§ 13. Дифференцирование функций многих переменных. Формула Тейлора

Наличие нескольких переменных в аргументе функции обеспечивает качественно иную по сравнению с функцией одной переменной картину. Для функции одной переменной для изучения скорости ее изменения вблизи данной точки можно было сдвигаться лишь в одном направлении — вдоль координатной прямой. Для функции хотя бы двух переменных возможностей гораздо больше. Поэтому здесь вопрос дифференцируемости и вообще изучение характера изменения функции вблизи фиксированной точки решается несколько иначе, хотя, разумеется, с использованием наработок для функции одной переменной в качестве основы.

Когда говорят об изменении функции одной переменной, ее локально сопоставляют с линейным относительно приращений отображением. В случае функций нескольких переменных эта идея — приближения линейной функцией — сохраняется, и на этом пути появляется понятие дифференциала. Вместе с тем большую роль играет скорость изменения функции вдоль координатных прямых, выраженная в понятии частных производных. С этого и начнем.

13.1. Частные производные, производные по направлению, дифференциал.

ТЕОРИЯ

Частные производные. Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h},$$

его называют *частной производной функции f в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_k* и обозначают одним из символов:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x), \quad f'_{x_k}(x), \quad f'_k(x), \quad D_k f(x), \quad \partial_k f(x).$$

Указатель точки x в очевидных ситуациях опускают.

Тем самым частная производная — это производная функции многих переменных по одной из них при фиксированных остальных.

Дифференциал. Кроме анализа изменения функции вдоль координатных прямых, отраженного в понятии частных производных, для изучения функций многих переменных используют (полный) дифференциал, связанный с ее (полным) изменением вблизи данной точки. Дадим определение дифференциала для общего случая отображений конечномерных арифметических пространств, а потом будем ограничиваться рассмотрением только вещественных функций, т. е. отображений, действующих в $\mathbb{R}$.

Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k, n \in \mathbb{N}$, называют *дифференцируемым в точке* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ открытого множества $\Omega \subset D(f)$, если существует такой линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, что

$$f(x + h) = f(x) + Ah + \alpha(h)\|h\|, \tag{13.1}$$

где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, $h \in \mathbb{R}^n$. Оператор A называют *дифференциалом отображения* f *в точке* x и обозначают через $df(x)$. Если отождествить оператор A с его матрицей относительно стандартных базисов, то Ah — это произведение матрицы A на приращение h. Матрицу дифференциала $df(x)$ называют *матрицей Якоби* и обозначают одним из символов $df(x)$, $Df(x)$, $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x)$, где $f_1, \ldots, f_k$ — координатные функции отображения f.

Ясно, что дифференциал линейного отображения совпадает с этим линейным отображением.

Если отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемо в точке x, то каждая из его координатных функций $f_1, \ldots, f_k$ имеет частные производные по всем переменным $x_1, \ldots, x_n$ в данной точке, при этом матрица Якоби состоит из частных производных координатных функций:

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(x_1, \ldots x_n)}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Если отображение f действует из области пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, то матрица Якоби квадратная и ее определитель $\det \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x)$ называют *якобианом* отображения f в точке x.

Наличие частных производных в данной точке по всем переменным не гарантирует дифференцируемости отображения в этой точке. Однако есть достаточное условие дифференцируемости, правда, использующее наличие частных производных не только в данной точке, но и в ее окрестности. Для краткости и обозримости сформулируем соответствующее утверждение для функций двух переменных x, y, переформулировка для общего случая очевидна.

Теорема. *Пусть функция f имеет производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точках (x, y) из некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и функции $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда f дифференцируема в точке (x_0, y_0).*

Поясним суть дифференцируемости для случая отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, т. е. для функции $f(x, y)$ двух переменных. Матрица Якоби такой функции состоит из одной строки и двух столбцов, т. е. представляет собой двумерный вектор. Таким образом, условие, определяющее дифференцируемость функции $f(x, y)$ выглядит так: дифференцируемость f в точке (x, y) означает существование такого вектора $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, что

$$f(x + k, y + l) = f(x, y) + ak + bl + \alpha(k, l) \cdot \sqrt{k^2 + l^2}, \tag{13.2}$$

где $\lim_{\substack{k\to 0,\\ l\to 0}} \alpha(k, l) = 0$. В этом соотношении использована евклидова норма, но ее можно заменить любой другой нормой ввиду эквивалентности всех норм в конечномерном арифметическом пространстве.

Для выражения дифференциала функции, т. е. отображения, действующего в $\mathbb{R}$, можно использовать матрицу Якоби, которая в таком случае представляет собой вектор, однако обычно используют другой, функциональный способ описания, основанный на виде дифференциалов некоторых простых отображений (проекторов).

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$ функция. Возьмем вектор $v = (v_1, \ldots, v_n)$, выражающий приращение аргумента в точке x, и запишем действие дифференциала на вектор v:

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i. \tag{13.3}$$

Пусть $\pi_i : x \to x_i$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, — проектор на i-ю координату. Тогда значение $d\pi_i(x)(v)$ дифференциала на векторе v, обозначаемое, естественно, через $dx_i(v)$, очевидно, находится так: $dx_i(v) = v_i$ (поскольку проектор — линейное отображение). Заменяя в (13.3) компоненты v_i выражениями $dx_i(v)$, приходим к записи

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i(v), \tag{13.4}$$

или, опуская для краткости указание аргумента v, получаем такую (функциональную) форму выражения дифференциала:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, \tag{13.5}$$

которую обычно и используют для записи дифференциала. Если опустить еще и указание точки x, в которой рассматривается дифференциал, то получается совсем коротко:

$$df = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\, dx_i. \tag{13.6}$$

Например, для функции $f(x, y, z)$ трех переменных ее дифференциал в точке (x, y, z) имеет вид

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\, dx + f'_y(x, y, z)\, dy + f'_z(x, y, z)\, dz.$$

Дифференцирование композиции. Частные производные композиции. Для функций нескольких переменных в правиле дифференцирования композиции учитывается специфика многомерности. Сформулируем соответствующее утверждение в общем виде, ниже обсудим особенности его применения в конкретных ситуациях.

