
$a^x,\ 0<a<1$

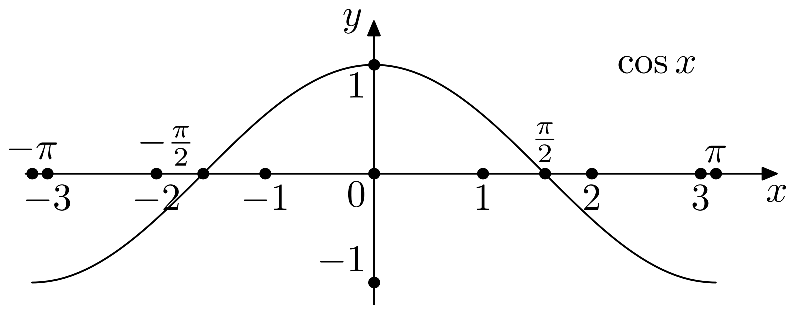
Логарифмическая функция:

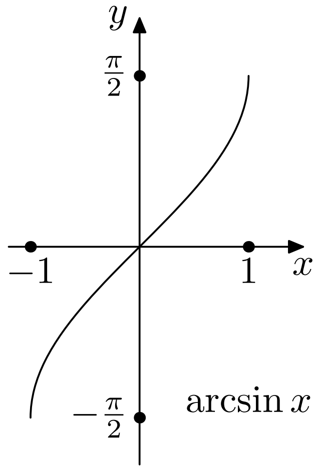


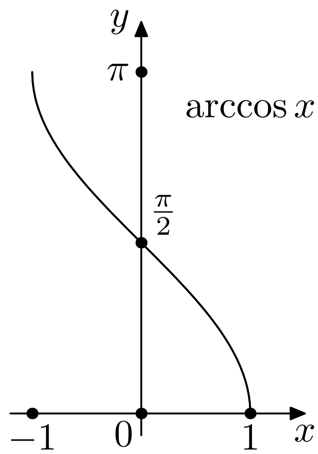


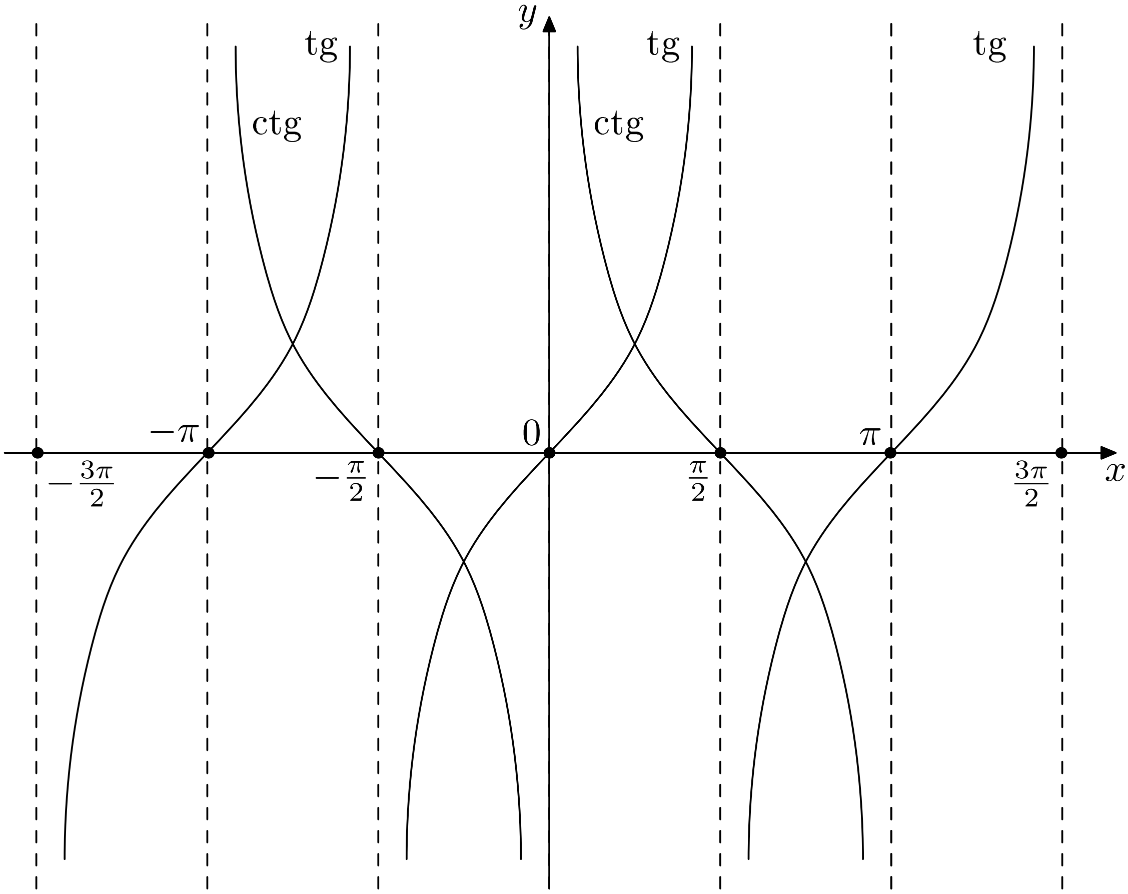
Тригонометрические функции:

