

§ 10. Несобственный интеграл

ТЕОРИЯ

При определении интеграла Римана от участвующих в нем объектов, а именно промежутка интегрирования и заданной на нем функции, предполагались выполненными следующие условия:

- (1) промежуток интегрирования замкнут и ограничен;
- (2) заданная на промежутке функция ограничена.

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то интегральные суммы не могут иметь предела в указанном в § 9 смысле. Однако при выполнении замены переменной нам уже приходилось сталкиваться с необходимостью интегрировать в ситуациях, выходящих за рамки указанных ограничений (см. об этом замечание в § 9). Кроме того, часто возникает потребность в интегрировании либо неограниченной функции, либо по неограниченному промежутку. Ответом на указанные потребности служит расширение определения интеграла на случаи, когда указанные ограничения отсутствуют.

Рассмотрим функцию f , заданную на множестве $X \subset \mathbb{R}$, и пусть ω — предельная точка множества X . Будем говорить, что ω является *особой точкой для функции f* , если либо ω бесконечна, либо f неограниченна в любой окрестности этой точки.

Пусть X — промежуток, у которого правый конец служит особой точкой функции f , т. е. $X = [a, \omega)$, $a \in \mathbb{R}$. Предположим, что для любого $b \in (a, \omega)$ функция f интегрируема на промежутке $[a, b]$. В этой ситуации

будем говорить, что рассматривается *несобственный интеграл* $\int_a^\omega f(x) dx$

от функции f . Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x) dx$, то гово-

рят, что *несобственный интеграл* $\int_a^\omega f(x) dx$ *сходится*, полагают

$$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x) dx \quad (10.1)$$

и значение (10.1) называют *несобственным интегралом от функции f по промежутку $[a, \omega)$* . Если несобственный интеграл не сходится, то говорят, что он *расходится*. Если, в частности, f имеет первообразную F , то равенство (10.1) можно записать так:

$$\int_a^{\omega} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \omega} F(b) - F(a). \quad (10.2)$$

Аналогично можно определить сходимость интеграла по промежутку $(\omega, b]$, в котором особой точкой является левый конец.

Если функция имеет несколько особых точек, то надо всю область интегрирования разбить на промежутки так, чтобы на каждом из них данная функция имела одну особую точку. Интеграл по всему множеству в таком случае понимается как сумма интегралов по отдельным промежуткам. В дальнейшем все теоретические вопросы будем относить к ситуации одной особой точки, обычно в правом конце промежутка.

Основной задачей при изучении несобственных интегралов будет установление их сходимости или расходимости. Поскольку сходимость несобственного интеграла означает существование конечного предела функции

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx \text{ при } b \rightarrow \omega,$$

для выяснения сходимости можно использовать результаты, относящиеся к пределу функции. Однако нередко трудно, а иногда в классе элементарных функций невозможно, найти функцию $F(b)$. Поэтому задачу исследования сходимости несобственного интеграла можно сформулировать так: *как, используя свойства подынтегральной функции, установить, будет данный несобственный интеграл сходиться или нет?* Поскольку надо делать заключение о сходимости несобственного интеграла, т. е. по существу о наличии предела первообразной, основываясь на свойствах совсем другого объекта — подынтегральной функции, будут сформулированы и использованы утверждения, называемые признаками сходимости и носящие достаточный характер — выполнение их условий гарантирует сходимость или расходимость данного интеграла (но вместе с тем сходимость не будет гарантировать выполнение условий того или иного признака).

Сначала сформулируем относящееся к общей теории предела необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла, правда, использующее не подынтегральную функцию, а интеграл от нее.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists b \in (a, \omega))(\forall b_1 \in [b, \omega))(\forall b_2 \in [b, \omega)) \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \leq \varepsilon. \quad (10.3)$$

Все признаки сходимости разбиваются на две группы по принципу наличия или отсутствия знакопостоянства подынтегральной функции вблизи особой точки. Первая группа признаков относится к тому случаю, когда функция f сохраняет знак в некоторой окрестности точки ω . Для определенности будем считать, что $f(x) \geq 0$ для x , близких к ω .

Признаки сравнения. Пусть функции f, h таковы, что $0 \leq h(x) \leq f(x)$ для x из некоторой окрестности точки ω . Тогда если интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится, то интеграл $\int_a^\omega h(x) dx$ также сходится, а если интеграл $\int_a^\omega h(x) dx$ расходится, то интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ тоже расходится.

