§ 1.3. Предел последовательности

3.1. Точные границы. Начнем с анализа точных границ последовательностей. Сначала напомним определение точной границы множества.

ТЕОРИЯ

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называют *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует такое число C, что для любого $x \in A$ выполнено неравенство $x \leqslant C$ (соответственно $x \geqslant C$).

Число $b \in \mathbb{R}$ называют *верхней* (*нижней*) *границей* множества $A \subset \mathbb{R}$, если $(\forall x \in A)\ x \leqslant b$ (соответственно $(\forall x \in A)\ x \geqslant b$ (рис. 1.3). С использованием кванторов ограниченность сверху (снизу) выражается так:

$$(\exists C \forall x \in A) \quad x \leqslant C \tag{1}$$

(соответственно

$$(\exists C \forall x \in A) \quad x \geqslant C. \tag{2}$$

Можно сказать, что множество ограничено сверху (снизу), если множество его верхних (нижних) границ непусто.

Множество в $\mathbb{R}$ называют *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу. Ограниченность множества $A \subset \mathbb{R}$ можно описать так:

$$(\exists C > 0 \forall x \in A) \quad |x| \leqslant C. \tag{3}$$

Если множество не обладает свойством ограниченности сверху или снизу, его называют неограниченным соответственно сверху или снизу. Обращаясь к отрицанию высказываний (1)–(3), можно описать неограниченность сверху, снизу и двустороннюю:

$$(\forall C \exists x \in A) \quad x > C,$$

$$(\forall C \exists x \in A) \quad x < C,$$

$$(\forall C \exists x \in A) \quad |x| > C.$$

Наименьшую из верхних границ множества A называют его *точной верхней границей* и обозначают через $\sup A$ (читается «супремум A»). Двойственным образом определяют точную нижнюю границу $\inf A$ множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ как наибольшую из его нижних границ (читается «инфимум A»).

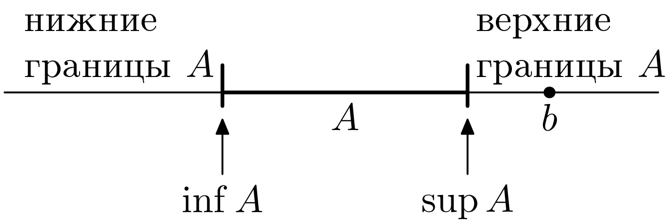

Рис. 3.1.

Утверждение. *Каждое подмножество в* $\overline{\mathbb{R}}$ *имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы. Если при этом* $A \subset \mathbb{R}$ *непусто и ограничено сверху (снизу) (в* $\mathbb{R}$*), то* $\sup A \in \mathbb{R}$ $(\inf A \in \mathbb{R})$*, так что такое множество* A *имеет точную верхнюю (нижнюю) границу в* $\mathbb{R}$*.* Для неограниченного сверху (снизу) множества A будет $\sup A = +\infty$ (соответственно $\inf A = -\infty$).

ТЕХНОЛОГИИ

Согласно определению точных границ для доказательства, например, равенства $\sup A = a$, в котором сообщается, что стоящее в правой его части число a является точной верхней границей множества A, надо проверить два свойства:

1) a — верхняя граница A, т. е.

$$(\forall x \in A) \quad x \leqslant a;$$

2) граница a наименьшая, иначе говоря, если b — какая-либо граница A, то a ее не больше, т. е.

$$\text{если } (\forall x \in A)\ x \leqslant b, \text{ то } a \leqslant b.$$

Аналогичное можно сказать и о равенстве $\inf A = a$.

Обычно при обосновании того факта, что какое-то число служит точной границей последовательности используют критерий точной границы.

Теорема (критерий точной верхней границы). *Если* A *— непустое ограниченное сверху множество в* $\mathbb{R}$*, то равенство* $\sup A = a$ *равносильно тому, что*

1) a *— верхняя граница* A*;*

2) *любое число* $b < a$ *уже не является верхней границей множества* A*, т. е.*

$$(\forall b < a \exists x \in A) \quad x > b.$$

Свойство 2 можно сформулировать в терминах отклонения числа b *от границы* a*, и это выглядит так:*

$2'$) *для любого* $\varepsilon > 0$ *смещение от* a *вниз на* ε *не является верхней границей* A, *т. е.*

$$(\forall\varepsilon > 0\exists x \in A) \quad x > a - \varepsilon.$$

Точной верхней (нижней) границей последовательности называют точную верхнюю (нижнюю) границу множества ее членов.