Утверждение (о дифференцируемости композиции). *Рассмотрим отображения $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ такие, что определена их композиция $f \circ g$. Предположим, что она определена на некоторой открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Если g дифференцируема в точке x, а f дифференцируема в точке $g(x)$, то композиция $f \circ g$ дифференцируема в точке x и имеет место равенство*

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x). \tag{13.7}$$

Правило дифференцирования композиции в терминах матриц Якоби означает, что матрица Якоби композиции равна произведению матриц Якоби отображений, составляющих композицию. Исходя из правила умножения матриц, выпишем правило дифференцирования в терминах частных производных, считая, что f действует из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\circ g}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x))\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x))\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x) \\ &= \sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_l}(g(x))\frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x), \quad i = 1,\dots,n, \qquad (13.8)\end{aligned}$$

где символами $y_1,\dots,y_k$ обозначены переменные, представляющие аргументы функции f.

Замечание. В теореме о дифференцируемости композиции можно предполагать не дифференцируемость каждого из составляющих композицию отображений, а лишь наличие у них всех частных производных, входящих в соответствующую формулу.

Производная по вектору и по направлению. Рассмотрим функцию f, действующую из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Фиксируем вектор $v = (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n$. Если существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}, \qquad (13.9)$$

его называют *производной функции f по вектору v в точке x* и обозначают одним из символов $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$, $f'_v(x)$, $\partial_v f(x)$. Если $\|v\| = 1$, то вектор v называют *направлением* (вектора), а производную $f'_v(x)$ по вектору v — *производной по направлению* v или по направлению l, где l — определяемая вектором v прямая (если выбрано направление на прямой l).

Если функция f дифференцируема в точке x, то она имеет в этой точке производную по любому вектору и выполнено равенство

$$df(x)(v) = f'_v(x), \qquad (13.10)$$

так что можно указать простой способ нахождения производной по вектору v дифференцируемой в точке x функции:

$$f'_v(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)v_i = \langle \operatorname{grad} f(x) \mid v\rangle, \qquad (13.11)$$

где использован *градиент*

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

функции f в точке x, обозначаемый также символом $\nabla f(x)$, а через $\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Надо иметь в виду, что наличие производной по любому вектору еще не гарантирует дифференцируемость f в точке x. Кстати, частные производные суть производные по направлениям векторов канонического базиса.

Очевидно, что координаты единичного вектора v равны косинусам углов между этим вектором и векторами канонического базиса. Их называют *направляющими косинусами вектора* v. В частности, для функции $f(x, y, z)$ трех переменных и направления $v = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ с направляющими косинусами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ производная f по направлению v равна

$$f'_v(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\cos\alpha + f'_y(x, y, z)\cos\beta + f'_z(x, y, z)\cos\gamma.$$

Относительно градиента можно напомнить, что среди всех направлений, т. е. нормированных векторов, производная f в точке x в направлении, определяемом градиентом, наибольшая. Кроме того, вектор $\operatorname{grad} f(x)$ в точке x из множества уровня $\{x : f(x) = \text{const}\}$ ортогонален этому множеству уровня и направлен в сторону роста функции f. Так, для функции $f(x, y)$ градиент $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ направлен перпендикулярно линии уровня $\{(x, y) : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$, проходящей через эту точку.

ТЕХНОЛОГИИ

Частные производные и дифференцируемость. Для нахождения частной производной по какой-то переменной считают эту переменную изменяющейся, а все остальные фиксированными и находят частную производную как производную функции одной переменной, а именно той, по которой ищется производная.

Говоря о дифференцируемости, ограничимся изложением для случая функции двух переменных.

Исследование дифференцируемости функции (двух переменных) в данной точке начинается с нахождения частных производных. Поскольку для дифференцируемости необходимо существование частных производных, отсутствие в данной точке какой-либо из частных производных сразу приводит к недифференцируемости функции в такой точке. Допустим, что частные производные по обеим переменным в данной точке есть. В таком случае смотрим, есть ли частные производные в точках из некоторой окрестности рассматриваемой точки, и если они есть, то изучаем их непрерывность. Если они непрерывны в рассматриваемой точке, то пользуемся достаточным условием дифференцируемости. Если непрерывности производных нет, то изучаем дифференцируемость, используя определение. Замечаем, что никакие другие числа, кроме частных производных в данной точке, не подойдут на роль компонент вектора (a, b) для анализа равенства (13.2), т. е. с необходимостью $a = f'_x(x, y)$, $b = f'_y(x, y)$. Остается составить равенство типа (13.2), выразить в нем

$$\alpha(k, l) = \frac{f(x+k, y+l) - f(x, y) - f'_x(x, y)k - f'_y(x, y)l}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

и установить, сходится ли $\alpha(k, l)$ к нулю при $k \to 0$, $l \to 0$. Если да, то f дифференцируема в точке (x, y), если нет, то недифференцируема.

