§ 12. Конечномерные арифметические пространства и их отображения

ТЕОРИЯ

До сих пор мы изучали отображения, заданные на части множества вещественных чисел и действующие в это же множество, т. е. числовые функции одной переменной. Но мир более чем одномерен, поэтому естественно для его моделирования требуются функции по крайней мере трех переменных, возможно, действующие более чем в одномерное пространство. В принципе, можно во многих вопросах ограничиваться размерностями не выше трех, однако есть потребность и в более высоких размерностях, а их изучение дополнительных трудностей не вызывает, ибо в любом случае придется рассматривать понятия достаточно абстрактные, пригодные не только в конечномерных, но и в бесконечномерных пространствах.

Вспомним, что в $\mathbb{R}$ рассматривались три взаимосвязанные структуры: алгебраическая (операции суммы и умножения), топологическая (окрестности точек и сходимость) и порядковая (сравнение чисел). Две из этих структур, а именно алгебраическая и топологическая, переносятся на достаточно общие объекты и успешно применяются в конечномерных пространствах. С порядковой структурой дело обстоит несколько иначе, она также может быть введена в конечномерном пространстве, однако линейности порядка, т. е. возможности сравнения любых двух элементов, уже нет, и по этой причине порядок там исследуется только в рамках специальных курсов. Специфической для математического анализа является топологическая структура, и именно на ней мы акцентируем внимание. Естественность порождающих топологическую структуру понятий позволяет рассматривать их сразу в общем случае, не опираясь на конечномерность.

12.1. Метрические пространства и их отображения. Пусть X — произвольное множество. Функцию $\rho(x, y)$, определенную на произведении $X \times X$ и действующую в $\mathbb{R}$, называют *метрикой на* X, если выполнены условия:

1) $\rho(x, y) \geq 0$ для любых $x, y \in X$ и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$ (симметричность);

3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ для любых $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Значение $\rho(x,y)$ называют *расстоянием между x и y* или *от x до y*.

Множество X с заданной на нем метрикой ρ, т. е. упорядоченную пару (X,ρ), называют *метрическим пространством.* Обычно если ясно, о какой метрике идет речь, ее указание опускают и говорят просто о метрическом пространстве X. Элементы метрического пространства называют часто его *точками.*

Для заданных $x \in X$ и числа $r > 0$ множество $B(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ называют *открытым шаром*, а $B_c(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) \le r\}$ — *замкнутым шаром радиусом r* (или *радиуса r*) с центром в x. Множество U называют *окрестностью точки x*, если существует такое $r > 0$, что $B(x,r) \subset U$.

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и $A \subset X$. Точку $x \in X$ называют:

— *внутренней точкой множества A*, если существует окрестность точки x, содержащаяся в A;

— *предельной точкой множества A*, если в любой окрестности точки x есть хотя бы одна точка множества A, отличная от x;

— *точкой прикосновения множества A*, если в любой окрестности точки x есть хотя бы одна точка множества A;

— *граничной точкой множества A*, если в любой окрестности точки x есть как точки множества A, так и точки дополнения $X \setminus A$ множества A.

— *внешней точкой множества A*, если она внутренняя точка дополнения $X \setminus A$ множества A.

Множество всех внутренних точек множества A называют его *внутренностью* и обозначают одним из символов A° или $\operatorname{int} A$.

Множество всех точек прикосновения множества A называют его *замыканием* и обозначают одним из символов $\overline{A}$ или $\operatorname{cl} A$.

Множество всех граничных точек множества A называют его *границей* и обозначают символом ∂A.

11.3. Множество A в метрическом пространстве X называют *открытым*, если оно совпадает со своей внутренностью, и *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием. Напомним, что множество замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда его дополнение открыто (замкнуто).

Пусть $A \subset X$. Семейство A_ξ, $\xi \in \Xi$, называют *покрытием множества* A, если $A \subset \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$ (напомним, что семейство множеств — это совокупность «множеств с индексами», а точнее — отображение $\xi \mapsto A_\xi$ некоторого множества Ξ в множество всех подмножеств данного множества). Покрытие называют *открытым*, если все составляющие его множества A_ξ открыты.