1. Пример. Найти точные границы последовательности

$$x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$$

Легко заметить, что наша последовательность ограничена сверху единицей, а снизу — нулем. Используя свойства периодичности синуса, можно утверждать, что множитель $\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$ принимает значение 0 на номерах вида $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, значение $1/2$ на номерах вида $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, и значение 1 на номерах вида $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\dfrac{n}{n+1}$ положительна и возрастает. Из этих наблюдений можно сделать вывод, что найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $x_n = 0$ (и таких номеров будет много). Нижняя граница, достигаемая на каком-то элементе, очевидно, будет точной, так что $\inf x_n = 0$. Займемся точной верхней границей. Умножая близкое к единице значение $\dfrac{n}{n+1}$ на единицу (при соответствующих номерах), мы будем получать близкие к единице числа. Это позволяет предположить, что точной верхней границей будет единица. Обоснуем эту гипотезу. Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем номер n вида $4k+2$ и попытаемся подобрать такое $k \in \mathbb{N}$, что $1-\varepsilon < x_{4k+2}$, т. е. $1-\varepsilon < \dfrac{4k+2}{4k+3}$. Решая это неравенство, в котором ε считается параметром, а k — искомой величиной, получим, что при $\varepsilon \geq 1$ требуемое неравенство выполнится при любом k, а при $\varepsilon < 1$ — для $k > \dfrac{1-3\varepsilon}{4\varepsilon}$. Итак, правило выбора по заданному $\varepsilon > 0$ требуемого номера n найдено, так что $\sup x_n = 1$.

ПРАКТИКА

1. Найти точные границы последовательностей

(1) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$, **(2)** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$,

(3) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$, **(4)** $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

3.2. Предел последовательности.

ТЕОРИЯ

Пусть даны последовательность x_n и число a. Договоримся о том, как математически выразить интуитивно ясное представление о том, что последовательность x_n неограниченно приближается к числу a, т. е. значения x_n при неограниченном увеличении n становятся всё ближе и ближе к a

Сначала обратимся к геометрической поддержке. Так как *последовательность* — это функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для ее геометрического представления можно использовать график как множество всех упорядоченных пар (n, x_n) на координатной плоскости. Правда, в этом случае сплошной линии, как у графиков обычных функций, не получится, а будет «пунктирное» множество, но это обстоятельство не должно нас смущать.

Изобразим координатную плоскость, на которой по оси абсцисс отметим натуральные $n = 1, 2, \ldots$ и над каждой отмеченной точкой на высоте x_n поместим в виде точки значение x_n последовательности. На оси ординат отметим точку a (рис. 1).

