

§ 14. Теоремы о неявном отображении и об обратном отображении

ТЕОРИЯ

Как известно, отображение ассоциируется с взаимной зависимостью между элементами двух множеств, в которой расставлены приоритеты: элементы одного из множеств можно выбирать произвольно и однозначно получать согласно имеющейся зависимости элементы другого множества. Обычно отображения между числовыми множествами, т. е. функции, задаются формулами. Однако нередко ситуации, при которых удастся задать функцию лишь указанием взаимной зависимости, выраженной, например, в виде равенства, связывающего рассматриваемые величины. Например, можно утверждать, что числа x, y , удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 = 1$, находятся в указанной зависимости. Конечно, в этом простом случае нетрудно выразить одну переменную через другую, правда, однозначности получить в целом не удастся. Но нередко дать явное выражение не удастся. К тому же если нас интересует, например, скорость изменения зависимой величины от независимой, то это характеристика локальная, и нам довольно безразлично, что творится за пределами некоторой окрестности той точки, вблизи которой происходит изучение. Это наводит на мысль локального рассмотрения множества решений уравнения, связывающего две (многомерные) переменные. Значит, начальная обстановка такова: есть уравнение $F(x, y) = 0$, где, вообще говоря, x и y — векторы, и есть фиксированная точка, вблизи которой нас интересуют какие-то характеристики множества решений данного уравнения. Локальность рассмотрения означает, что надо взять некоторую окрестность точки (x, y) и изучать лишь ту часть множества решений, которая в такую окрестность попадает. Если в некоторой окрестности данной точки множество решений уравнения представляет собой «однозначное» множество, т. е. представляет собой график некоторого отображения, то можно считать, что множество решений уравнения локально задает отображение, которое, в свою очередь, принято называть отображением, неявно заданным посредством отображения F .

Перейдем к формулировке соответствующего результата, дав ее в общем виде.

14.1. Теорема 1 (о неявном отображении). Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, и F — действующее в $\mathbb{R}^n$ отображение клас-

са $C^1(G, \mathbb{R}^n)$, т. е. имеющее непрерывные частные производные первого порядка в точках из G . Пусть точка

$$(x_0, y_0) \in G, \quad x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0), \quad y_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0),$$

такова, что $F(x_0, y_0) = 0$. Предположим, что F невырожденное в точке (x_0, y_0) , при этом якобиан $\det \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(x_0, y_0)$ отличен от нуля. Тогда существуют такие открытые окрестности U точки x_0 и V точки y_0 , что $U \times V \subset G$ и для любого $x \in U$ существует единственное $y \in V$, обладающее свойством $F(x, y) = 0$. Тем самым, сопоставляя каждому $x \in U$ соответствующее ему $y \in V$, получаем отображение $y = \varphi(x)$, о котором говорят, что оно вблизи точки (x_0, y_0) неявно задается отображением F . При этом $\varphi \in C^1(U, V)$, а если $F \in C^r(G, \mathbb{R}^n)$, то $\varphi \in C^r(U, V)$.

Обратим внимание на то, что функция φ характеризуется тождеством

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad x \in U. \quad (14.1)$$

Производные функции φ находятся в результате дифференцирования этого равенства по координатам точки x и выражения из получаемых равенств требуемых производных. При выражении производных отображения φ в знаменателе оказывается тот самый якобиан, отличие от нуля которого предусмотрено в условии теоремы.

Отметим еще, что неявная функция φ действует в точности в те переменные, якобиан исходного отображения по которым отличен от нуля.

Важно иметь в виду, что отображение φ в теореме о неявном отображении задается локально и его производные вычисляются вблизи данной точки.

В том случае, когда размерности m и n рассматриваемых пространств совпадают, можно ставить вопрос о применимости средств дифференциального исчисления к вопросу о (локальной) обратимости отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Сформулируем соответствующий результат в общем случае.

Теорема 2 (об обратном отображении). Пусть f — гладкое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, x — внутренняя точка области определения $D(f)$. Тогда если f регулярно в x , т. е. $\det \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$, то существуют такие окрестности V точки x и W точки $f(x)$, что f — диффеоморфизм V на W , т. е. гладкое взаимно однозначное отображение множества V на W , обратное к которому гладкое.

ТЕХНОЛОГИИ

При решении задач, связанных с теоремой о неявном отображении, надо обратить внимание на то, что в формулировке уже выделено разбиение всего набора аргументов на две группы и ясно, какая из них окажется аргументами, а какая значениями получаемой неявной функции. В задачах расстановка приоритетов происходит не всегда, и бывает так, что приходится самим, исходя из каких-то деталей формулировки, решать, что считается аргументами, а что — значениями неявного отображения. Этому помогает отмеченное выше условие о том, что отображение должно действовать в те переменные, по которым предполагается отличие от нуля якобиана. Тогда теорема гарантирует локально заданное неявное отображение.