Множество $A \subset X$ называют *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т. е. для любого покрытия A_ξ, $\xi \in \Xi$, множества A открытыми множествами существует такое конечное подмножество $\Xi_0 \subset \Xi$ множества индексов Ξ, что $A \subset \bigcup\limits_{\xi \in \Xi_0} A_\xi$.

Напомним, что каждое компактное множество в X замкнуто и ограничено. Последнее означает, что *диаметр*

$$d(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$$

множества A конечен.

11.4. Отображение множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел в метрическое пространство X называют *последовательностью* точек пространства X и для обозначения последовательности используют символ типа x_n, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность x_n называют *сходящейся к точке* $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_0$ имеет место неравенство $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Если x_n сходится к x, то точку x называют *пределом последовательности* x_n и используют при этом обозначение $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Ясно, что сходимость x_n к x равносильна тому, что для любой окрестности U точки x найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_0$ имеет место включение $x_n \in U$.

В терминах сходящихся последовательностей можно сформулировать следующие полезные критерии замкнутости и компактности множества в метрическом пространстве.

Утверждение 1. *Множество A в метрическом пространстве X замкнуто тогда и только тогда, когда предел любой сходящейся последовательности элементов множества A принадлежит этому множеству.*

Утверждение 2. *Множество A в метрическом пространстве X компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества A.*

Пусть (X, ρ) и (Y, σ) — метрические пространства и f — отображение, действующее из X в Y. Пусть a — предельная точка области определения $D(f)$ отображения f. Элемент $b \in Y$ называют *пределом отображения f в точке a*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $\rho(x, a) < \delta$ и $x \neq a$, выполнено неравенство $\sigma(f(x), b) < \varepsilon$, и для предела используют обозначение $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Запишем это же свойство в терминах шаров и включений множеств: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $f[B(a, \delta) \setminus \{a\}] \subset B(b, \varepsilon)$. Ясно, что здесь вместо шаров можно использовать произвольные окрестности точек a и b с соответствующей переформулировкой.

Отображение f из X в Y называют *непрерывным в точке $a \in D(f)$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $f[B(a, \delta)] \subset B(b, \varepsilon)$. Ясно, что если a — предельная точка области определения отображения f, то непрерывность f в точке a равносильна существованию предела f в точке a и выполнению равенства $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Отображение f, сужение которого на множество $X \subset D(f)$ непрерывно в каждой точке множества X, называют *непрерывным на множестве X*.

Утверждение (теорема о пределе композиции). *Пусть даны метрические пространства X, Y, Z и отображения $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ такие, что определена композиция $f \circ g : X \to Z$, область определения которой имеет предельную точку x_0, а точка $y_0 = g(x_0)$ при этом является предельной точкой $D(f)$. Если отображение g непрерывно в точке x_0 и существует предел A отображения f в точке y_0, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, также равный A.*

Если в множестве X задана структура векторного пространства, т. е. определены операции суммы и умножения на скаляр с соответствующими свойствами, то метрика на нем чаще всего определяется посредством нормы.

Отображение $p(x)$, действующее из векторного пространства X над полем вещественных чисел в $\mathbb{R}$, называют *нормой на X*, а само X называют при этом *нормированным пространством*, если выполнены следующие условия:

1) $p(x) \geq 0$ для любого $x \in X$ и равенство $p(x) = 0$ равносильно тому, что $x = 0$;

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для любых $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (положительная однородность):

3) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ для любых $x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Обычно для обозначения нормы элемента $x \in X$ используют обозначение $\|x\|$, помещая справа нижний индекс в том случае, если на одном и том же векторном пространстве рассматриваются разные нормы.

Если X — нормированное пространство, то на нем посредством нормы определяется метрика ρ равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Одним из самых простых нормированных пространств является векторное пространство $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех вещественных функций, определенных на конечном множестве $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Его называют *$n$-мерным арифметическим пространством.* Элементы $x \in \mathbb{R}^n$ обозначают обычно символом $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где индекс — это аргумент отображения, а $x_1, \ldots, x_n$ — его значения, так что в данном случае отображение задается указанием всех его значений. На $\mathbb{R}^n$ рассматривают одну из следующих норм:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

называя первую из них *евклидовой*, а последнюю *равномерной.* Если никакого индекса у нормы не поставлено, имеется в виду евклидова норма.