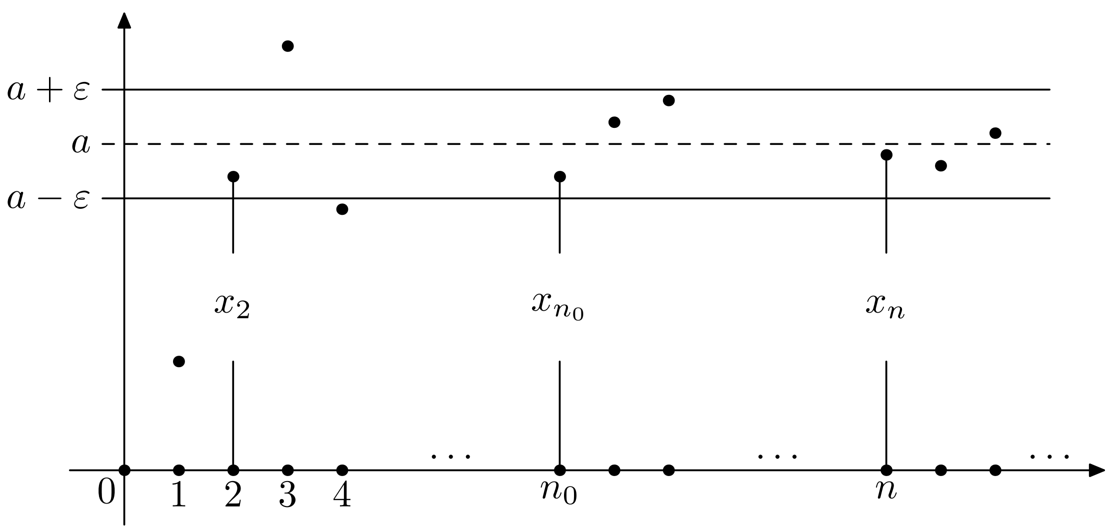

Рис. 1

Поскольку нас интересует неограниченное приближение x_n к a «в перспективе», при далеких номерах n, расположение последовательности при начальных номерах нас не интересует. Представим себе, что есть два участника договоренности: **Вы** и **Я**. Вы намерены убедить меня в том, что последовательность x_n неограниченно приближается к a, и если удастся это сделать, то мы вместе назовем это обстоятельство выражениями «a есть *предел* последовательности x_n» или «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» (последние выражения не следует понимать буквально, это термины, которые означают лишь то, что за ними кроется).

Так как Вы убеждаете меня в неограниченном приближении, Я, естественно, должен проверять, насколько значения x_n отличаются от величины a, для чего приготовлю число, которым буду измерять точность приближения, или, иначе говоря, степень отклонения x_n от a. Естественно, число должно быть положительным. Я буду обозначать его греческой буквой ε. Согласно договору приближение должно быть неограниченным, т. е. надо гарантировать невозможность вставить границу между значениями x_n с далекими номерами и числом a. Это можно гарантировать, например, такой процедурой. Я буду предлагать Вам какое-то, неизвестное Вам заранее значение $\varepsilon > 0$, а от Вас буду ожидать, что Вы обеспечите отклонение x_n от a в пределах заданной точности ε для всех далеких номеров n, т. е. сумеете найти такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ отклонение x_n от a будет в пределах от $-\varepsilon$ до ε. Последнее можно выразить так: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, или так: $|x_n - a| < \varepsilon$. Обратившись к рис. 1, об этом можно сказать так: Вы обеспечите такой номер n_0, что для всех n, лежащих правее от этого номера, отмеченные на высоте x_n точки, изображающие элементы последовательности, окажутся в полосе между горизонтальными линиями, проведенными на высотах $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. Если Вы не можете обеспечить отклонение x_n от a в пределах заданной мной точности $\varepsilon > 0$ для всех далеких номеров n, то Я не готов согласиться с тем, что x_n неограниченно приближается к a.

Сформулируем договоренность в математических терминах.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ будем называть *пределом последовательности* x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, при этом будем использовать обозначение $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Часть обозначения вида $n \to \infty$ подчеркивает, что мы оцениваем близость x_n к a при неограниченном возрастании номеров n. Часто в этом случае говорят «при n, стремящемся к бесконечности». Заметим однако, что каждое число находится на своем месте и никуда не стремится, тем самым эту фразу не следует воспринимать буквально. Это всего лишь фрагмент термина, за которым скрывается определенное содержание. Поскольку ни при каких других обстоятельствах мы оценивать отклонение x_n от a не будем, в обозначениях часть $n \to \infty$ иногда (даже, скорее всего, всегда, если достаточно ясно, по какой переменной происходит переход к пределу) будем опускать и писать просто $a = \lim x_n$.

Тот факт, что $a = \lim x_n$, выражают также словами «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» и записывают $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ или, короче, $x_n \to a$.

Если последовательность имеет (конечный) предел, то ее называют *сходящейся.* Тем самым термин «сходится» применяют только в случае конечного предела, в общем случае используют термин «стремится».

ТЕХНОЛОГИИ

Обсудим, как доказывать тот факт, что $a = \lim x_n$, и выработаем признак конца доказательства. Поскольку конструкция предела последовательности похожа на конструкцию неограниченности функции, ясно, что и обсуждение будет аналогичным рассмотрению свойства неограниченности.