Пример 1. Исследуем на дифференцируемость функцию $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

В тех точках, в которых можно воспользоваться стандартными правилами нахождения производной, имеем

$$f'_x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}},\ x \neq 0, \quad f'_y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}},\ y \neq 0.$$

Из этих равенств вытекает, что если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, т. е. если точка лежит не на координатных осях, то в такой точке производные непрерывны и тем самым функция дифференцируема.

Исследуем, например, точки, где $x = 0$, $y \neq 0$. В таких точках найти производную по x согласно правилам невозможно, однако это еще не означает, что ее нет. Для выяснения существования производной $f'_x(0, y)$ в любой такой точке остается определение. Рассмотрим отношение соответствующего приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \frac{\sqrt[3]{hy}}{h},$$

и нетрудно понять, что конечного предела этого отношения, а значит, и производной по x, нет. Стало быть, в точках вида $(0, y)$, где $y =\neq 0$, функция недифференцируема. Аналогично можно сделать вывод о недифференцируемости в точках вида $(x, 0)$.

Однако если $x = y = 0$, то о наличии производных в такой точке сказать пока ничего определенного нельзя. В точке $(0,0)$ частные производные на основе общих правил не находятся, поэтому воспользуемся определением:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$

аналогично $f'_y(0,0) = 0$. Поскольку частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ определены не во всех точках вблизи начала координат, для исследования дифференцируемости f в $(0,0)$ остается определение, согласно которому дифференцируемость f в $(0,0)$ равносильна выполнению равенства

$$f(k,l) = f'_x(0,0)k + f'_y(0,0)l + \alpha(k,l)\sqrt{k^2+l^2} = \alpha(k,l)\sqrt{k^2+l^2},$$

где $\lim\limits_{(k,l)\to(0,0)} \alpha(k,l) = 0$, или

$$\sqrt[3]{kl} = \alpha(k,l)\sqrt{k^2+l^2}.$$

Остается выяснить, будет ли равен нулю предел

$$\lim_{\substack{k\to 0,\\ l\to 0}} \alpha(k,l) = \lim_{\substack{k\to 0,\\ l\to 0}} \frac{\sqrt[3]{kl}}{\sqrt{k^2+l^2}}.$$

Рассмотрев функцию $\dfrac{\sqrt[3]{kl}}{\sqrt{k^2+l^2}}$, например, вдоль прямой $k = l$, находим, что нулевого предела вдоль этой прямой нет, следовательно, $\sqrt[3]{xy}$ недифференцируема в точке $(0,0)$.

Пример 2. Исследуем дифференцируемость функции

$$f(x,y) = 2y + x\cos\sqrt[3]{xy}.$$

Ясно, что эта функция дифференцируема в любой точке (x,y), где $x \neq 0$ и $y \neq 0$, ибо в таких точках выполнены все условия правил нахождения производных.

Исследуем оставшиеся точки. Рассмотрим случай, когда $x = 0$, y произвольное (если в процессе исследования потребуются дополнительные условия, там их и оговорим). Найдем производную по x в точке $(0,y)$. Для этого рассмотрим соответствующее отношение:

$$\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{2y + h\cos\sqrt[3]{hy} - 2y}{h} = \cos\sqrt[3]{hy} \to 1 \text{ при } h \to 0,$$

стало быть, $f'_x(0,y)=1$ при любом y.

Займемся поиском производной по y. В принципе, здесь можно было бы обратиться к нахождению по известным правилам, однако для $y=0$ они не сработают, поэтому воспользуемся определением. Имеем

$$\frac{f(0,y+k)-f(0,y)}{k}=\frac{2y+2k-2y}{k}=2,$$

так что $f'_y(x,0)=2$ при любом y.

Составим выражение $(*)$ для нашей функции:

$$\begin{aligned}\alpha(h,k)&=\frac{f(h,y+k)-f(0,y)-h-2k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &\frac{2(y+k)+h\cos\sqrt[3]{h(y+k)}-2y-h-2k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &=\frac{h(\cos\sqrt[3]{h(y+k)}-1)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h}{|h|}\cdot\frac{\cos\sqrt[3]{h(y+k)}-1}{\sqrt{1+(k/h)^2}},\end{aligned}$$

а последнее выражение имеет пределом нуль при $h\to0$, $k\to0$ как произведение ограниченной на бесконечно малую. Таким образом, в рассматриваемых точках функция дифференцируема.

Остались точки вида $(x,0)$, где $x\neq0$. Начнем с нахождения производной по y. Для точки $(x,0)$ составим отношение:

$$\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\frac{2k+x\cos\sqrt[3]{xk}-x}{k}=2+x\cdot\frac{\cos\sqrt[3]{xk}-1}{k}.$$

Последний сомножитель предела при $k\to0$ не имеет, а значит, такового не имеет и все отношение. Тем самым производной по y в этих точках нет, а вместе с этим нет и дифференцируемости.

В итоге оказалось, что функция дифференцируема всюду, за исключением точек вида $(x,0)$ с $x\neq0$.

Производная композиции. Одним из технически важных средств является правило нахождения производной композиции, так называемое цепное правило. Соответствующие формулы имеют довольно громоздкий вид, поэтому для отработки этого правила приходится использовать какие-то словосочетания, руководствуясь которыми можно научиться безошибочно находить производные сложной функции. Изложим возможное сопровождение в ситуации композиции $f\circ g$, где отображение

$g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ действует из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, а $f(u, v)$ — из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, Кстати, в последнем контексте буквами u, v обозначены разные объекты: с одной стороны, это символы переменных (для функции f), а с другой — обозначения функций (для g). Так поступают довольно часто, и в конце концов привыкают понимать, в каком месте о каком статусе буквы идет речь.