В случае, если существуют такие ненулевые положительные постоянные C_1, C_2 , что $C_1 f(x) \leq h(x) \leq C_2 f(x)$ для x , близких к ω , сходимость интегралов $\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega h(x) dx$ одновременна, т. е. сходимость одного из них равносильна сходимости другого.

В частности, если существует ненулевой конечный предел $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{h(x)}$ или если $f(x) = g(x) + o(g(x))$, т. е. если $f(x) \sim g(x)$, то и в этом случае сходимость рассматриваемых интегралов одновременна.

К второй группе относятся признаки, в условиях которых нет требования знакопостоянства подынтегральной функции.

Признаки Абеля и Дирихле. Пусть подынтегральная функция представлена в виде произведения $\varphi(x)g(x)$, в котором функция $\varphi(x)$ монотонна вблизи точки ω . Тогда если выполнены условия одной из следующих групп:

(D1) $\lim_{x \rightarrow \omega} \varphi(x) = 0$;

(D2) функция $g(x)$ имеет ограниченную первообразную на $[a, \omega)$, т. е.

интегралы $\int_a^b g(x) dx$ ограничены при $b \in [a, \omega)$;

или

(A1) $\varphi(x)$ ограничена на $[a, \omega)$,

(A2) интеграл $\int_a^\omega g(x) dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int_a^\omega \varphi(x)g(x) dx$ сходится (в точке ω).

При выполнении условий (D1), (D2) утверждение называют *признаком Дирихле*, условий (A1), (A2) — *признаком Абеля*.

Говорят, что несобственный интеграл от функции f сходится в особой точке ω *абсолютно*, если сходится интеграл от ее модуля, т. е. интеграл $\int_a^\omega |f(x)| dx$. Если интеграл сходится абсолютно, то он и просто сходится, обратное неверно. Если интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно*.

ТЕХНОЛОГИИ

Использование признаков сравнения эффективно, если имеется набор функций, для которых известна сходимость или расходимость несобственных интегралов от них в данной особой точке. Наиболее широко используемым при сравнении является набор функций вида x^α , если $\omega = +\infty$, и функций вида $(\omega - x)^\alpha$, если $\omega \in \mathbb{R}$. А именно, интеграл $\int_a^{+\infty} x^\alpha dx$, где $a > 0$, сходится при $\alpha < -1$ и расходится при $\alpha \geq -1$.

Для конечной особой точки утверждение таково: интеграл $\int_a^\omega (\omega - x)^\alpha dx$, $a < \omega < +\infty$, сходится при $\alpha > -1$ и расходится при $\alpha \leq -1$. Те же

факты немного в другой форме можно выразить так: интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $0 < a < +\infty$, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$, а интеграл $\int_a^\omega \frac{dx}{(\omega - x)^p}$, $a < \omega < +\infty$, сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Исследование сходимости несобственного интеграла можно организовывать по следующей схеме.

1. Исследовать наличие особых точек и если их нет, то этот интеграл не является несобственным интегралом. Если есть, то добиться ситуации, в которой в рассматриваемом интеграле одна особая точка.

2. Ответить на вопрос: знакопостоянна ли подынтегральная функция в некоторой окрестности особой точки, и если да, то перейти к применению признаков сравнения, если нет, то обратиться к средствам исследования сходимости интегралов от знакопеременных функций.

3. Предположим, что подынтегральная функция положительна. Тогда надо либо в некоторой окрестности особой точки ограничить ее сверху или снизу функцией, сходимость или соответственно расходимость интеграла от которой известна, либо выделить главную часть подынтегральной функции в особой точке и сходимость интеграла от главной части дает полную информацию о сходимости исходного интеграла. Для выделения главной части эффективны разложения по формуле Тейлора в окрестности нуля.

4. Если подынтегральная функция не знакопостоянная вблизи особой точки, то в первую очередь надо изучить абсолютную сходимость интеграла, и в случае ее наличия сам интеграл также сходится. Абсолютная сходимость — это сходимость интеграла от знакопостоянной функции. Обычно в случае, например, бесконечной особой точки она связана со скоростью убывания подынтегральной функции на бесконечности. Если абсолютной сходимости нет, то надо использовать признак Дирихле или Абеля (чаще всего используют признак Дирихле). Для этого надо (α) представить подынтегральную функцию в виде произведения двух функций; (β) выделить монотонную составляющую в произведении; (γ) исследовать сходимость монотонной функции к нулю; (δ) если сходимость к нулю есть, то надо проверять второе условие в признаке Дирихле,

а именно ограниченность первообразной от второго сомножителя; (ε) если сходимости к нулю нет, то надо проверять второе условие в признаке Абеля, а именно сходимость несобственного интеграла от второго сомножителя. Если условия признака Дирихле или Абеля не выполнены, то признак не дал ответа на вопрос о сходимости интеграла.