Поскольку здесь есть внешнее, от нас не зависящее требование $\forall\varepsilon > 0$, мы должны выработать **правило поиска** требуемого далее значения $n_0 \in \mathbb{N}$ в зависимости от какого-то нам неизвестного значения ε. Рассуждение, посвященное подбору n_0, надо начинать, например, так: пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Этим мы подчеркиваем, что готовы к выработке правила. После этого надо пойти в конец и посмотреть, что от нас ожидают. А от нас ожидают, что мы для произвольного $n \geqslant n_0$ гарантируем оценку $|x_n - a| < \varepsilon$, где n_0 нам предстоит указать.

Для выбора номера n_0, начиная с которого будет выполнена требуемая оценка, попробуем *ограничить сверху разность* $|x_n - a|$ *чем-то более простым, но все еще малым.* Иначе говоря, попробуем подобрать такую последовательность a_n, что $|x_n - a| \leqslant a_n$ и есть шанс подобрать по заданному $\varepsilon > 0$ номер n_0 для последовательности a_n так, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Если ясно, как это сделать, то найденный номер n_0 подойдет и для разности $|x_n - a|$ — она ведь не больше чем a_n и тем более будет меньше чем ε. Если еще недостаточно видно, как подобрать номер для последовательности a_n, то, в свою очередь, можно попробовать ограничить ее другой последовательностью, более простой, но все еще малой.

И так продолжать процесс до тех пор, пока не появится последовательность, для которой требуемый номер найти уже легко. Как только нам удастся выработать правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$, доказательство закончится.

Можно рассуждать несколько иначе. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Обратимся к тому, что от нас потребуется. Мы должны обеспечить выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех достаточно далеких номеров n. Поставим вопрос: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Иначе говоря, из какого соотношения это неравенство вытекает? Если взять последовательность a_n такую, что $|x_n - a| \leqslant a_n$, и найти номер n_0 такой, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$, то для этих же номеров n будет выполнено и требуемое неравенство. Если для последовательности a_n выбор номера затруднен, то процесс можно продолжить и вновь обратиться к вопросу: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Ответ на него может привести к другой последовательности, и так следует продолжать процесс до тех пор, пока не найдется такая последовательность, для которой выбор номера тривиален.

Эти рассуждения относятся, скорее, к доказательству равенства $a = \lim x_n$ для конкретной последовательности x_n. Отчасти их можно применять и тогда, когда речь идет о доказательстве утверждений с участием предела. Однако если для конкретной последовательности выбор номера обеспечивается ограничением сверху какими-то также конкретными последовательностями, то в утверждениях выбор требуемого номера, как правило, обеспечивается ограничениями сверху, исходящими из предельных свойств, данных в условии.

Пример 1. Докажем, что

$$\lim \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} = 0. \tag{2.7}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Пойдем в конец определения предела последовательности и посмотрим, что от нас будут ожидать. От нас потребуется обеспечить выполнение неравенства

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| < \varepsilon$$

для всех далеких номеров. Попробуем ограничить левую часть последнего неравенства сверху чем-то более простым, но все еще малым. Заметив,

что $|\sin n^2| \leqslant 1$, имеем
$$\left|\frac{n\sin n^2}{n^4+1}\right| \leqslant \frac{n}{n^4+1}.$$
Легко ли подобрать требуемый номер, исходя из новой последовательности, т. е. насколько легко выразить n через ε из неравенства
$$\frac{n}{n^4+1} < \varepsilon?$$
По-видимому, не столь легко, сколь хотелось бы. Поэтому попробуем ограничить выражение $\dfrac{n}{n^4+1}$ сверху сверху чем-то более простым, но все еще малым. Уменьшив знаменатель, мы увеличим дробь, поэтому
$$\frac{n}{n^4+1} \leqslant \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$
Легко ли выразить n через ε из неравенства $\dfrac{1}{n^3} < \varepsilon$? Легко. Можно выразить, а можно еще облегчить выражение, если заметить, что $\dfrac{1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n}$, а из неравенства $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ выразить n через ε совсем легко. Последнее неравенство равносильно тому, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, и в качестве требуемого номера n_0 можно взять любое натуральное число, большее чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Например, можно взять $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где взятие целой части (символизируют квадратные скобки) «обнатураливает» дробь $\dfrac{1}{\varepsilon}$, при этом, возможно, немного уменьшая ее, а добавление единицы делает результат бóльшим, чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Если $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то для любого $n \geqslant n_0$ тем более $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, а тогда, пользуясь логикой предыдущих рассуждений, можно гарантировать, что для таких номеров также
$$\left|\frac{n\sin n^2}{n^4+1}\right| < \varepsilon.$$