Выпишем подробно формулы для нахождения частных производных в этом случае: для функции $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ имеем

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Процесс нахождения производной, выраженный в последнем равенстве, можно сопровождать, например, такой фигурой речи: «производная h по x равна производной по первому (аргументу) на первый по x плюс производная по второму на второй по x». Здесь очевидны умолчания, использованные для краткости и динамичности словосочетания.

Кстати, как это ни странно, бывают проблемы с выяснением, от скольких переменных зависит та или иная функция. Например, при задании функции типа $f(x+y, x+z)$ от скольких переменных зависит функция f? Далеко не всегда сразу появляется верный ответ. В таком случае можно количество переменных определять по количеству запятых, которыми они разделяются: нет запятых — одна переменная, одна запятая — две переменных, и т. д. В указанной функции одна запятая, стало быть, f — функция двух переменных.

Пример 2. Найдем дифференциал функции

$$u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2).$$

По правилу производной композиции имеем $u'_x = f' \cdot 2x$, $u'_y = f' \cdot 2y$, $u_z = f' \cdot 2z$, так что

$$du = 2xf'dx + 2yf'dy + 2zf'dz.$$

Обратим внимание на то, что здесь f — функция одной переменной, так что производная берется по ее единственной переменной, поэтому указание переменной дифференцирования отсутствует.

Пример 3. Убедимся в том, что функция

$$z(x, y) = yf(x^2 - y^2),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $y^2 z'_x + xyz'_y = xz$.

Отметим, что здесь, как и в примере 2, функция f зависит от одной переменной, поэтому при ее дифференцировании не требуется указывать, по какой переменной берется производная — переменная всего одна. Имеем

$$z'_x = yf' \cdot 2x, \quad z'_y = f + yf' \cdot (-2y),$$

где производная f' берется в точке $x^2 - y^2$. Подставив выражения для z'_x, z'_y в уравнение, получим

$$y^2 \cdot (2xyf') + xy(f - 2y^2 f') = xyf = xz.$$

Производная по вектору. Для нахождения производной по вектору или по направлению (вектора) надо иметь в распоряжении функцию, фиксированную точку и заданный вектор (для производной по направлению — единичный вектор). Дальнейшие действия выполняются согласно правилу нахождения производной по вектору: находятся частные производные в данной точке и затем записывается скалярное произведение составленного из них вектора (градиента) и вектора, по которому берется производная.

Пример 4. Найдем производную функции

$$z(x,y) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

в точке $M(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

В первую очередь найдем вектор внутренней нормали. Градиент функции $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, т. е. вектор $\operatorname{grad}\varphi(x,y) = \left(\dfrac{2x}{a^2}, \dfrac{2y}{b^2}\right)$, дает вектор нормали к множеству $\varphi(x,y) = 1$ в точке (x,y), направленный в сторону роста функции φ, т. е. наружу от эллипса $\varphi(x,y) = 1$. В точке M имеем

$$\operatorname{grad}\varphi(M) = \left(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{b}\right), \quad \|\operatorname{grad}\varphi(M)\| = \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|},$$

и требуемый единичный вектор внутренней нормали — это вектор

$$-\frac{\operatorname{grad}\varphi(M)}{\|\operatorname{grad}\varphi(M)\|} = \left(-\frac{|b|\operatorname{sign} a}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{|a|\operatorname{sign} b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Производная функции z по направлению внутренней нормали в точке M равна

$$-\frac{\partial z}{\partial x}(M)\frac{|b|\operatorname{sign} a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\partial z}{\partial y}(M)\frac{|a|\operatorname{sign} b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}|b|\operatorname{sign} a}{a} + \frac{\sqrt{2}|a|\operatorname{sign} b}{b}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{|ab|}.$$

ПРАКТИКА

1. Найти частные производные следующих функций:

(1) $f(x,y) = x\sin(x+y)$; **(2)** $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

(3) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; **(4)** $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$;

(5) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x=y=0; \end{cases}$ **(6)** $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

2. Исследовать дифференцируемость функций:

(1) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$; **(2)** $f(x,y) = (y-|x|)^2$;

(3) $f(x,y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$, если $x^2+y^2>0$, и $f(0,0)=0$;

(4) $f(x,y) = |x^2-y^2|$.

3. Показать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$$

в окрестности точки $(0,0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные, однако недифференцируема в точке $(0,0)$.

4. Показать, что функция $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0,0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

5. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\ y=0,\end{cases}$$

имеет в окрестности точки $(0,0)$ частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, которые разрывны в точке $(0,0)$ и неограниченны в любой окрестности ее, и тем не менее функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

6. Доказать, что функция $f(x,y)=\min(x,y)$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Будет ли она дифференцируемой в точках $(1,1)$ и $(1,2)$?

7. Найти якобиан отображения

$$(r,\varphi)\mapsto(r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

определенного в полуполосе $r>0$, $0<\varphi<2\pi$.

8. Найти якобиан отображения

$$(r,\varphi,\psi)\mapsto(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi),$$

определенного на множестве $r>0$, $0<\varphi<2\pi$, $-\pi/2<\psi<\pi/2$.