Важно учитывать, что признаки Дирихле и Абеля, хоть и не предусматривают ограничений на знак функции вблизи особой точки, обычно недостаточно эффективны при исследовании интегралов от положительных функций. Для знакопеременных функций наиболее эффективно применение признаков к таким произведениям $\varphi(x)g(x)$ (на промежутке $[a, +\infty)$), где функция g имеет «ощутимые» промежутки сохранения знака. Если же длины таких промежутков стремятся к нулю, полезно заменой переменной интегрирования прийти к указанной ситуации.

Наконец, обратим внимание на то, что признаки Дирихле и Абеля дают только достаточные условия сходимости (в то время как некоторые варианты признака сравнения гарантируют равносильность сходимости интегралов).

5. В тех случаях, когда недостаточно ясно, как представить знакопеременную подынтегральную функцию в виде произведения двух функций, из которых одна монотонна, можно попробовать провести исследование сходимости на основе выделения главной части подынтегральной функции. При этом можно воспользоваться следующим утверждением. *Если подынтегральная функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + R(x)$, где интеграл от $R(x)$ абсолютно сходится, то интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ одновременно либо абсолютно сходятся, либо условно сходятся, либо расходятся.*

6. Расходимость несобственного интеграла от знакопостоянной функции достигается применением части признака сравнения, носящей характер критерия, т. е. где гарантируется равносильность сходимости или расходимости сравниваемых интегралов. Если функция знакопеременная, то в таком случае придется использовать критерий Коши.

ПРИМЕР 1. Исследуем сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$. Здесь две особые точки: 0 и $+\infty$. Изучим сходимость интеграла отдельно в

каждой из них, т. е. сходимость интегралов $\int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$ и $\int_0^a \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$, где a — некоторое строго положительное число. Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2,$$

имеем

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^\alpha}$$

при $x \rightarrow +\infty$ и сходимость на бесконечности интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$ равносильна сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, которая имеет место при $\alpha > 1$.

Далее, $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, поэтому

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

при $x \rightarrow 0$, и сходимость в нуле интеграла $\int_0^a \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$ равносильна сходимости интеграла $\int_0^a \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$, а последний сходится при $\alpha - 1 < 1$, т. е. при $\alpha < 2$. Итак, исходный интеграл сходится при $1 < \alpha < 2$.

ПРИМЕР 2. Изучим сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Здесь также две особые точки: 1 и $+\infty$. Фиксируем произвольно $a > 1$. Сначала рассмотрим интеграл $\int_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow 1} x^p = 1$, а $\ln x \sim x - 1$ при $x \rightarrow 1$, имеем

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x - 1)^q}$$

при $x \rightarrow 1$, значит, сходимость интеграла $\int_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ равносильна сходимости интеграла $\int_1^a \frac{dx}{(x-1)^q}$, который сходится при $q < 1$.

Обратимся к интегралу $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Соображения при исследовании его сходимости таковы. Поскольку на бесконечности логарифм растет медленнее степенной функции, основную роль в сходимости будет играть поведение функции $1/x^p$, так что ожидается сходимость при $p > 1$ независимо от q . Если же $p = 1$, то сходимость будет определяться значением q , а при $p < 1$ скорее всего будет расходимость снова при любом q .

Проведем подробное обоснование. Пусть $p > 1$. Возьмем какое-либо $\alpha \in (1, p)$ и покажем, что при достаточно далеких x выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^\alpha}.$$

Действительно, последнее равносильно такому:

$$\frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} < 1,$$

в котором $p - \alpha > 0$. Но, как известно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\gamma} = 0 \quad (10.4)$$

при любом β и любом $\gamma > 0$. В частности,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} = 0,$$

поэтому найдется такое $\Delta > 0$, что

$$\frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} < 1$$

для всех $x > \Delta$. Итак, для далеких x получили оценку

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 1$. Поскольку интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, то и интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \text{ сходится (при любом } q).$$

Пусть $p = 1$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \int_a^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^q x} = \int_{\ln a}^{+\infty} \frac{dy}{y^q},$$

так что интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x}$ сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leq 1$.