Второй момент связан с вычислением производных неявно заданной функции. Для этого обратим внимание на то, что неявно заданная посредством равенства $F(x, y) = 0$ функция φ характеризуется тождеством

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

вблизи соответствующих точек. Производные функции φ находятся в результате дифференцирования этого равенства по координатам точки x и выражения из получаемых равенств требуемых производных. При выражении производных отображения φ в знаменателе оказывается тот самый якобиан, отличие от нуля которого предусмотрено в условии теоремы.

Обычно в задачах определяющее неявную функцию уравнение вида $F(x, y) = 0$ задается в виде системы уравнений. Полезно отметить, что именно число уравнений показывает, в какую размерность действует отображение F и тем самым в какую размерность будет действовать неявно задаваемое отображение.

Производные обратного отображения находятся на основе дифференцирования какого-либо из двух равенств, характеризующих взаимно обратные отображения, а именно

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

для всех x, y из соответствующих окрестностей, и выражения требуемых производных.

ПРИМЕР 1. Найдём производные y', y'' функции $y(x)$, определяемой уравнением $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 < \varepsilon < 1$). Функция $y(x)$ определяется

тождеством $y(x) - \varepsilon \sin y(x) = x$, которое продифференцируем по x :

$$y'(x) - \varepsilon \cos y(x) \cdot y'(x) = 1, \quad (14.2)$$

откуда

$$y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y(x)}$$

(поскольку нам предстоит дифференцировать еще раз, сохраняем указание аргумента у функции и производной). Продифференцируем равенство (14.2) еще раз:

$$y'' + \varepsilon \sin y \cdot (y')^2 - \varepsilon \cos y \cdot y'' = 0,$$

откуда

$$y'' = \frac{\varepsilon (y')^2 \sin y}{\varepsilon \cos y - 1} = \frac{\varepsilon \sin y}{(\varepsilon \cos y - 1)^3}.$$

Отметим, что производные в данной точке x зависят не только от аргумента x , но и от значения $y(x)$.

Кстати, вторую производную можно было найти путем дифференцирования выражения для первой производной с учетом имеющихся зависимостей от независимой переменной.

ПРИМЕР 2. Найдём производную z'_x функции $z(x, y)$, определяемой системой равенств

$$x = u + \ln v, \quad y = v - \ln u, \quad z = 2u + v,$$

в точке (x, y) , соответствующей значениям $u = 1, v = 1$.

Первые два уравнения при соответствующих условиях определяют функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, подставляя которые в третье, получаем равенство

$$z(x, y) = 2u(x, y) + v(x, y).$$

Отсюда $z'_x = 2u'_x + v'_x$. Производные u'_x, v'_x найдём из тождеств

$$x = u(x, y) + \ln v(x, y), \quad y = v(x, y) - \ln u(x, y)$$

путем их дифференцирования:

$$1 = u'_x + \frac{1}{v} v'_x, \quad 0 = v'_x - \frac{1}{u} u'_x,$$

откуда

$$u'_x = \frac{uv}{1+uv}, \quad v'_x = \frac{v}{1+uv}$$

и, в частности, при $u = v = 1$ будет $u'_x = v'_x = 1/2$ и $z'_x = 2u'_x + v'_x = 3/2$.

ПРИМЕР 3. Найдем производную u' функции $u = u(x)$, определяемой системой равенств

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0.$$

Последние два равенства выражают обращение в нуль отображения F из $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, где $F(x, y, z) = (g(x, y, z), h(x, y, z))$. Согласно теореме о неявном отображении этими равенствами определяется отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ с некоторыми координатными функциями $y(x)$, $z(x)$. Их производные найдем из системы

$$g(x, y(x), z(x)) = 0, \quad h(x, y(x), z(x)) = 0,$$

продифференцировав ее:

$$g'_x + g'_y y' + g'_z z' = 0, \quad h'_x + h'_y y' + h'_z z' = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{g'_z h'_x - g'_x h'_z}{g'_y h'_z - g'_z h'_y}, \quad z' = \frac{g'_x h'_y - g'_y h'_x}{g'_y h'_z - g'_z h'_y}.$$

Производную u' найдем из равенства $u(x) = f(x, y(x), z(x))$, так что $u' = f'_x + f'_y y' + f'_z z'$, где y' , z' найдены выше.