9. Найти дифференциалы функций u (здесь f — заданная дифференцируемая функция):

(1) $u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$; **(2)** $u(x,y)=f(xy,x/y)$;

(3) $u(x,y,z)=f(x+y,z)$; **(4)** $u(x,y,z)=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$;

(5) $u=f(x,y,z)$; где $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$;

(6) $u(x,y,z)=f(x/y,y/z)$;

(7) $u=f(\xi,\eta,\zeta)$, где $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x^2-y^2$, $\zeta=2xy$.

10. Предполагая, что функции φ, ψ имеют непрерывные частные производные, проверить равенства:

(1) $yz'_x-xz'_y=0$, если $z=\varphi(x^2+y^2)$;

(2) $x^2z'_x-xyz'_y+y^2=0$, если $z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$;

(3) $xu'_x+yu'_y+zu'_z=u+\dfrac{xy}{z}$, если $u=\dfrac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$;

11. Найти производную функции f в точке M по данному направлению, если

(1) $f = x^2 - y^2$, $M = (1,1)$, по направлению l, составляющему угол $\pi/3$ с положительным направлением оси Ox;

(2) $f = x^2 - xy + y^2$, $M(1,1)$, по направлению l, составляющему угол α с положительным направлением оси Ox;

(3) $f = \ln(x^2 + y^2)$, $M(x_0, y_0)$, по направлению l, перпендикулярному линии уровня, проходящей через эту точку, и направленному в сторону роста функции f;

(4) $f = \operatorname{arctg}(y/x)$, $M(1/2, \sqrt{3}/2)$ по направлению внешней нормали к окружности $x^2 + y^2 = 2x$ в точке M;

(5) $f = x^2 - 3yz + 4$, $M(1,2,-1)$, по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями;

(6) $f = \ln(e^x + e^y + e^z)$, $M(0,0,0)$, по направлению луча, образующего с осями координат x, y, z углы соответственно $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/3$.

Ответы. 1. (1) $\frac{15}{8}\sqrt{\frac{yz^3}{x}}$; (2) $(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$.

2. (1) Недифференцируема при $y = -x$; (2) недифференцируема при $x = 0$, $y \neq 0$; (3) дифференцируема всюду; (4) недифференцируема при $|x| = |y| \neq 0$.

6. Недифференцируема в точке $(1,1)$, дифференцируема в точке $(1,2)$.

7. r.

8. $r^2 \cos\psi$.

9. (1) $du = f' \cdot \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (2) $du = \left(yf_1' + \frac{1}{y}f_2'\right)dx + \left(xf_1' - \frac{x}{y^2}f_2'\right)dy$; (3) $du = f_1'\,dx + f_1'\,dy + f_2'\,dz$; (4) $du = (f_1' + 2xf_2')\,dx + (f_1' + 2yf_2')\,dy + (f_1' + 2zf_2')\,dz$; (5) $du = (f_1' + 2tf_2' + 3t^2f_3')\,dt$; (6) $du = \frac{1}{y}f_1'\,dx - \left(\frac{x}{y^2}f_1' - \frac{1}{z}f_2'\right)dy - \frac{y}{z^2}f_2'\,dz$; (7) $du = 2(x(f_1' + f_2') + yf_3')\,dx + 2(y(f_1' - f_2') + xf_3')\,dy$.

11. (1) $1 - \sqrt{3}$; (2) $\cos\alpha + \sin\alpha$; (3) $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$; (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (5) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; (6) $\frac{2+\sqrt{2}}{6}$.

13.2. Геометрические интерпретации.

ТЕОРИЯ

Касательной плоскостью к поверхности в некоторой ее точке называют плоскость, содержащую все касательные к гладким кривым, проведенным на поверхности через эту точку (точку касания). Вектор, ортогональный касательной плоскости, называют *вектором нормали.*

Если гладкая поверхность задана в явном виде, т. е. как график некоторой гладкой функции $z = f(x, y)$, то уравнение плоскости, касательной к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$, таково:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{13.12}$$

Вектор $(z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1)$ является вектором нормали к графику функции z в точке (x_0, y_0, z_0).

Если гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$ (т. е. представляет собой множество решений данного уравнения), то уравнение плоскости, касательной к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), где $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{13.13}$$

а вектор нормали совпадает с градиентом функции F в точке (x_0, y_0, z_0).

Если гладкая поверхность задана параметрически, т. е. как образ открытой области в $\mathbb{R}^2$ при некотором невырожденном отображении $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то уравнение касательной к такой поверхности в точке $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$ задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{13.14}$$

Канонический вид уравнения плоскости получается при разложении определителя по первой строке. Вектор нормали равен

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}, \tag{13.15}$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы канонического базиса и имеется в виду разложение определителя по первой строке.

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, т. е. отображение, действующее из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$, то $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ — вектор, касательный к кривой $(x(t), y(t), z(t))$ в точке $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Уравнение касательной прямой можно записать так:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}, \tag{13.16}$$

или, в параметрическом виде, так:

$$x = x_0 + x'(t_0)t, \quad y = y_0 + y'(t_0)t, \quad z = z_0 + z'(t_0)t, \quad t \in \mathbb{R},$$

а уравнение нормальной плоскости — так:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

ТЕХНОЛОГИИ

Решение задач на тему геометрических образов состоит в нахождении соответствующих атрибутов и записи выражения, отражающего тот или иной геометрический объект.