Пусть теперь $p < 1$. Возьмем какое-либо $\beta \in (p, 1)$ и докажем, что при далеких x будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^\beta} < \frac{1}{x^p \ln^q x}$$

Действительно, последнее неравенство равносильно такому: $\frac{\ln^{-q} x}{x^{\beta-p}} < 1$, которое выполняется для далеких x при $\beta - p > 0$, или $\beta > p$. Следовательно, если $p < 1$, то, взяв β так, что $p < \beta < 1$, можно ограничить снизу подынтегральную функцию $\frac{1}{x^p \ln^q x}$ функцией $\frac{1}{x^\beta}$, интеграл от которой на бесконечности расходится, тем самым и интеграл от исходной функции также расходится.

Соберем воедино полученные результаты. Исследуемый интеграл сходится в особой точке 1 при $q < 1$ и любом p , а на бесконечности сходится при $p > 1$ и любом q , а также при $p = 1$ и $q > 1$, и расходится при $p < 1$ и любом q . Окончательно, весь интеграл сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leq 1$.

ПРИМЕР 3. Исследуем абсолютную и условную сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx$, рассматривая $p \in \mathbb{R}$, $q > 0$. Иными словами, ответим на вопрос: при каких значениях p, q он сходится абсолютно, а при каких условно.

Начнем со сходимости самого интеграла, абсолютную сходимость изучим позже. Поскольку нет знакоопределенности подынтегральной функции, будем ориентироваться на признаки Абеля и Дирихле. Монотонная составляющая в подынтегральной функции очевидна — это функция x^p . Присмотревшись к множителю $\sin x^q$, можем заметить, что в случае $q \neq 1$ длины участков знакопостоянства этой функции при удалении x изменяются, и чтобы исключить негативное влияние этого эффекта, сделаем замену $x^q = y$, т. е. совершим подстановку $x = y^{1/q}$. Тогда сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла

$\int_1^{+\infty} y^{(p+1)/q-1} \sin y \, dy$. Обозначим $(p+1)/q - 1 = \alpha$ и изучим интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha \sin y \, dy$. Функция y^α монотонна, а $\sin y$ имеет ограниченную первообразную $-\cos y$, так что последний интеграл сходится, если $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^\alpha = 0$,

что будет при $\alpha < 0$. Итак, при $\frac{p+1}{q} - 1 < 0$, т. е. при $p+1 < q$, интеграл сходится.

Поскольку примененный здесь признак Дирихле не гарантирует расходимость при значениях $\alpha \geq 0$, требуется отдельно показать, что при таких α интеграл расходится. Для этого воспользуемся критерием Коши, согласно которому расходимость нашего интеграла на бесконечности равносильна тому, что

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall b \in [1, +\infty))(\exists b_1 \in [b, +\infty))(\exists b_2 \in [b, +\infty)) \left| \int_{b_1}^{b_2} y^\alpha \sin y \, dy \right| > \varepsilon.$$

Значит, надо суметь при любой удаленности находить такие промежутки $[b_1, b_2]$, интеграл на которых ощутимо большой. Ясно, что такими участками могут оказаться промежутки, на которых синус положителен, т. е. в качестве b_1, b_2 будем брать точки вида $2n\pi, (2n+1)\pi$. Тогда ввиду положительности α получим

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} y^\alpha \sin y \, dy \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin y \, dy = 2,$$

и в качестве требуемого $\varepsilon > 0$ можно взять любое меньшее двух число, например, $\varepsilon = 1$. Таким образом, взяв любое $b > 1$, подберем n так, чтобы $2n\pi > b$, и, взяв $b_1 = 2n\pi$, $b_2 = (2n + 1)\pi$, получим, что $\int_{b_1}^{b_2} y^\alpha \sin y \, dy >$

1, следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha \sin y \, dy$ при $\alpha \geq 0$ расходится. Итак, исходный интеграл сходится при $p + 1 < q$, при остальных значениях p, q он расходится.