Правило выбора требуемого номера n_0 по заданному ε сформировано, значит, соотношение (2.7) доказано.

Пример 2. Доказать, что $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Ориентируясь на него, озаботимся поиском оценки сверху для членов нашей последовательности. Пронаблюдав за несколькими первыми ее членами, предположим, что $\dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, т. е. $n^2 \leq 2^n$ для $n \geq 4$. Действительно, такое неравенство верно, что легко доказывается, например, методом математической индукции. Значит, $\dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$, и мы пришли к достаточно простой последовательности для обеспечения выбора номера. Подберем n_0 так, чтобы $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, т. е. возьмем какое-либо натуральное n_0, удовлетворяющее неравенству $n_0 \geqslant \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для $n \geq n_0$ будет $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, а значит, и $\dfrac{n}{2^n} \leq \varepsilon$.

ПРАКТИКА

1. Доказать равенства

(1) $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$, **(2)** $\lim \dfrac{1}{n!} = 0$,

(3) $\lim \dfrac{n^2 \sin n!}{(n+1)^3} = 0$, **(4)** $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

2. Доказать равенства

(1) $\lim \dfrac{2^n}{n!} = 0$, **(2)** $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$,

(3) $\lim \dfrac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1$, **(4)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0,\ a > 1,\ k \in \mathbb{R}$,

(5) $\lim \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$, **(6)** $\lim nq^n = 0,\ |q| < 1$,

(7) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, (8) $\lim \dfrac{\log_a n}{n} = 0$, (9) $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

3. Доказать, что последовательность $x_n = n^2 \cos \dfrac{n\pi}{2}$ неограниченная, но не является бесконечно большой.

4. Доказать, что

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\log_a n)^p = +\infty$, $a > 1$, $p \geq 1$;

(2) $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n})=+\infty$.

5. Пусть последовательность x_n сходится, а y_n расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей x_n+y_n, $x_n y_n$?

3.3. Критерий Коши.

ТЕОРИЯ

Как можно заметить, в определении предела участвует само значение предела. Однако бывает важно просто знать, сходится последовательность или нет. Сформулированный ниже критерий дает принципиальную возможность судить о сходимости числовой последовательности, не прибегая к значению ее предела.

Определение. Последовательность x_n называют *фундаментальной*, или *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*, если

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall m>n_0\,\forall n>n_0)\quad |x_m-x_n|<\varepsilon.$$

Условие фундаментальности иногда удобно использовать в следующем виде:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n>n_0\,\forall p\geq 0)\quad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши). *Для существования конечного предела числовой последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

ТЕХНОЛОГИИ

Критерий Коши редко используется для доказательства сходимости конкретных последовательностей, он чаще участвует в теоретических вопросах. Тем не менее надо представлять себе основные особенности его применения.

Для доказательства сходимости последовательности с помощью критерия Коши надо поступать так же, как поступали при доказательстве того, что некоторое число является пределом данной последовательности. Отличие здесь в том, что при обосновании фундаментальности надо по заданному ε конструировать правило выбора номера, обслуживающего не один индекс, как в пределе последовательности, а два, стало быть, разность $|x_{n+p}-x_n|$ надо оценивать сверху чем-то более простым, малым, и не зависящим от p, чтобы влияния этого параметра на выбор номера не было. Конкретная реализация указанного пожелания своя в каждом конкретном случае.

ПРАКТИКА

1. Используя критерий Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n, \quad |a_k| \le M,\ k = 0, 1, \dots,\ |q| < 1; \tag{1}$$

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}; \tag{2}$$

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}; \tag{3}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}. \tag{4}$$

2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$