ПРАКТИКА

1. Написать уравнения касательной плоскости в указанных точках к поверхностям:

(1) $z = x^2 + y^2$, $x = 1$, $y = 2$; **(2)** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x = 1$, $y = 1$;

(3) $z = x^3 - 3xy + y^3$, $x = 1$, $y = 1$; **(4)** $z = e^{x\cos y}$, $x = 1$, $y = 0$;

(5) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $(3, 4, -12)$; **(6)** $xy^2 + z^3 = 12$, $(1, 2, 2)$;

(7) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $(1, 2, -1)$;

(8) $xyz(z^2 - x^2) = 5 + y^2$, $(1, 1, 2)$;

(9) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, $(3, 5, 9)$;

(10) $x = u$, $y = u^2 - 2uv$, $z = u^3 - 3u^2v$, $(1, 3, 4)$.

2. Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей в данных точках к кривым:

(1) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ при $t = \pi/4$;

(2) $y = x$, $z = x^2$ при $x = 1$.

Ответы.

1. (1) $2x + 4y - z - 5 = 0$; (2) $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - y)$; (3) $z = -1$; (4) $ex - z = 0$; (5) $3x + 4y - 12z = 169$; (6) $x + y + 3z = 9$; (7) $x + 11y + 5z = 18$; (8) $2x + 4y + 11z = 28$; (9) $12x - 9y + 2z = 9$; (10) $6x + 3y - 2z = 7$.

2. (1) $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$, $y = \frac{b}{2}$; $ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$; (2) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $x + y + 2z = 4$.

13.3. Частные производные и дифференциалы высоких порядков. Формула Тейлора.

ТЕОРИЯ

Частные производные и дифференциалы высоких порядков. Предположим, что в каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует частная производная $f'_{x_i}(x)$ и функция $g(x) = f'_{x_i}(x)$ имеет частную производную $g'_{x_k}(x)$ в точке $x \in \Omega$. Тогда эту производную называют *производной второго порядка функции f по переменным x_i, x_k* и обозначают одним из символов $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x)$, $f''_{x_k x_i}(x)$, $f''_{ki}(x)$. В этом обозначении имеется в виду, что сначала берется производная по переменной x_i, а затем — по x_k, хотя часто порядок следования переменных значения не имеет. Если переменные x_i, x_k различны, то производную по ним называют *смешанной*, если одинаковы, то *чистой*, и вторую производную по x_i дважды обозначают одним из символов $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$, $f''_{x_i^2}(x)$, $f''_{ii}(x)$.

Индуктивно определяются производные более высоких порядков.

Утверждение. *Предположим, что существуют производные $f'_{x_i x_k}$, f'_{x_k, x_i} по различным переменным x_i, x_k функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точках из некоторой окрестности данной точки x. Если эти производные непрерывны в точке x, то они равны, так что в таком случае порядок взятия производных безразличен.*

В дальнейшем всегда будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие независимость смешанных производных от порядка следования переменных.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. При каждом фиксированном $v \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим функцию $\varphi : x \to df(x)(v)$. Если эта функция дифференцируема в точке $x \in \Omega$, то значение ее дифференциала $d\varphi(x)(v)$ на векторе v называют *вторым дифференциалом функции f в точке x* (на векторе v) и обозначают символом $d^2 f(x)(v)$ Легко найти, что

$$d^2 f(x)(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) v_i v_j,$$

или, в функциональной записи,

$$d^2f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, dx_i dx_j. \tag{13.17}$$

Считая функцию f такой, что смешанные производные второго порядка не зависят от порядка следования переменных дифференцирования, для функции $f(x, y)$ двух переменных (опуская даже указание точки (x, y)) имеем

$$d^2f = f''_{xx}\, dx^2 + 2f''_{xy}\, dxdy + f''_{yy}\, dy^2, \tag{13.18}$$

а для функции $f(x, y, z)$ трех переменных будет

$$d^2f = f''_{xx}\, dx^2 + f''_{yy}\, dy^2 + f''_{zz}\, dz^2 + 2f''_{xy}\, dxdy + 2f''_{xz}\, dxdz + 2f''_{yz}\, dydz. \tag{13.19}$$

Индуктивно определяются дифференциалы более высоких порядков. Символьной формулой дифференциал порядка k выражается так:

$$d^kf(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^k f(x), \tag{13.20}$$

которую надо воспринимать так: мы раскрываем скобки в правой части, однако то, что относится к взятию производных, понимается как порядок и перечень переменных, по которым берутся производные (а не степень), а множители dx_i возводятся в соответствующие степени и перемножаются. После этого к открытым операциям взятия частных производных ставится функция $f(x)$, в результате чего получается конкретное равенство, выражающее дифференциал порядка k функции f в точке x. Проделав сказанное, запишем формулу (13.20) для функции $f(x, y)$ двух переменных в виде

$$d^kf(x, y) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x, y)\, dx^{k-i} dy^i. \tag{13.21}$$

Формула Тейлора. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в каждой точке области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет непрерывные частные производные до порядка m. Пусть x — фиксированная точка области Ω. Тогда справедлива *формула Тейлора с локальным остаточным членом в форме Пеано* (*локальная формула Тейлора*)

$$f(x + h) = f(x) + df(x)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x)(h) + \cdots + \frac{1}{m!} d^m f(x)(h) + \alpha(h)\|h\|^m, \tag{13.22}$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $\|h\| \to 0$, выражающая разложение функции f по степеням приращения h аргумента функции вблизи точки x. Если $x = 0$, то формулу Тейлора называют *формулой Маклорена*.