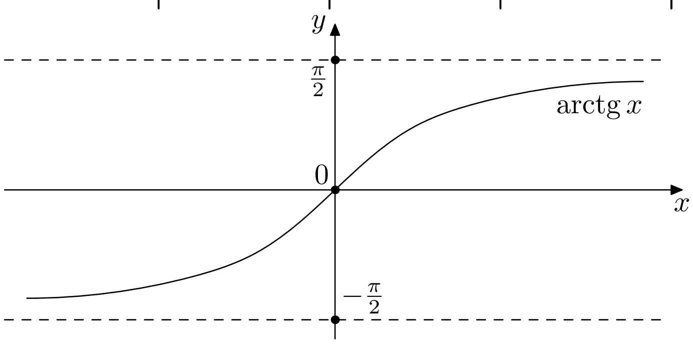


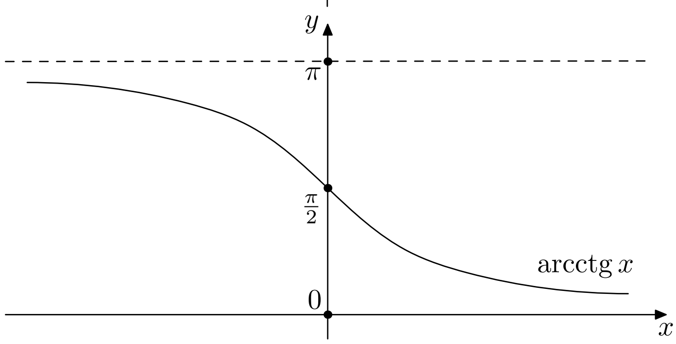







y
tg
ctg
tg
ctg
tg
$-\pi$
0
π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
x


y
$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arctg} x$
0
x
$-\frac{\pi}{2}$


y
π
$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arcctg} x$
0
x

Преобразования графиков. Построение графиков начнем с изучения того, как преобразуется график, если из данной функции создается другая функция путем взятия композиции с линейной функции в качестве внутренней функции и в качестве внешней функции. Иначе говоря, увидим, как из графика функции $f(x)$ получается график функции $h(x) = af(kx + l) + b$.

1. Пусть дана функция $f(t)$ и изображен ее график. Предположим, что функция $h(x)$ определяется как композиция, в которой f — внешняя функция, а в качестве внутренней взят сдвиг $\varphi(x) = x + m$, т. е. пусть

$$h(x) = f(\varphi(x)) = f(x + m). \tag{2.1}$$

Функция h определена для таких значений x, что $x+m \in D(f)$. Согласно формуле (1) значения функции h в точке x и функции f в точке $x + m$ совпадают. Тем самым для получения точки $(x, h(x))$ графика функции h надлежит перейти по оси абсцисс из точки x в точку $x + m$, взять там значение $f(x + m)$ функции f и перенести его в точку с абсциссой x (рис. 2.18).

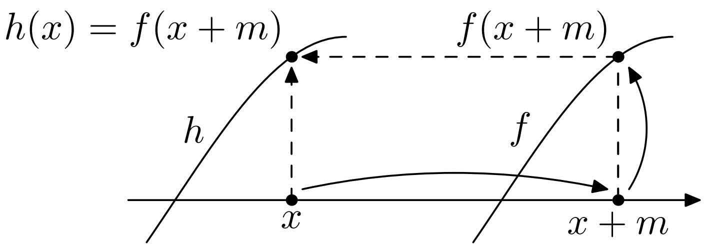


Рис. 2.18.

Если $m > 0$, то точка $x + m$ находится правее точки x на оси Ox, значит, возвращение со значением $f(x+m)$ обратно в точку с абсциссой x будет перемещением параллельно оси абсцисс влево, если же $m < 0$, то — вправо. Выходит, что график функции h получается как результат сдвига графика функции f влево при $m > 0$ или вправо при $m < 0$. На рис. 2.19 описанная процедура показана на примере перехода от графика функции $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ к графику функции $h(x) = f(x - 5) = \sqrt{4 - (x - 5)^2} = \sqrt{-x^2 + 10x - 21}$.

2. Пусть функция h получается из функции f растяжением (сжатием) аргумента, т. е. пусть

$$h(x) = f(kx), \quad \text{где } k > 0. \tag{2.2}$$

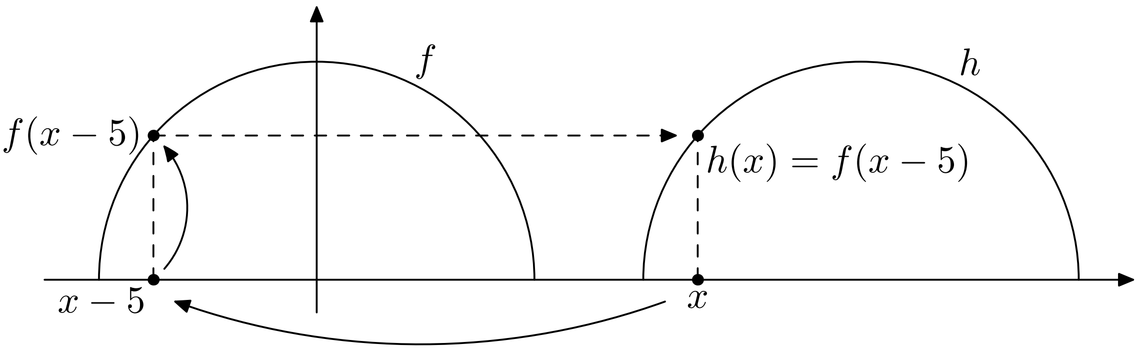


Рис. 2.19.

Функция h определена для x таких, что $kx \in D(f)$. Согласно формуле (2) для получения точки $(x, h(x))$ графика функции h мы должны проделать следующие манипуляции: перейти из точки x в точку kx оси абсцисс, найти в этой точке значение функции f, т. е. $f(kx)$, затем сместить это значение, поставив его на вертикальной прямой с абсциссой x (рис. 2.20).

