

§ 11. Числовые ряды

ТЕОРИЯ

Пусть дана числовая последовательность x_n . Если эту последовательность рассматривают с точки зрения нахождения «суммы» всех ее членов, то говорят, что рассматривают *числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, а члены последовательности x_n называют при этом *общим членом* данного ряда.

Суммы $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ называют *частичными суммами ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ последовательности частичных сумм, его называют *суммой данного ряда* и обозначают, как и ряд, символом $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. О самом ряде говорят при этом, что он *сходится*. Если ряд не сходится, то его называют *расходящимся*.

Ситуация с рядами аналогична ситуации с несобственными интегралами и заключается в том, что по информации об одном объекте (общем члене ряда, т. е. элементах исходной последовательности) требуется получить информацию о другом объекте (последовательности частичных сумм). По этой причине, как и для несобственных интегралов, формулируются признаки, т. е. достаточные условия, сходимости числовых рядов. Однако для рядов ввиду специфики последовательности как функции, заданной на дискретном множестве, появляется необходимый признак сходимости, который хотя и не позволяет установить факта сходимости, но может быть полезен для доказательства расходимости ряда. В остальном просматривается аналогия с несобственными интегралами по неограниченному промежутку.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.

Важно помнить, что обратное неверно.

Критерий Коши сходимости ряда. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

необходимо и достаточно следующее свойство:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0 \forall p \geq 0) \left| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right| \leq \varepsilon. \quad (11.1)$$

Напомним формулировки признаков сходимости знакопостоянных рядов.

Признак сравнения. Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ с положительными членами. Предположим, что $x_n \leq y_n$ по крайней мере для всех далеких номеров n . Тогда если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ также сходится, а если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ расходится.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = K$ и $0 < K < \infty$, то сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Так будет, в частности, если $x_n \sim y_n$, т. е. если $x_n = y_n + o(y_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

На сравнении с геометрической прогрессией (быстро сходящимся рядом) основаны признаки Даламбера и Коши.

Признак Даламбера. Предположим, что $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = d$. Тогда если $d < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, если $d > 1$, то расходится, если же $d = 1$, то признак не дает информации о сходимости ряда.

Признак Коши. Предположим, что $x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = c$. Тогда если $c < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, если $c > 1$, то расходится, если же $c = 1$, то признак не дает информации о сходимости ряда.

Более тонкими являются признаки, основанные на сравнении с рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \quad (11.2)$$

Напомним, что ряд (11.2) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Тем самым если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ мы нашли, что $x_n = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, то при $\alpha > 1$ наш ряд сойдется, а при $\alpha \leq 1$ разойдется.

Признак Раабе. Предположим, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$, существует предел

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right).$$

Тогда если $p > 1$, то исходный ряд сходится, если $p < 1$, то расходится, если же $p = 1$, то признак не дает информации о сходимости ряда.

Признак Гаусса. Если $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\gamma}},$$

где $|\gamma_n| < c$, $\gamma > 0$, то

(а) при $\alpha > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, при $\alpha < 1$ расходится;

(б) при $\alpha = 1$ данный ряд сходится в случае, если $\beta > 1$, и расходится в случае, если $\beta \leq 1$.

Для исследования сходимости рядов, у которых общий член может быть знакопеременным, применяют признаки Дирихле, Абеля или частный случай признака Дирихле — признак Лейбница. Кроме исследования простой сходимости, знакопеременные ряды исследуют также на абсолютную сходимость. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ называют *абсолютно сходящимся*,

если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

В том случае, когда ряд сходится, но не абсолютно, его называют *условно сходящимся*. Для исследования абсолютной сходимости применяют признаки, приспособленные для изучения сходимости знакопостоянных рядов. Расходимость ряда иногда можно установить с помощью критерия Коши.

Признаки Абеля и Дирихле. Рассмотрим числовые последовательности a_n , b_n и предположим, что последовательность a_n монотонна.

Допустим, что выполнены условия какого-либо из следующих пунктов:

(α) имеет место сходимость $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а частичные суммы $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ряда, составленного из b_n , ограничены, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq C$$

при всех $n \in \mathbb{N}$;

(β) последовательность a_n ограничена, т. е. существует такая постоянная $K > 0$, что $|a_n| \leq K$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

При выполнении условия (α) говорят о *признаке Дирихле*, а условия (β) — о *признаке Абеля*.

Признак Лейбница. Если x_n — монотонная сходящаяся к нулю последовательность, то *знакопередающий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

сходится.

ТЕХНОЛОГИИ

Опишем шаги, сопровождающие изучение сходимости ряда.

1. Изучаем, если это не представляет серьезных трудностей, сходится ли к нулю общий член данного ряда, и если нет, то ряд расходится, если да, то продолжаем исследование ряда.

2. Констатируем, знакопостоянен ли общий член ряда, и если да, то обращаемся к признакам сравнения или основанным на них признакам Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса или изучаем асимптотику общего члена ряда с целью возможного сравнения с общим членом сходящегося

ряда. Если общий член ряда меняет знак, то смотрим на возможность применения к нему признаков Дирихле и Абеля.