Запишем формулу (13.22) в другом виде. Пусть теперь $x_0 \in \Omega$ — фиксированная точка, а $x \in \Omega$ — переменная точка. В этом случае приращение выражается так: $h = x - x_0$, и, переписав равенство (13.22), получим вид формулы Тейлора, выражающий *разложение* $f(x)$ *по степеням* $x - x_0$ для функции f в точках x, близких к фиксированной точке x_0:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0)(x - x_0) + \dots \\ + \frac{1}{m!}d^m f(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)\|x - x_0\|^m, \end{aligned} \tag{13.23}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Перепишем формулу (13.23) для функции двух переменных с использованием формулы (13.21):

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + o(\rho^m), \tag{13.24}$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Запишем формулу Тейлора для функции $f(x, y)$ двух переменных, ограничившись третьим порядком, но повысив степень подробности записи и выделяя группы, соответствующие каждой степени переменных:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)) \\ &+ \frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) \\ &+ \frac{1}{6}(f'''_{xxx}(x_0, y_0)(x - x_0)^3 + 3f'''_{xxy}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0) \\ &+ 3f'''_{xyy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + f'''_{yyy}(x_0, y_0)(y - y_0)^3) \\ &+ o\big(\sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^3}\big), \quad x \to x_0,\ y \to y_0, \end{aligned} \tag{13.25}$$

где $o\big(\sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^3}\big) = \alpha(x, y) \cdot \big(\sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^3}\big)$ с $\alpha(x, y) \to 0$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$.

ТЕХНОЛОГИИ

О производных высоких порядков. Нахождение производных высоких порядков от конкретных функций ничем не отличается от нахождения производных первого порядка — надо последовательно находить производные по указанным переменным до указанного порядка. Небольшие трудности могут появиться при нахождении производной композиции, в которой участвуют некие не данные конкретно функции. Обратим внимание на то, что при нахождении производных первого порядка от композиции функций, если не требуется находить производные второго порядка, чаще всего можно не выписывать аргументы внешних функций в композиции, при которых эти производные находятся. Однако если требуется найти производные второго или более высоких порядков, то лучше писать точки, в которых берутся соответствующие производные, для того, чтобы учитывать имеющиеся зависимости и не ошибаться, забывая учесть те или иные переменные. Конечно, при нахождении производных последнего из требуемых порядков аргументы можно не писать.

Пример 1. Найдем вторую смешанную производную функции $f(x,y) = g(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$, где g — функция, имеющая непрерывные производные второго порядка. При описании производных функции g цифрами внизу будем обозначать номер того аргумента, по которому берется в данный момент производная, дабы не вводить дополнительных букв для обозначения аргументов функции g. Имеем

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= g'_1(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)\cdot 2x \\
&\quad + g'_2(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)\cdot 2x + g'_3(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)\cdot 2y, \\
f''_{xy} &= (g''_{11}\cdot 2y + g''_{12}\cdot(-2y) + g''_{13}\cdot 2x)\cdot 2x \\
&\quad + (g''_{21}\cdot 2y + g''_{22}\cdot(-2y) + g''_{23}\cdot 2x)\cdot 2x \\
&\quad + (g''_{31}\cdot 2y + g''_{32}\cdot(-2y) + g''_{33}\cdot 2x)\cdot 2y + 2g'_3 \\
&= 4\big(xyg''_{11} - xyg''_{12} + x^2g''_{13} + xyg''_{21} - xyg''_{22} \\
&\quad + x^2g''_{23} + y^2g''_{31} - y^2g''_{32} + xyg''_{33}\big) + 2g'_3 \\
&= 4\big(xy\big(g''_{11} - g''_{12} + g''_{21} - g''_{22} + g''_{33}\big) \\
&\quad + x^2\big(g''_{13} + g''_{23}\big) + y^2\big(g''_{31} - g''_{32}\big)\big) + 2g'_3.
\end{aligned}$$

О дифференциалах высоких порядков. Вся необходимая для нахождения дифференциалов второго и следующего порядков отражена в теоретической части. Например, для нахождения дифференциала второго порядка надо найти все частные производные второго порядка и сделать одну из записей указанного выше вида соответственно числу переменных у функции.

Формула Тейлора. Начиная решение задачи, связанной с формулой Тейлора, в первую очередь надо согласно контексту определить начальную точку разложения и переменные, по которым пойдет разложение. Затем можно поступить согласно действиям, предусмотренным формулой, а именно найти требуемые частные производные и составить соответствующую запись.

Для разложений конкретных функций вместе с предлагаемым формулой Тейлора взятием производных можно использовать известные разложения для функций одной переменной и банальные алгебраические манипуляции типа раскрытия скобок и т. п. Ввиду единственности полинома Тейлора получаемое разложение несомненно будет давать формулу Тейлора.

Пример 1. Разложим по формуле Тейлора до второго порядка включительно функцию $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$ в окрестности точки $(1, 1)$. Для решения поставленной задачи надо найти частные производные до второго порядка в точке $(1, 1)$ и записать в нашем конкретном случае формулу (12.25) (или часть формулы (12.26) до второго порядка). Займемся производными:

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f''_{xx}(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yy}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_x(1, 1) = \frac{1}{2},\ f'_y(1, 1) = -\frac{1}{2},\ f''_{xx}(1, 1) = -\frac{1}{2},\ f''_{xy}(1, 1) = 0,\ f''_{yy}(1, 1) = \frac{1}{2},$$

а теперь запишем разложение:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2).$$

Пример 2. Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^4)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцию $f(x, y) = e^x \sin y$.

Можно находить производные до соответствующего порядка, а можно воспользоваться разложениями для функций одной переменной и фактом единственности полинома Тейлора. Имеем

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)\right)$$
$$= y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} - \frac{xy^3}{6} + \frac{x^3 y}{6} + o(\rho^4).$$

Пример 3. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ в окрестности точки $(1, 1, 2)$.