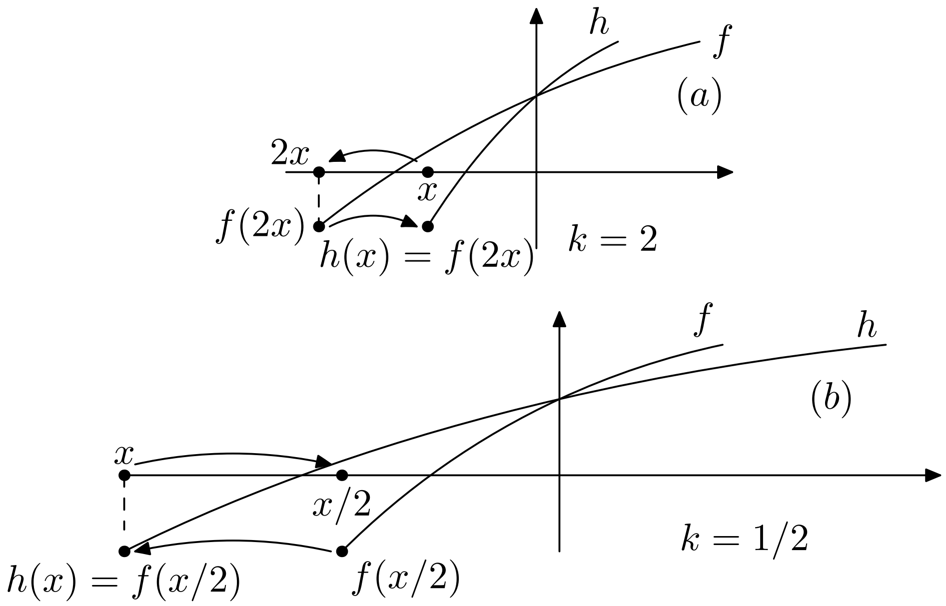


Рис. 2.20.

Если $x > 0$, а $k > 1$, то точка kx будет правее точки x, поэтому при возврате в точку x надлежит сместиться влево, если же $x < 0$, а $k > 1$, то kx левее, чем x, и дальнейшее смещение пойдет вправо. Иначе говоря, график функции h будет получаться из графика функции f сжатием относительно оси ординат: части графика функции f, находящиеся справа и слева от оси ординат, будет перемещаться соответственно влево и вправо, сжимаясь по оси абсцисс в $\dfrac{1}{k}$ (рис. 2.20(a)). Подобным образом можно понять, что при $0 < k < 1$ произойдет растяжение графика функции f относительно оси ординат (рис. 2.20(b)).

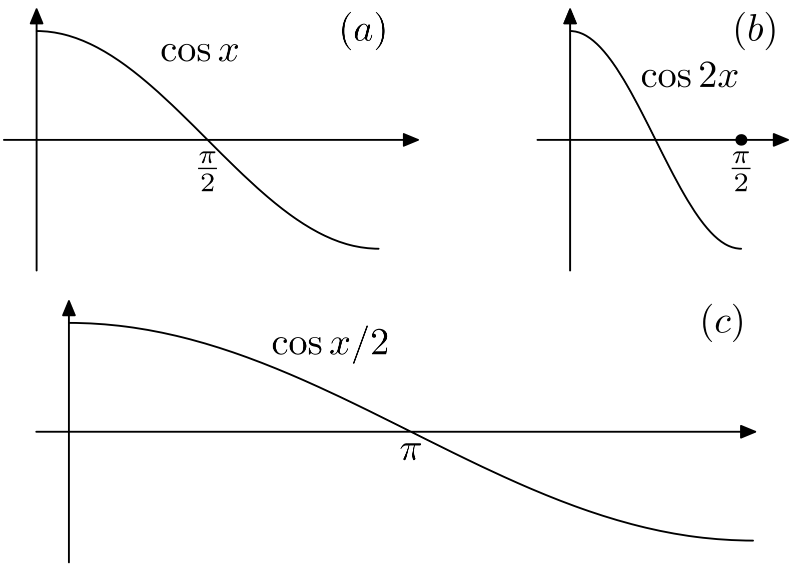


Рис. 2.21.

На рис. 2.21 описанный процесс показан на примере функций $h(x) = \cos 2x$ и $h(x) = \cos(x/2)$ с исходной функцией $f(x) = \cos x$, рассмотренной на промежутке $[0, \pi]$, при этом график $\cos 2x$ получился на отрезке $[0, \pi/2]$, а $\cos x/2$ — на $[0, 2\pi]$.

График функции

$$h(x) = f(-x) \tag{2.3}$$

получается из графика f симметричным отражением относительно оси ординат, т. е. для построения точки $(x, h(x))$ надо из точки x на оси абсцисс пойти в точку $-x$ на этой же оси, найти значение $f(-x)$ и это значение поставить на вертикальной прямой с абсциссой x (рис. 2.22). Ясно, что h определена для таких x, что $-x \in D(f)$.

График функции

$$h(x) = f(-kx), \quad \text{где } k > 0, \tag{2.4}$$

получается в результате отражения графика f симметрично относительно оси ординат и последующего растяжения или сжатия в $1/k$ раз согласно

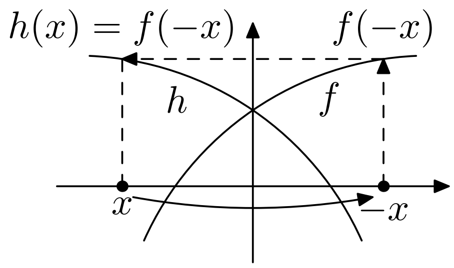


Рис. 2.22.

величине k. Тем самым появилась возможность получать график функции вида $f(kx)$ на основе графика f при k любого знака.

3. Если функция h создана следующим образом:

$$h(x) = f(k(x + m)), \tag{2.5}$$

то для построения ее графика на основе графика f надо, во-первых, произвести преобразование, соответствующее коэффициенту k, т. е. растяжение (сжатие) в $1/k$ раз при $k > 0$ или предварительное отражение относительно оси ординат с последующим растяжением (сжатием) в $-1/k$ раз при $k < 0$, а затем полученный график сдвинуть на величину m, как и выше, согласно знаку m.

Из предыдущих рекомендаций легко составить процедуру получения графика с функцией вида $kx + l$, $k \neq 0$, в качестве внутренней функции в суперпозиции, т. е. процедуру построения графика функции $h(x) = f(kx + l)$ на основе графика функции $f(x)$. Для этого проделаем небольшое преобразование:

$$f(kx + l) = f(k(x + l/k)), \tag{2.6}$$

и задача свелась к исполнению предыдущих шагов с соответствующими константами. А именно, сначала надо отработать преобразование, отвечающее умножению в аргументе на k, а затем сдвинуть на l/k.