Две нормы $p(x)$ и $q(x)$ на векторном пространстве X называют *эквивалентными*, если существуют такие положительные вещественные числа C_1, C_2, что $p(x) \le C_1 q(x)$, $q(x) \le C_2 p(x)$. Если нормы p, q эквивалентны, то сходимость по одной из них равносильна сходимости по другой. Известно, что *в пространстве $\mathbb{R}^n$ любые две нормы эквивалентны.*

ТЕХНОЛОГИИ

Можно заметить, что начало данного раздела сопровождается обилием новых понятий, поэтому в первую очередь надо их усвоить, т. е. научиться ими пользоваться. Для этого предлагаются достаточно несложные теоретические задачи, а для теоретических задач разработать столь же подробные и действенные технологии, как для задач вычислительных, трудно, если вообще возможно. Поэтому отметим лишь общие соображения, связанные с решением несложных теоретических задач, предназначенных для усвоения терминов.

(1) Обычно в задаче используются какие-то из терминов, и в первую очередь надо их расшифровать, т. е. ответить на вопрос «что это значит?». Ответ позволяет перейти на другой уровень терминологии, более низкий, расположенный ближе к теоретико-множественным понятиям, с которыми мы уже знакомы. Это относится как к терминам из условия задачи (предположений), так и из результата (требуемого). Переход на более низкий уровень может позволить обнаружить связь между данными и требуемым.

(2) Там, где это возможно и уместно, полезно использовать интуитивные геометрические образы, связанные с интерпретациями теоретико-множественных операций, графиками и т. п. Они помогают понять, на чем может быть основано решение, как перейти от данных к требуемому и т. д.

(3) Полезно позадавать одношаговые вопросы типа «что можно вывести из данных (за один шаг)?» и «откуда можно получить требуемое (за один шаг)?». Ответы на них предполагают знакомство с основными понятиями и стимулируют усвоение теоретического материала.

ПРАКТИКА

1. Верно ли утверждение: «внутренность пересечения двух множеств равна пересечению их внутренностей»? Верно ли аналогичное утверждение для бесконечной совокупности множеств?

2. Верно ли утверждение: «внутренность объединения двух множеств равна объединению их внутренностей»? Если нет, то имеется ли включение в какую-либо сторону?

3. Доказать, что граница объединения двух множеств содержится в объединении их границ. Показать на примере, что аналогичное утверждение для бесконечной совокупности множеств не всегда верно.

4. Доказать, что граница каждого множества замкнута.

5. Пусть f — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция и $\alpha \in \mathbb{R}$. Доказать, что множество $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$ замкнуто, а множество $G_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ открыто.

6. Доказать, что замыкание множества A совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих A.

7. Доказать, что внутренность множества A совпадает с объединением всех открытых множеств, содержащихся в A.

8. Для точки $x \in X$ и множества $A \subset X$ число

$$d(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$$

называют *расстоянием от точки x до множества A*, а для множеств $A, B \subset X$ число $d(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$ — *расстоянием между множествами A и B*.

Верно ли, что для любой точки $x \in X$ и любого множества $A \subset X$ выполнены равенства

$$d(x, A) = d(x, \overline{A}), \quad d(x, A) = d(x, A^\circ)?$$

9. Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y и F — произвольное замкнутое множество в Y, а G — произвольное открытое множество в Y. Доказать, что прообраз $f^{-1}[F]$ — замкнутое, а $f^{-1}[G]$ — открытое множество в X.

10. Показать, что образ замкнутого (открытого) множества при непрерывном отображении может не быть замкнутым (открытым) множеством.

11. Доказать, что образ компактного множества при непрерывном отображении будет компактным множеством.

12. Может ли прообраз компактного множества при непрерывном отображении быть неограниченным?

13. Пусть x_0 — фиксированная точка в метрическом пространстве X. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x, x_0)$ непрерывна на X.

14. Пусть $E \subset X$ — фиксированное непустое подмножество в метрическом пространстве X. Доказать, что функция $f(x) = d(x, E)$ непрерывна на X.

15. Пусть E — компактное множество в X и x_0 — фиксированная точка в X. Доказать, что существует такая точка $x_1 \in E$, что $\rho(x_0, x_1) = d(x_0, E)$, иначе говоря, расстояние от точки до компактного множества достигается в некоторой точке этого множества.