ПРАКТИКА

1. Найти y' , y'' для функций $y(x)$, определяемых уравнениями

$$(1) \ x^2 + 2xy - y^2 = a^2, \quad (2) \ \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

2. Найти z'_x и z'_y в точке $(1, -2)$ для каждой дифференцируемой функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

3. Для функции $z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если

$$(1) \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (2) \ z^3 - 3xyz = a^3.$$

4. Найти z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, если

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

5. Найти z'_x , если $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

6. Найти z'_x, z'_y, z''_{xx} , если $F(x, x + y, x + y + z) = 0$.

7. Пусть $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ — функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

8. Найти $x'(z), y'(z)$, если $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y , если $xu - yv = 0, yu + xv = 1$.

10. В какой области в $\mathbb{R}^2$ переменных x, y система уравнений

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3,$$

где $u, v \in \mathbb{R}$, определяет z как функцию от x, y ? Найти z'_x, z'_y .

11. Найти z''_{xx} , если

$$x = \cos \varphi \cos \psi, \quad y = \sin \varphi \cos \psi, \quad z = \sin \psi.$$

12. Найти z''_{xy} , в точке $u = 2, v = 1$, если

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3, \quad z = 2uv.$$

13. Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y , если

$$x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v.$$

14. Найти дифференциал dz функции $z(x, y)$, определяемой из системы

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad g(x, y, z, t) = 0.$$

15. Показать, что функция $z(x, y)$, определяемая уравнением

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0,$$

где $\Phi(u, v)$ — гладкая функция, a, b — постоянные, является решением уравнения $az'_x + bz'_y = 1$.

16. Показать, что функция $z(x, y)$, определяемая системой уравнений

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln z &= f(\alpha), \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha &= f'(\alpha), \end{aligned}$$

где f — произвольная гладкая функция, удовлетворяет уравнению

$$(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = z^2.$$

17. Показать, что функция $z(x, y)$, определяемая системой уравнений

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha), \\ 0 &= x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha), \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению $z'_x \cdot z'_y = 1$.

18. Показать, что функция $z(x, y)$, определяемая системой уравнений

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ 0 &= x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha), \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению $z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$.

Ответы. **1.** (1) $y' = -\frac{x+y}{x-y}$, $y'' = \frac{2a^2}{(x-y)^3}$, (2) $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; **2.** $z'_x = 0$, $z'_y = -1$, если $z(1, -2) = 0$; $z'_x = -1$, $z'_y = 1/2$, если $z(1, -2) = -2$; $z'_x = 1$, $z'_y = 1/2$, если $z(1, -2) = 2$; **3.** (1) $z'_x = -\frac{x}{z}$, $z'_y = -\frac{y}{z}$, $z''_{xx} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}$, $z''_{xy} = -\frac{xy}{z^3}$, $z''_{yy} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}$; (2) $z'_x = \frac{yz}{z^2-xy}$, $z'_y = \frac{xz}{z^2-xy}$, $z''_{xx} = -\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$, $z''_{yy} = -\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$, $z''_{xy} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$; **4.** $z''_{xx} = -\frac{2}{5}$, $z''_{xy} = -\frac{1}{5}$, $z''_{yy} = -\frac{394}{125}$; **5.** $z'_x = -\frac{F'_1+2xF'_2}{F'_1+2zF'_2}$; **6.** $z'_x = -(1 + \frac{F'_1+F'_2}{F'_3})$, $z'_y = -(1 + \frac{F'_2}{F'_3})$, $z''_{xx} = -F_3'^{-3}(F_3'^2(F_{11}'' + 2F_{12}'' + F_{22}'') - 2(F'_1 + F'_2)F'_3(F_{13}'' + F_{23}'') + (F'_1 + F'_2)^2F_{33}'')$; **8.** $x' = \frac{y-z}{x-y}$, $y' = \frac{z-x}{x-y}$; **9.** $u'_x = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $v'_x = \frac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $u'_y = \frac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $v'_y = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$; **10.** $y \geq \frac{x^2}{2}$, $z'_x = -3uv$, $z'_y = \frac{3}{2}(u+v)$ ($u \neq v$); **11.** $z''_{xx} = -\frac{\sin^2\psi + \cos^2\psi \cos^2\varphi}{\sin^3\psi}$; **12.** $z''_{xy} = \frac{26}{121}$; **13.** $u'_x = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$, $u'_y = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$, $v'_x = \frac{-(e^u - \cos v)}{u(e^u(\sin v - \cos v) + 1)}$, $v'_y = \frac{e^u + \sin v}{u(e^u(\sin v - \cos v) + 1)}$; **14.** $dz = -\frac{I_1 dx + I_2 dy}{I_3}$, где $I_1 = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2 = \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_3 = \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$.