4. Теперь рассмотрим ситуации, когда преобразования касаются значений функции, а не ее аргумента. Пусть дана функция f и известен ее график. Научимся строить на этой основе график функции $g(x) = af(x) + b$.

Начнем с того, что график функции $\varphi(x) = af(x)$ при $a > 0$ получается из графика функции f путем растяжения при $a > 1$ или сжатия при $0 < a < 1$ по оси ординат. Это значит, что для получения точки $(x, \varphi(x))$

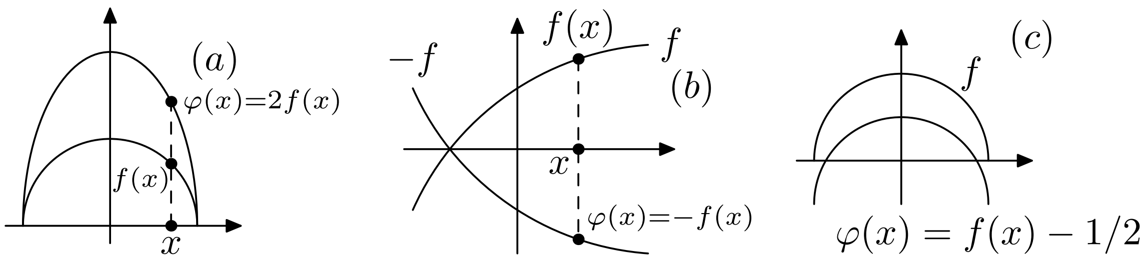


Рис. 2.23.

графика φ надлежит взять точку $(x, f(x))$ графика f и соответственно увеличить или уменьшить ее ординату в a раз (рис. 2.23(a)).

Если $\varphi(x) = -f(x)$, то график φ получается отражением графика функции f относительно оси абсцисс (рис. 2.23(b)).

График функции $\varphi(x) = -af(x)$ при $a > 0$ получается отражением графика f относительно оси абсцисс и последующим растяжением или сжатием полученной линии вдоль оси ординат согласно величине a.

5. График функции $\varphi(x) = f(x)+b$ получается из графика f сдвигом вдоль оси ординат вверх на величину b при $b > 0$ или вниз на величину $-b$ при $b < 0$ (рис. 2.23(c)).

Наконец, для построения графика функции $g(x) = af(x) + b$ надо сначала совершить преобразование, отвечающее умножению на число a, и затем — преобразование, соответствующее добавлению b.

6. Чтобы построить график функции

$$g(x) = af(kx + l) + b, \tag{2.7}$$

надо сначала отработать преобразования, вызванные влиянием внутренней функции $kx + l$, а затем к результату применить преобразования, отвечающие внешней функции $y(t) = at + b$.

7. Полезно уметь строить графики функций $f(|x|)$ и $|f(x)|$ на основе графика функции f. Функция $f(|x|)$ четна, поэтому ее график $f(|x|)$ получается так: берется та часть графика функции f, которая соответствует неотрицательным значениям аргумента из области определения функции f, и отражается симметрично относительно оси ординат, при этом расположенная правее оси ординат часть, разумеется, сохраняется, а часть графика $f(x)$, расположенная левее оси ординат, в графике функции $f(|x|)$ не участвует (рис. 2.24(a), (b)). Назовем эти действия *процедурой взятия модуля от аргумента.*

Поскольку

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

график $|f(x)|$ строится так: та часть графика функции f, которая расположена выше оси абсцисс, остается на месте, а та часть, которая расположена ниже оси абсцисс, отражается симметрично относительно оси абсцисс и добавляется к оставленной на месте части графика f (рис. 2.24(a), (c))). Эти действия назовем *процедурой взятия модуля от функции.*

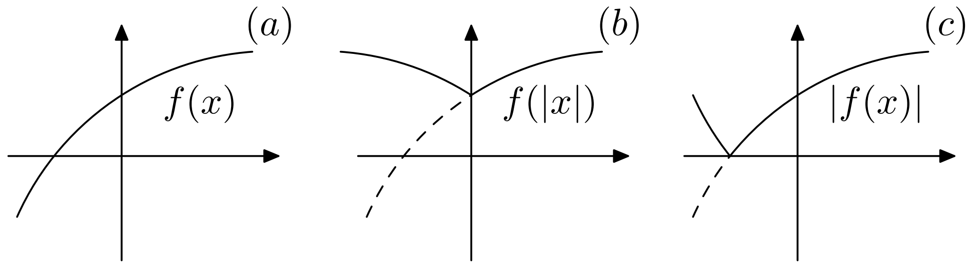


Рис. 2.24.

Пример 1. Посмотрим, как преобразования влияют на вид функции и ее графика. Возьмем какую-либо функцию, например $f(x) = \arcsin x$, график которой представлен на рис. 2.25(a), будем ее преобразовывать и смотреть, что происходит с ее графиком. Затем поймем, как можно создать цепочку преобразований, если дан конечный вид функции и надлежит понять, из какой функции и в результате каких преобразований она получилась.

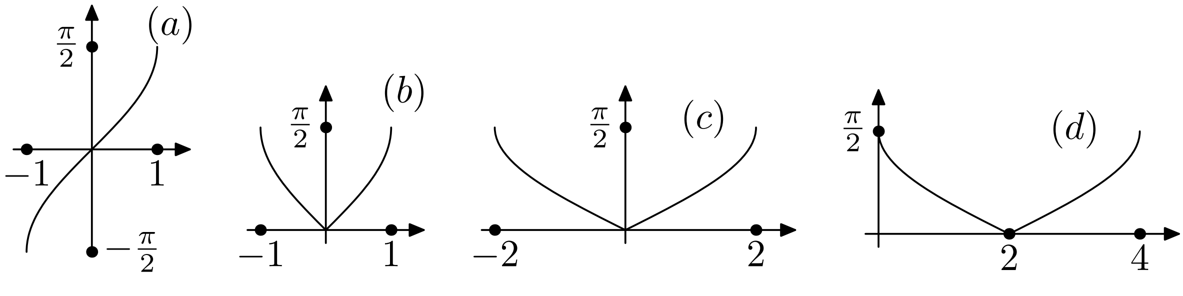


Рис. 2.25.