3. Для знакопостоянного ряда исследование сходимости можно начать с подготовки использования признаков Даламбера или Коши, если устройство общего члена позволяет без особого труда составить соответствующие выражения. Если это затруднительно или если признаки не дали информации о сходимости, то можно провести подготовку к использованию признака Раабе или Гаусса. Если в общем члене ряда нет параметра, то любой из этих признаков может дать полную картину сходимости. Если же есть параметр, то лучше сразу подготовиться к признаку Гаусса — он позволяет без дополнительных средств установить весь набор значений параметра, при которых есть сходимость. Достаточно универсальное средство — нахождение асимптотики общего члена ряда, т. е. выделение его главной части в виде $\frac{1}{n^\alpha}$, и использование сходимости рядов с таким общим членом.

4. Для знакопеременного ряда в первую очередь надо изучить, достаточно ли быстро его общий член сходится к нулю для обеспечения абсолютной сходимости, и если да, то исследование закончено. Если нет, то готовимся к применению признака Дирихле или Абеля: (α) представляем общий член ряда в виде произведения двух последовательностей, одна из которых монотонна; (β) изучаем, будет ли монотонная составляющая сходиться к нулю, и если да, то используем признак Дирихле, если нет, то признак Абеля; (γ) при использовании признака Дирихле исследуем ограниченность последовательности частичных сумм второго сомножителя, при использовании признака Абеля изучаем сходимость ряда, составленного из элементов второго сомножителя; (δ) при необходимости обосновывать расходимость ряда привлекаем критерий Коши.

ПРИМЕР 1. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}, \quad (11.3)$$

воспользовавшись разными признаками и проследив, как эти признаки применяются и срабатывают.

Начнем с необходимого признака. Поскольку здесь неочевидно, сходится ли к нулю общий член ряда, можно отказаться от применения необходимого признака и перейти к применению других признаков.

Обратимся к признаку Даламбера. Для этого составим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}n^{n+p}}{(n+1)^{n+1+p}n!e^n} = \frac{en^{n+p}}{(n+1)^{n+p}} = \frac{e}{(1+1/n)^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

так что признак Даламбера информации о сходимости не дает.

Прибегнем к признаку Раабе. Составим

$$\begin{aligned} p_n &= n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} - 1 \right) \\ &= n \left(e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1 \right) \end{aligned}$$

полагаем $x = 1/n$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x} (e^{-1} (1+x)^{1/x} (1+x)^p - 1) = \frac{1}{x} (e^{-1} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} (1+x)^p - 1) \\ &= \frac{1}{x} (e^{-1} e^{\frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x}} (1+px+o(x)) - 1) \\ &= \frac{1}{x} (e^{-\frac{x}{2}+o(x)} (1+px+o(x)) - 1) \\ &= \frac{1}{x} \left(\left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) (1+px+o(x)) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 + \left(p - \frac{1}{2} \right) x + o(x) - 1 \right) = p - \frac{1}{2} + o(1), \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p - \frac{1}{2},$$

так что исходный ряд сходится при $p - \frac{1}{2} > 1$, т. е. при $p > \frac{3}{2}$, и расходится при $p < \frac{3}{2}$. Для значения $p = \frac{3}{2}$ признак Раабе информации о сходимости не дает.

Исследуем теперь сходимость этого ряда, используя асимптотику его общего члена. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Имеем

$$\frac{n!e^n}{n^{n+p}} = \frac{(2\pi)^{1/2} n^{1/2} n^n e^n}{e^n n^{n+p}} e^{-\frac{\theta}{12n}} = \sqrt{2\pi} \frac{e^{-\frac{\theta}{12n}}}{n^{p-1/2}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-1/2}},$$

так что исходный ряд, как и ряд с общим членом $\frac{1}{n^{p-1/2}}$, сходится при $p > \frac{3}{2}$ и расходится при $p \leq \frac{3}{2}$.

Мы получили исчерпывающую информацию о тех p , при которых ряд сходится, правда, при этом нам пришлось воспользоваться асимптотической формулой для $n!$.

Попробуем применить к исследованию сходимости признак Гаусса. Для этого составим отношение $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ и при анализе его асимптотики воспользуемся промежуточными выкладками, проделанными при использовании признака Раабе. Делая, как и выше, замену $x = \frac{1}{n}$, проведем вычисления:

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} \\ &= e^{-1} e^{x-x^2/2+x^3/3+o(x^3)} \left(1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2) \right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \left(1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2) \right) \\ &= 1 + \left(p - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2},\end{aligned}$$

где в коэффициент γ_n вошло всё, что собралось при дроби $\frac{1}{n^2}$ в процессе приведения подобных членов. По признаку Гаусса ряд сходится, если $p - \frac{1}{2} > 1$, и расходится, если $p - \frac{1}{2} \leq 1$.