Как и в примере 2, воспользуемся проведением тождественных преобразований:

$$(x + y + z)^2 = (4 + (x - 1) + (y - 1) + (z - 2))^2$$
$$= 16 + 8(x - 1) + 8(y - 1) + 8(z - 2) + (x - 1)^1 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 +$$
$$2(x - 1)(y - 1) + 2(x - 1)(z - 2) + 2(y - 1)(z - 2).$$

ПРАКТИКА

1. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, если

(1) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + 8xy^3}{x + 2y}$, **(2)** $f(x, y) = \sin(x + \cos y)$.

2. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, если

(1) $f(x, y, z) = \sqrt{xy^3 z^5}$, **(2)** $f(x, y, z) = e^{xyz}$.

3. Предполагая, что функции φ, ψ имеют непрерывные частные производные до соответствующего порядка, проверить равенства:

(1) $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, если $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$;

(2) $u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$, если $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$;

(3) $x^2 u''_{xx} + 2xy u''_{xy} + y^2 u''_{yy} = 0$, если $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

(4) $u'_x u''_{xy} = u'_y u''_{xx}$, если $u = \varphi(x + \psi(y))$.

4. Найти вторые дифференциалы следующих функций:

(1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; **(2)** $f(x, y, z) = xy + yz + zx$;

(3) $u(x, y) = f(x + y, x - y)$; **(4)** $u(x, y, z) = f(x + y, z)$.

5. Разложить по формуле Тейлора функцию f в окрестности заданной точки:

(1) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$, $(1, 2)$;

(2) $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y$, $(2, -1)$;

(3) $f(x, y, z) = xyz$, $(1, 2, 3)$;

(4) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(1, 0, 1)$.

6. Выписать формулу Тейлора до второго порядка включительно для функции f в окрестности заданной точки:

(1) $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$, $(2, 1)$; **(2)** $f(x, y) = \sin x \cos y$, (x_0, y_0).

7. Разложить по формуле Маклорена до второго порядка функцию f:

(1) $f(x, y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$; **(2)** $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 + y}$.

8. Разложить по формуле Маклорена до второго порядка функцию $f(x, y, z) = \cos x \cos y \cos z - \cos(x + y + z)$.

9. Разложить $f(x+h, y+k, z+l)$ по целым положительным степеням h, k, l, если

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

10. Разложить по степеням h, k функцию

$$\Delta_{xy} f(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$$

до второго порядка.

Ответы.

1. (1) $f'_x = \sin((x+y) + x\cos(x+y)$, $f'_y = x\cos(x+y)$; (2) $f'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$; (3) $f'_x = \frac{|y|}{x^2+y^2}$, $f'_y = -\frac{x \operatorname{sign} y}{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 \neq 0$; (4) $\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $\frac{3y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $x^2 + y^2 \neq 0$; (5) $f'_x = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, $f'_y = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, $x^2 + y^2 \neq 0$, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$; (6) $f'_x = \frac{y \operatorname{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}}$, $f'_y = \frac{x \operatorname{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}}$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

2. (1) -4, (2) $\sin y \cos(x + \cos y)$.

4. (1) $d^2u = \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; (2) $d^2u = 2(dxdy + dydz + dzdx)$; (3) $d^2u = f''_{11}(dx+dy)^2 + 2f''_{12}(dx^2 - dy^2) + f''_{22}(dx-dy)^2$; (4) $d^2u = f''_{11}(dx+dy)^2 + 2f''_{12}(dx+dy)dz + f''_{22}dz^2$.

5. (1) $f(x,y) = -9 + 9(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2 + (x-1)^3 - 2(y-2)^3$; (2) $f(x,y) = 6 + 3(x-2) + (y+1) + (x-2)^2 - (x-2)(y+1) + (y+1)^2 + (x-2)^3$; (3) $f(x,y,z) = 6 + 6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3) + 3(x-1)(y-2) + 2(x-1)(z-3) + (y-2)(z-3) + (x-1)(y-2)(z-3)$; (4) $f(x,y,z) = 2 + 3(x-1) - 3y + 3(z-1) + 3(x-1)^2 + 3(z-1)^2 - 3(x-1)y - 3y(z-1) + (x-1)^3 + y^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)y(z-1)$.

6. (1) $f(x,y) = 1 - (x-2) + (y-1) + (x-2)^2 - 2(x-2)(y-1) + (y-1)^2$; (2) $f(x,y) = \sin x_0 \cos y_0 + \cos x_0 \cos y_0 (x-x_0) - \sin x_0 \sin y_0 (y-y_0) - \frac{1}{2}\sin x_0 \cos y_0 (x-x_0)^2 - \cos x_0 \sin y_0 (x-x_0)(y-y_0) - \frac{1}{2}\sin x_0 \cos y_0 (y-y_0)^2$.

7. (1) $f(x,y) = 1 - \frac{x^2-y^2}{2} + o(x^2+y^2)$; (2) $f(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2} - \frac{x^2-y^2}{4} + o(x^2+y^2)$.

8. $f(x,y,z) = xy + yz + zx + o(x^2+y^2)$.

9. $f(x+h, y+k, z+l) = f(x,y,z) + 2((Ax+Dy+Ez)h + (Dx+By+Fz)k + (Ex+Fy+Cz)l) + f(h,k,l)$.

10. $\Delta_{xy} f(h,k) = f''_{12}(x,y)hk$.