На первом шаге функцию $f(x)$ преобразуем в функцию $f_1(x) = f(|x|) = \arcsin |x|$. С графиком произойдет следующее: та его часть, которая находится левее оси ординат, бесследно исчезнет, а расположенная правее этой оси отразится симметрично относительно оси ординат. Результат представлен на рис. 2.25(b).

Теперь умножим аргумент на какую-либо константу, например на 1/2, т. е. перейдем от функции $f_1(x)$ к функции

$$f_2(x) = f_1\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right) = f_1\left(\frac{1}{2}|x|\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x|\right).$$

График функции f_2 представлен на рис. 2.25(c).

Добавим к аргументу какую-либо константу, например -2, и перейдем к функции

$$f_3(x) = f_2(x-2) = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x-2|\right).$$

График f_3 получается из графика f_2 сдвигом на 2 вправо (рис. 2.25(d)).

Поработаем со значениями функции. Умножим значения функции на какую-либо константу, например на 2, т. е. перейдем к функции

$$f_4(x) = 2f_3(x) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}|x-2|\right).$$

График f_4 получится из графика f_3 растяжением по оси ординат в два раза (рис. 2.26(a)).

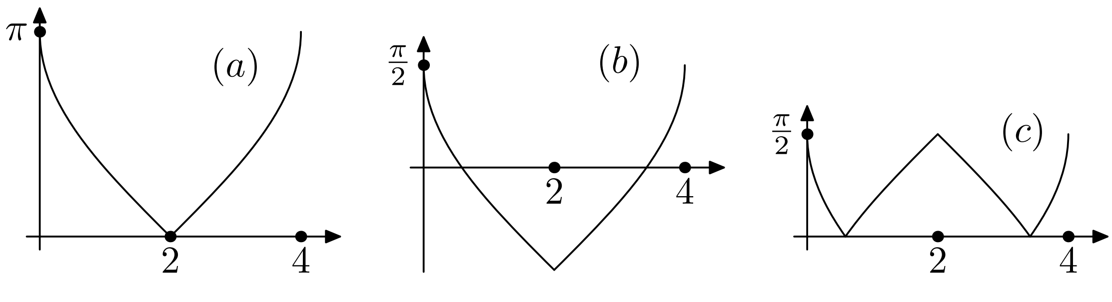


Рис. 2.26.

Теперь сделаем сдвиг значений функции на некоторую константу, например на $\pi/2$, вниз, т. е. перейдем к функции

$$f_5(x) = f_4(x) - \frac{\pi}{2} = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}|x-2|\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Ее график дан на рис. 2.26(b).

Наконец, навесим модуль на значения полученной функции, т. е. перейдем к функции

$$f_6(x) = |f_5(x)| = \left| 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}|x-2|\right) - \frac{\pi}{2} \right|.$$

С графиком произойдет следующее. Та его часть, которая расположена выше оси абсцисс, останется на месте, а расположенная ниже оси абсцисс отразится симметрично относительно оси абсцисс (рис. 2.26(c)).

Применив к данной функции все разобранные выше виды преобразований, мы в итоге пришли к функции $f_6(x)$ и ее графику.

Займемся обратной задачей: пусть дана функция, требуется исследовать, результатом какой последовательности преобразований, примененных к некоторой исходной функции, она является. В результате такого исследования у нас появится возможность прописать процедуру изменения графика исходной функции. Весь процесс проанализируем на примере конкретной последовательности преобразований, однако будет ясно, как проделать соответствующую процедуру при другой последовательности преобразований.

Пусть известен график функции $\varphi(x)$. Рассмотрим функцию $f(x) = |2\varphi(|2x-1|)-1|$ (для изображения проводимых преобразований читатель может подставить на место $\varphi(x)$ любую функцию, график которой ему известен). Функция f получается из функции $f_1(x) = 2\varphi(|2x-1|)-1$ в результате операции взятия модуля от значений функции, так что график f получится из графика f_1 в результате соответствующей операции. Функция $f_1(x)$ получается из функции $f_2(x) = 2\varphi(|2x-1|)$ путем вычитания из $f_2(x)$ единицы, значит, график f_1 получается из графика f_2 сдвигом вниз на единицу. Функция $f_2(x)$ получается из функции $f_3(x) = \varphi(|2x-1|)$ умножением значений на 2, стало быть, график f_2 получается из графика f_3 растяжением по вертикали в два раза. Функция $f_3(x) = \varphi(|2x-1|) = \varphi(2|x-1/2|)$ получается из функции $f_4(x) = \varphi(2|x|)$ в результате вычитания из аргумента числа $1/2$, стало быть, график f_3 получается из графика f_4 сдвигом на $1/2$ по оси абсцисс вправо. Функция f_4 получается из функции $f_5(x) = \varphi(|x|)$ умножением аргумента на два, тем самым график f_4 получается из графика f_5 (горизонтальным) сжатием по оси абсцисс в два раза. Наконец, функция $f_5(x)$ получается из функции $f_6(x) = \varphi(x)$ путем взятия модуля от аргумента, так что график f_5 получается из графика f_6 в результате применения соответствующей операции.

Таким образом, мы получили процедуру построения графика исходной функции f на основе известного графика функции φ.

Теперь, когда установлена последовательность действий, в результате которых из функции φ получается функция f, можно, переходя в обратном порядке от функции $\varphi = f_6$ к функции f, указать последовательность преобразований, в результате которых из графика функции φ получится график функции f, а именно:

1) применить к графику функции φ процедуру взятия модуля от аргумента,

2) сжать график по оси абсцисс в 2 раза,

3) сдвинуть график вправо на $1/2$,

4) растянуть по вертикали в 2 раза,

5) сдвинуть вниз на 1,

6) применить процедуру взятия модуля от функции.