16. Пусть E, F — компактные множества в метрическом пространстве X. Доказать, что существуют такие точки $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, что

$\rho(x_0, y_0) = \delta(E, F)$, т. е. расстояние между компактными множествами достигается в точках этих множеств. Показать, что требование компактности существенно.

12.2. Особенности $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Интерпретации.

ТЕОРИЯ

При обсуждении и предварительном анализе вопросов, связанных с отображениями конечномерных арифметических пространств для малых размерностей $n = 2$ и $n = 3$, полезно обращаться к их геометрической интерпретации. Напомним относящиеся к такой интерпретации средства.

Если $n = 2$, то для обозначения аргументов вместо (x_1, x_2) обычно используют (x, y), а при $n = 3$ вместо (x_1, x_2, x_3) пишут (x, y, z). При $n = 2$ одним из распространенных средств визуализации является *график функции* $f(x, y)$, т. е. множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f),\ z = f(x, y)\}.$$

Кроме графика для наблюдения функции двух переменных можно использовать такой прием: фиксировать одну из переменных и рассматривать график этой функции как функции от второй переменной. Построив такие графики при разных фиксированных значениях первой переменной, можно представить себе поведение функции двух переменных. При этом способе мы как бы рассекаем поверхность, являющуюся графиком функции, вертикальными плоскостями, параллельными одной из первых двух координатных линий в пространстве, и смотрим, что происходит в сечении. В частности, полезно просмотреть, что будет при пересечении графика вертикальными координатными плоскостями, т. е. плоскостями $x = 0$ и $y = 0$.

Информацию о строении функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ могут дать множества ее постоянства, называемые *множествами уровня*, т. е. множества $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = C\}$, где C — константа. Для функции $f(x, y)$ двух переменных такие множества называют *линиями уровня*, а для функции $f(x, y, z)$ трех переменных — *поверхностями уровня*. Линии уровня, изображенные в $\mathbb{R}^3$ на соответствующей высоте, дают разрезы графика горизонтальными плоскостями.

Иногда полезно посмотреть поведение функции вдоль каких-либо линий, лежащих в области ее определения, например, вдоль прямых или окружностей.

Наличие многих переменных позволяет переходить к пределу «поочередно», т. е. можно считать переменной одну из координат, другие оставив постоянными, перейти по ней к пределу, получив тем самым функцию, число переменных у которой на единицу меньше, затем поступить так же с полученной функцией и продолжить до конца. Получаем в результате так называемые повторные пределы. Рассмотрим их подробнее для функции двух переменных.

Пусть дана функция $f(x, y)$, и пусть (a, b) — предельная точка области ее определения. Фиксировав y, перейдем к пределу по x при $x \to a$, предполагая, естественно, что таковой существует при каждом y из некоторой окрестности точки b. В результате получаем функцию $g(y) = \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$. Если существует ее предел в точке b, его называют *повторным пределом функции f при $x \to a$, $y \to b$* и обозначают символом $\lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$. Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b} f(x, y)$. Предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$ функции f как функции двух переменных в точке (a, b), т. е. предел функции f как отображения из $\mathbb{R}^2$, снабженного какой-либо нормой, в $\mathbb{R}$, в отличие от повторного, называют *двойным.* Известно, что *если существует двойной предел и внутренний предел в повторном, то существует и повторный предел, равный двойному.* Повторные пределы, как и двойной, помогают изучать функции двух переменных. Однако надо остерегаться неосмотрительных заключений о связи двойного и повторных пределов.

ТЕХНОЛОГИИ

Механизмы использования различных интерпретаций заложены в их содержании. Эскизы графиков нередко выполнять затруднительно, но это и не особенно требуется. Правда, при изучении тройных интегралов графики могут оказать определенную помощь в расстановке пределов интегрирования. Удобно использовать линии уровня, ибо для этого надо изображать множества точек на плоскости. Для несложных функций трех переменных можно обращаться к поверхностям уровня, если они относятся к классам поверхностей, изображение которых известно. В случае острой необходимости визуализации можно обратиться к компьютерным ресурсам.