Исследуем абсолютную сходимость, т. е. изучим сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} y^\alpha |\sin y| \, dy$. Поскольку $y^\alpha \geq y^\alpha |\sin y|$, наш интеграл сойдется при

$\alpha < -1$, т. е. исходный интеграл сойдется абсолютно при $\frac{p+1}{q} - 1 < -1$,

или $\frac{p+1}{q} < 0$. Пусть теперь $-1 \leq \alpha < 0$ (при $\alpha \geq 0$, как установлено выше, интеграл расходится, тем более он абсолютно расходится). Ориентируясь на применение признака сравнения, желательно было бы ограничить снизу функцию $y^\alpha |\sin y|$ функцией вида y^α . Однако этого сделать не удастся (нули синуса мешают), значит, придется для доказательства расходимости придумывать что-то отличное от непосредственного использования признака сравнения. Заметим, что имеет место очевидное неравенство $|\sin y| \geq \sin^2 y$. Воспользовавшись им, получим оценку снизу:

$$y^\alpha |\sin y| \geq y^\alpha \sin^2 y = y^\alpha \frac{1 - \cos 2y}{2} = \frac{1}{2}(y^\alpha - y^\alpha \cos 2y), \quad (10.5)$$

и займемся изучением сходимости интегралов от каждой из функции в правой части (10.5). При рассматриваемых $\alpha \in [-1, 0)$ интеграл

$$\int_1^{+\infty} y^\alpha \, dy$$

расходится, а интеграл

$$\int_1^{+\infty} y^\alpha \cos 2y \, dy$$

сходится согласно признаку Дирихле. В итоге интеграл

$$\int_1^{+\infty} (y^\alpha - y^\alpha \cos 2y) dy$$

расходится как разность расходящегося и сходящегося интегралов. Тем самым расходится и интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha |\sin y| dy$ ввиду оценки (10.6) и признака сравнения.

Подведем итог всем нашим исследованиям: интеграл $\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx$ сходится абсолютно при $\frac{p+1}{q} < 0$, условно при $0 \leq \frac{p+1}{q} \leq 1$ и расходится при $\frac{p+1}{q} > 1$.

ПРИМЕР 4. Исследуем абсолютную и условную сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx.$$

Преобразуем подынтегральную функцию, воспользовавшись разложением по формуле Тейлора функции $\frac{1}{1-t}$ по степеням t до такого порядка, чтобы получить достаточно быстро сходящуюся к нулю составляющую (здесь в качестве t будет выступать величина $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \rightarrow +\infty$):

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

За счет достаточно быстрой сходимости к нулю функция $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ абсолютно интегрируема на бесконечности (по признаку сравнения), так что

сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} \right) dx.$$

Этот интеграл расходится, поскольку интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

сходится по признаку Дирихле, а интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

расходится (см. пример 3). В итоге получили расходимость исходного интеграла.

ПРАКТИКА

1. Исследовать сходимость интегралов:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}, \quad (2) \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}, \quad (3) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}, \quad (4) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)},$$

$$(5) \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad (6) \int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx, \quad (7) \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx, \quad n \geq 0,$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx, \quad (9) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}, \quad (10) \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$(11) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}, \quad (12) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx,$$

$$(13) \int_0^{+\infty} (e^{-1/x^2} - e^{-4/x^2}) dx, \quad (14) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

2. Исследовать абсолютную и условную сходимости следующих интегралов:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, & (2) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+10} dx, & (3) \quad & \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \\
 (4) \quad & \int_0^{+\infty} x \cos x^4 dx, & (5) \quad & \int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx, & (6) \quad & \int_0^{+\infty} \sin^3(x^2 + 2x) dx, \\
 (7) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx, \quad q \geq 0, & (8) \quad & \int_2^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{x^\alpha \ln x} dx, \\
 (9) \quad & \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}, & (10) \quad & \int_1^{+\infty} (1 - e^{(\sin x)/x}) \sqrt{x} dx, \\
 (11) \quad & \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}} dx, & (12) \quad & \int_2^{+\infty} \sqrt{x} \ln\left(1 - \frac{\sin x^2}{x-1}\right) dx.
 \end{aligned}$$

Ответы. 1. (1) Сходится; (2) расходится; (3) сходится; (4) расходится; (5) сходится при $p > 0$; (6) сходится, если $p > -1$ и $q > -1$; (7) сходится, если $m > -1$, $n - m > 1$; (8) сходится при $1 < n < 2$; (9) сходится, если $p < 1$, $q < 1$; (10) сходится при $n > -1$; (11) сходится, если $\min(p, q) < 1$, $\max(p, q) > 1$; (12) сходится; (13) сходится; (14) сходится.

2. (1) Сходится условно; (2) сходится условно; (3) сходится условно; (4) сходится условно; (5) сходится условно; (6) сходится условно; (7) сходится абсолютно, если $p > -2$, $q > p + 1$; сходится условно, если $p > -2$, $p < q \leq p + 1$; (8) сходится абсолютно при $\alpha > 1$; условно при $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$; (9) сходится условно; (10) сходится условно; (11) сходится условно; (12) сходится условно.