ПРИМЕР 2. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}.$$

Ясно, что предел его общего члена равен нулю, так что начнем применение какого-либо признака. Величина показателя степени подсказывает, что для начала стоит обратиться к признаку Коши. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1 - \frac{a^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^3}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2(-\frac{a^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1\end{aligned}$$

при любом $a \neq 0$, так что ряд сходится при любом $a \neq 0$.

ПРИМЕР 3. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+k/\ln n}}.$$

Ясно, что предел общего члена этого ряда равен нулю. Исследуем асимптотику общего члена:

$$\frac{1}{n^{1+k/\ln n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+k/\ln n} = e^{(1+\frac{k}{\ln n}) \ln \frac{1}{n}} = e^{\ln \frac{1}{n} - k} = e^{-k} \cdot \frac{1}{n},$$

и ряд расходится, каково бы ни было k

ПРИМЕР 4. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Заметим, что если $x = k\pi$, то $\sin x = 0$, и наш ряд нулевой, так что сходится, даже абсолютно. Будем рассматривать $x \neq k\pi$.

Если бы общий член ряда сходил к нулю достаточно быстро, можно было бы, воспользовавшись признаком сравнения, доказать абсолютную сходимость и тем самым сходимость данного ряда. Однако здесь общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что признак сравнения не сработает. Поэтому обратимся к признакам, приспособленным для исследования сходимости знакопеременных рядов.

Сначала выделим монотонную составляющую. Это, конечно, последовательность $\frac{1}{n}$. Отметим, что она сходится к нулю, тем самым ориентируемся на применение признака Дирихле. Согласно этому признаку остается доказать ограниченность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx$. Найдём сумму S_n . Умножив равенство

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

на $2 \sin \frac{x}{2}$ и воспользовавшись формулой для произведения синусов, по-

лучим

$$\begin{aligned}
 2S_n \sin \frac{x}{2} &= 2 \left(\sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + \dots + \sin nx \cdot \sin \frac{x}{2} \right) \\
 &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \dots \\
 &\quad \dots + \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \\
 &= \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x = 2 \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2},
 \end{aligned}$$

откуда

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Значит, $|S_n| \leq \frac{1}{\sin x/2}$. Итак, суммы S_n ограничены, а следовательно, по признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится при любом x .

Обратимся к изучению абсолютной сходимости, т. е. рассмотрим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}.$$

Ввиду медленной сходимости к нулю общего члена этого ряда ограничить его сверху общим членом сходящегося ряда не удастся. Поэтому попробуем обосновать гипотезу о его расходимости. Здесь можно воспользоваться критерием Коши. Однако проще применить искусственный прием. Ясно, что $|\sin nx| \geq \sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$, поэтому

$$\frac{|\sin nx|}{n} \geq \frac{1}{2n}(1 - \cos 2nx) = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ сходится (по признаку Дирихле). Тем самым ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n} \right)$ расходится как разность расходящегося и сходящегося рядов. Общий член исследуемого ряда оказал-

ся ограниченным снизу общим членом расходящегося ряда, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ расходится.

ПРИМЕР 5. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

Как и при изучении сходимости несобственных интегралов, обратимся к асимптотике общего члена ряда. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Тогда $1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$, откуда

$$(-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \frac{\pi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{2n}$$

сходится по признаку Дирихле, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$$

сходится абсолютно по признаку сравнения, значит, исходный ряд сходится.

ПРАКТИКА

1. Исследовать сходимость следующих рядов:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \\ (3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}, & (4) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}, \\ (5) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}, & (6) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}, & (8) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^p, \\
(9) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}, & (10) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}, \\
(11) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}, & (12) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}, \\
(13) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right), & (14) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, \\
(15) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2} \right), \quad a, b, c > 0, & (16) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}, \\
(17) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^{\alpha}} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^{\alpha}} \right) \right), & (18) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right), \\
(19) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1) \dots (q+n)}, \quad q > 0, \\
(20) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)}, \quad a > 0.
\end{aligned}$$

2. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих рядов:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(2n + \frac{\pi}{4} \right)}{n^{\sqrt[3]{n} + 2}}, & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}}, \\
(3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}, & (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}, \\
(5) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}, & (6) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n}, \\
(7) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1/n}}, & (8) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + (-1)^n)^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \sin \frac{1}{n}, \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 1}},$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}, & (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 \frac{n}{2}}{\sqrt[5]{n+1}}, \\
(5) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n}, & (6) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} \right), \\
(7) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}), & (8) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\ln \ln(n+1)}.
\end{aligned}$$

Ответы. 1. (1) Сходится абсолютно, (2) сходится абсолютно, (3) сходится условно, (4) сходится условно, (5) сходится условно, (6) расходится, (7) сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $0 < \alpha \leq 1$, (8) сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $0 < \alpha \leq 1$.

2. (1) сходится, (2) расходится, (3) сходится, (4) сходится, (5) расходится, (6) сходится, (7) сходится, (8) сходится.