Простейшее исследование функции и построение графика. Для определенности и единообразия будем проводить исследование функции и последующее построение графика путем выполнения пожеланий пунктов следующего ниже перечня, хотя в каких-то ситуациях, возможно, от этого перечня будем отклоняться.

Перечень действий для исследования функции в целях построения ее графика.

1. Найти область определения.

2. Исследовать особенности функции, упрощающие построение графика, а именно установить, будет ли она четной, нечетной, периодической.

3. Найти нули функции или установить их отсутствие, указать промежутки ее знакопостоянства.

4. Изучить поведение функции на концах области определения и характер ее обращения в нуль.

5. Исследовать монотонность и экстремумы.

Покажем, как работает предложенный перечень на примерах несложно задаваемых функций. Оказывается, что и в простых ситуациях могут быть неожиданности. Постараемся ограничиваться элементарными средствами, не предполагающими использование производной, но и пренебрегать совсем этим техническим средством не будем, так что при острой необходимости привлечем и производную.

Пример 1. Построим график функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Функция определена при всех действительных x. Она непериодическая, например потому, что значение 1 она принимает единственный раз, при $x = 0$. Функция четна:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Ввиду четности дальнейшее изучение пройдет для $x \geqslant 0$.

На множестве $[0, +\infty)$ функция $x^2 + 1$, стоящая в знаменателе, при увеличении x неограниченно возрастает, следовательно, наша функция убывает и неограниченно приближается к нулю. Тем самым на правом конце области определения, при далеких положительных x ее график будет прижиматься к оси абсцисс и выглядеть так, как показано на рис. 2.27(a).

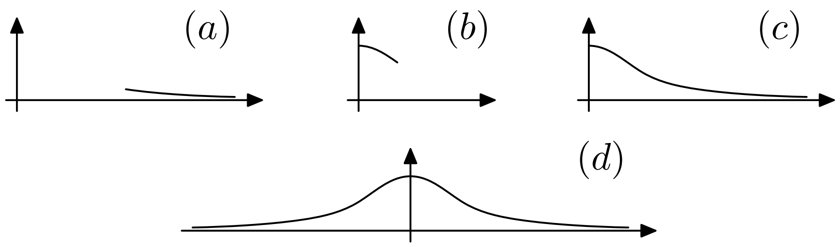


Рис. 2.27.

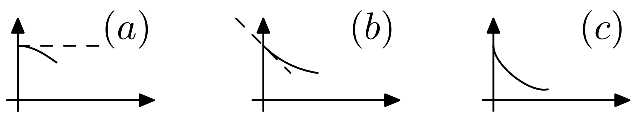


Рис. 2.28.

На другом конце рассматриваемого множества, т. е. при $x = 0$, она равна 1. Однако приблизиться к единице она могла разными способами — с горизонтальной, наклонной или вертикальной касательной, т. е. одним из указанных на рис. 2.28 способов. Обычно такое исследование проводится с помощью производной, однако в нашем случае можно обойтись и без нее. Обратим внимание на то, что выражение $\dfrac{1}{x^2+1}$ для $|x| < 1$

равно сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $-x^2$:

$$\frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

Поскольку нас интересует, как будет выглядеть график около нуля оси абсцисс, естественно считать x малыми, близкими к 0. А тогда значения x^4, x^6 и т. д. существенно меньше, чем x^2, значит, если «пожертвовать» этими малыми по сравнению с x^2 слагаемыми, то можно считать, что наша функция близка к функции $1 - x^2$, вид которой около нуля известен. Вместе с тем нетрудно понять, что $f(x) > 1 - x^2$ и $f(x) \leqslant 1$. Тем самым график нашей функции будет между графиками функций $y = 1 - x^2$ и $y = 1$ и вид его показан на рис. 2.27(b). Изображая рис. 2.27(a) и 20(b) на одной координатной плоскости, получим эскиз графика функции f для положительных x (рис. 2.27(c)) а распространив картинку по четности на всю числовую прямую, придем к эскизу всего графика функции (рис. 2.27(d)).

По-видимому, у нее будет меняться направление выпуклости, но это можно исследовать, привлекая вторую производную, что в наши планы пока не входит.

Пример 2. Построим график функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

Отличие функции этого примера от функции предыдущего лишь в том, что здесь в знаменателе стоит знак минус, тогда как там — плюс. Однако различия в свойствах функций и их графиках существенны.

Функция определена на всем множестве $\mathbb{R}$, кроме точек -1 и 1. Она четная и непериодическая, так что изучать ее можно лишь на множестве неотрицательных действительных чисел.

Функция не обращается в нуль, и неравенство $\dfrac{1}{x^2-1} > 0$ выполнено на множестве $|x| > 1$, т. е. на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. На оставшемся множестве $(-1, 1)$ она отрицательна.

Изучим поведение функции на концах области определения. При увеличении x знаменатель возрастает и неограниченно увеличивается, так что функция, убывая, приближается к нулю. Это отражено на рис. 2.29(a).

Если аргумент приближается к значению 1, оставаясь справа от этой точки, то знаменатель приближается к нулю, а график функции, положительной справа от 1, неограниченно приближается к вертикальной прямой $x = 1$ справа (рис. 2.29(b)). Если подходить к 1 слева, то приближение знаменателя к нулю останется, а знак изменится, стало быть, значения функции около 1 слева будут большими по абсолютной величине, но отрицательными, а ее график «прильнет» к вертикальной прямой $x = 1$ слева, как показано на рис. 2.29(c).