По поводу повторных и двойных пределов можно отметить, что их нахождение не является сколько-нибудь популярной задачей, ибо для повторных пределов это последовательное нахождение предела функции одной переменной, а для двойных, в отличие от предела функций одной переменной, нет такого развитого аппарата для нахождения предела. Поэтому приходится ограничиваться теоремами общего плана — о связи предела с алгебраическими операциями, о пределе композиции, о мажорировании. Обратим внимание на то, что для доказательства отсутствия двойного предела удобно пользоваться теоремой о пределе композиции. А именно, если нам надо доказать отсутствие предела отображения $f(x, y)$ в точке (a, b), достаточно предложить два отображения, например $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$, $t \mapsto (x_2(t), y_2(t))$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$, таких, что $a = x_1(t_0) = x_2(t_0)$, $b = y_1(t_0) = y_2(t_0)$, непрерывных в точке t_0, и для которых пределы $\lim\limits_{t\to t_0} f(x_1(t), y_1(t))$, $\lim\limits_{t\to t_0} f(x_2(t), y_2(t))$ различны. Теорема о пределе композиции гарантирует отсутствие предела в точке (a, b). Образно говоря, если при прохождении через точку (a, b) по двум непрерывным кривым мы получим разные значения пределов функции вдоль этих кривых, то двойного предела функции в данной точке нет.

11.9. Пример. Рассмотрим функцию $z = x^2 - y^2$ и обсудим, что получится при различных способах ее изображения.

Во-первых, ее график — это известная «седловая» поверхность (гиперболический параболоид) (рис. 1).

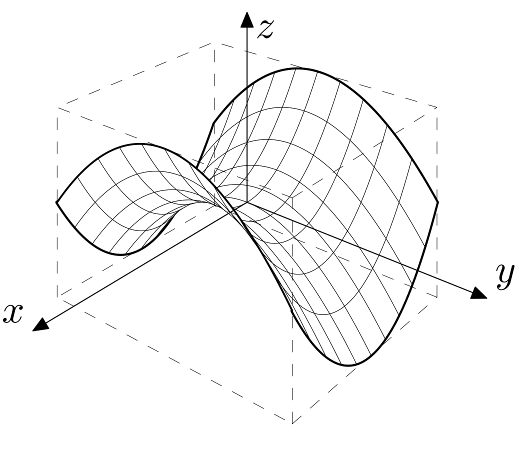

Рис. 1

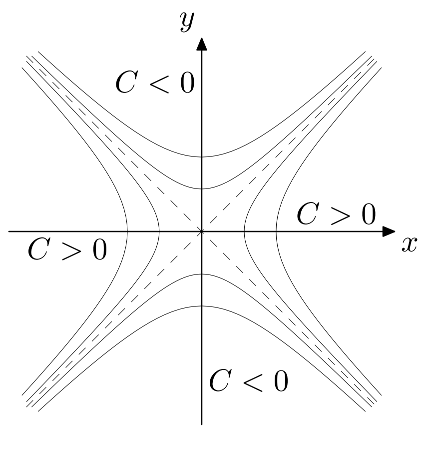

Рис. 2

При фиксированном y получаем линейную функцию $z = y \cdot x$ с угловым коэффициентом y, и можно заметить, что с уменьшением y прямая становится более пологой, а с увеличением — более крутой.

Горизонтальные разрезы графика этой функции, т. е. линии уровня $x^2 - y^2 = C$, при $C = 0$ суть биссекториальные прямые координатных углов, а при различных ненулевых C это гиперболы на плоскости xOy (рис. 2). Отметим еще, что вдоль прямых $y = 0$, $x = 0$ разрезы графика функции являются параболами с ветвями вверх и вниз соответственно.

ПРАКТИКА

1. Воспользовавшись различными средствами, описать функции:

(1) $z = xy$; **(2)** $z = x^2 + y^2$; **(3)** $z = (x+y)^2$;

(4) $z = x^3 + xy$; **(5)** $z = \sqrt{xy}$; **(6)** $z = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. Показать, что для функции $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ существуют повторные пределы в точке $(0,0)$, в то время как двойного предела в этой точке нет.

3. Показать, что для функции $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ оба повторных предела в точке $(0,0)$ равны нулю, однако двойного предела в этой точке не существует.

4. Показать, что для функции $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ повторных пределов в точке $(0,0)$ нет, тем не менее существует и равен нулю двойной предел в этой точке.

5. Найти следующие двойные пределы:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$; **(2)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$; **(4)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.