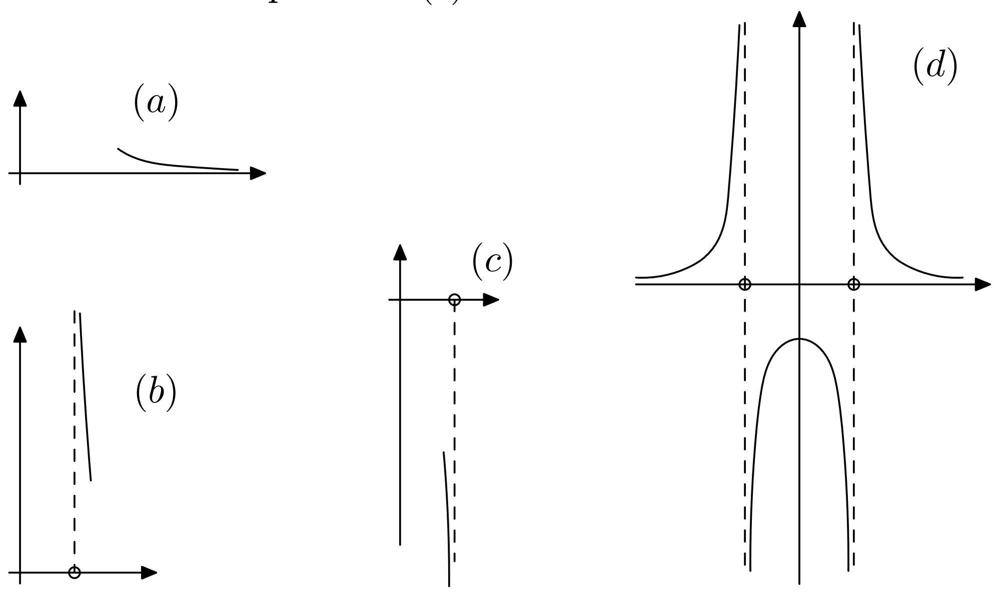


Рис. 2.29.

Осталось, по существу, понять, как выглядит функция около точки $x = 0$. Аналогично предыдущему можно сказать, что

$$\frac{1}{x^2 - 1} = -1 - x^2 - x^4 - \dots,$$

и, пренебрегая сравнительно малыми величинами $x^4, \dots$, можно написать приближенное равенство $\dfrac{1}{x^2 - 1} \approx -x^2 - 1$, а вид этой функции около нуля известен. Осталось, соединив информацию рис. 2.29(a)–(c) и приняв во внимание четность функции, изобразить график самой функции (рис. 2.29(d)).

Пример 3. Построим график функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Данная функция определена на множестве $|x| \geqslant 1$, т. е. на множестве $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Функция четная, так что при ее исследовании можно ограничиться множеством $[1, +\infty)$. Функция обращается в нуль в точках ± 1 и возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Если x неограниченно возрастает, то при больших значениях x вычитание единицы практически незаметно, так что при таких x функция будет близка к функции $y = \sqrt{x^2} = x$, оставаясь меньше функции $y = x$. Это наблюдение говорит о том, что при далеких x график нашей функции будет «прижиматься» к графику функции $y = x$ снизу так, как показано на рис. 2.30(a).

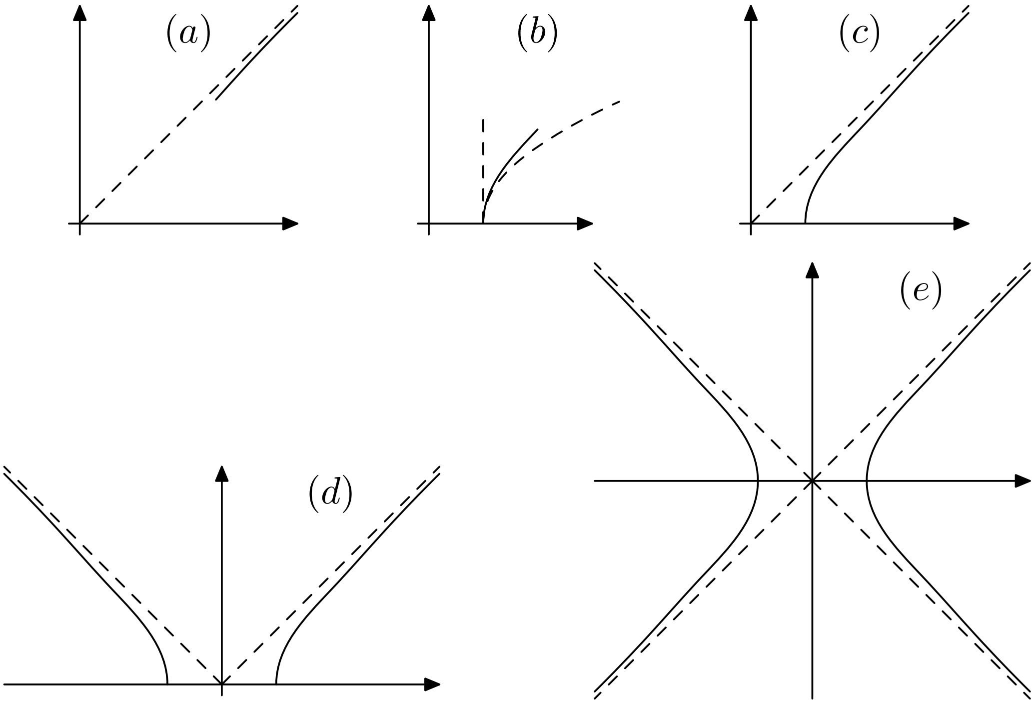


Рис. 2.30.

Будем теперь приближаться к точке 1 (естественно, справа). Как узнать характер входа в нуль функции $f(x)$? Можно найти ее производную, а можно пока обойтись и простыми наблюдениями. Представим функцию в виде $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ и заметим, что из двух сомножителей под корнем один обращается в нуль, а другой нет, поэтому характер обращения функции в нуль будет определяться только одним из этих сомножителей, а именно $x - 1$, второй множитель (под корнем) будет примерно равен 2. Поэтому около точки $x = 1$ можно написать, что $f(x) \approx \sqrt{2(x-1)}$, а вид этой функции понятен — это сдвинутый и немного растянутый по оси Oy корень квадратный (рис. 2.30(b)). Наша функция будет немного больше функции $\sqrt{2(x-1)}$. Вспомнив, что функция возрастает на $[1, +\infty)$, и соединив фрагменты графика, изображенные на рис. 2.30(a),(b), получим эскиз графика функции при положительных x

(рис. 2.30(c)). График всей функции получится из построенной части распространением по четности, т. е. симметрией относительно оси ординат (рис. 2.30(d)).

Кстати, можно заметить, что это части гиперболы, но не той, которую мы привыкли видеть как график функции $y = \dfrac{1}{x}$, а повернутой по часовой стрелке на угол $\pi/4$ (рис. 2.30(e)).

Пример 4. Построим график функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Функция определена на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Она нечетная как сумма двух нечетных функций. Функция непериодическая хотя бы потому, что в области ее определения нет всего одного числа, а именно нуля.

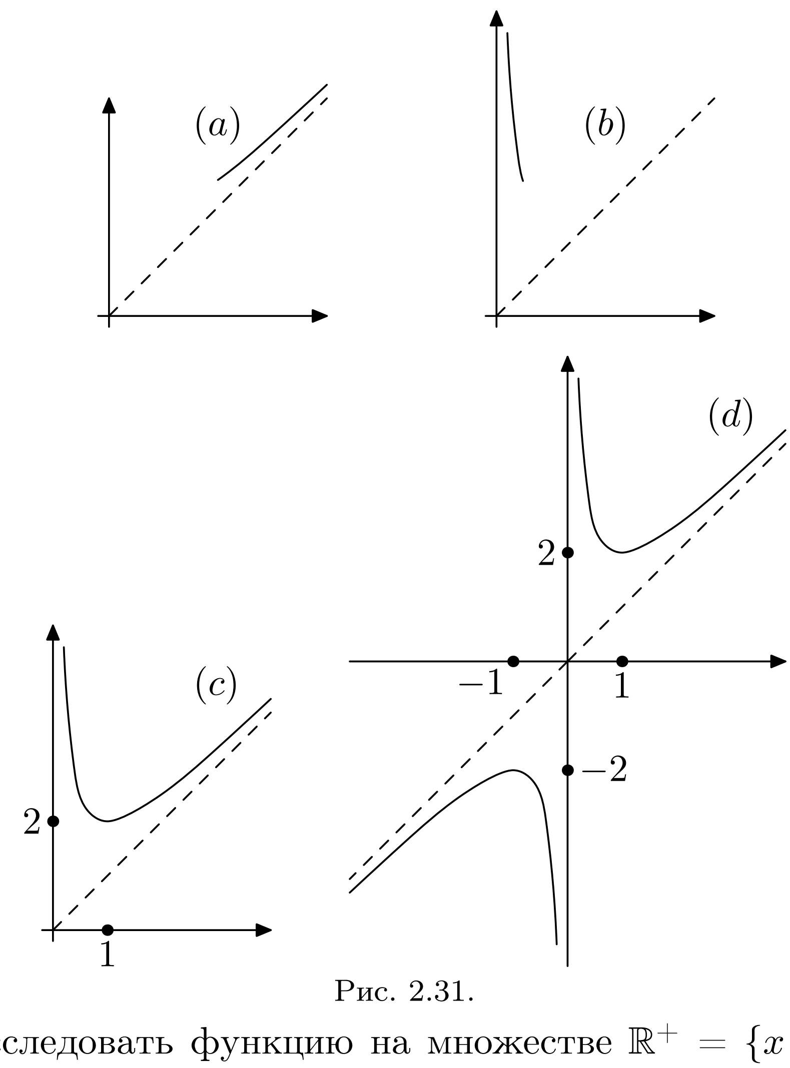


Рис. 2.31.

Будем исследовать функцию на множестве $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Она положительна во всех точках этого множества. Если x становится большим, то слагаемое $1/x$ в определяющей функцию формуле становится малым и тем самым на величину значения $f(x)$ окажет малое влияние. Иначе говоря, при больших x имеем $f(x) \approx x$ и $f(x) > x$. Это наблюдение на рисунке выглядит как «прилипание» графика функции f сверху к графику функции $y = x$ при далеких положительных значениях x (рис. 2.31(a)). Пусть теперь x приближается к нулю. Тогда из двух слагаемых x и $1/x$ основной вклад в величину значения функции внесет $1/x$, так что при малых положительных x имеем $f(x) \approx 1/x$ и при этом $f(x) > 1/x$. Это выглядит так, как изображено на рис. 2.31(b).

Из рис. 2.31$(a),(b)$ ясно, что где-то при $x > 0$ будет минимум функции. Его легко найти с помощью производной, но мы ради того, чтобы воспользоваться некоторым простым полезным техническим средством, сделаем это иначе. Представляя слагаемые x и $1/x$ как квадраты каких-то величин, выделим в функции полный квадрат и оценим ее снизу:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x - 2 + \frac{1}{x} + 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Поскольку при этом $f(1) = 2$, становится понятно, что 2 — наименьшее значение функции, достигаемое при $x = 1$. На промежутке $(0, 1]$ функция убывает, на $[1, +\infty)$ — возрастает (что можно обосновать с помощью производной). График функции на положительной полуоси изображен на рис. 2.31(c), а весь график — на рис. 2.31(d).

ПРАКТИКА

1. Применяя преобразования графиков, построить графики функций:

(1) $y = \sin 2x$, (2) $y = 2\sin x$, (3) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$,
(4) $y = 2\sin x + 1$, (5) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2$, (6) $y = x^2 + 2x + 2$,
(7) $y = 2x^2 + 4x + 5$, (8) $y = |x^2 + 2x - 2|$, (9) $y = x^2 + 2|x| - 2$,
(10) $y = |x^2 + 2|x| - 2|$, (11) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, (12) $y = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$,

2. Провести простейший анализ функций и изобразить эскизы их графиков:

(1) $y = \sqrt{x^2 + 1}$, (2) $y = \sqrt{1 - x^2}$, (3)$y = x - \dfrac{1}{x}$,
(4) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$, (5) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, (6) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$, (7) $y = \dfrac{1}{\sin x}$,

(8) $y = \sin \dfrac{1}{x}$, (9) $y = x \sin x$, (10) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$,

(11) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x+1}$, (12) $y = 2^{\frac{1}{x}}$,