

§ 15. Экстремум

15.1. Экстремум функции, заданной в области.

ТЕОРИЯ

Понятия и факты, относящиеся к экстремуму функции нескольких переменных, близки к таковым для функции одной переменной, хотя многомерность области определения и здесь оказывает некоторое влияние.

Рассмотрим функцию f , действующую из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Точку $a \in D(f)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, называют *точкой локального максимума (минимума)* функции f , если существует такая окрестность U точки a , что $f(x) \leq f(a)$ (соответственно $f(x) \geq f(a)$) для всех $x \in U \cap D(f)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Если для $x \in U \cap D(f)$ выполняется строгое неравенство $f(x) < f(a)$ (соответственно $f(x) > f(a)$), то говорят, что a — *точка строгого локального максимума (минимума)*. Если a — либо точка локального минимума, либо точка локального максимума, то говорят, что a — *точка (локального) экстремума* функции f .

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума). Пусть a — внутренняя точка области определения $D(f)$ функции f , и пусть f дифференцируема в точке a . Тогда если a — точка локального экстремума, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14.1)$$

Внутренние точки из $D(f)$, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называют *стационарными точками* функции f .

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). Пусть f — функция класса $C^2(\Omega)$ на открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $a \in \Omega$ — стационарная точка функции f . Если квадратичная форма

$$d^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (14.2)$$

(от переменных dx_i, dx_j) знакоопределенная, то a — точка строгого локального экстремума, а именно максимума, если $d^2 f(a)$ определено отрицательна, и минимума, если определено положительна. Если $d^2 f(a)$ знаконеопределенная, то в точке a экстремума нет.

Если $d^2 f(a)$ полуопределенная (т. е. она принимает значения одного знака, но может обращаться в нуль на ненулевых значениях переменных), то второй дифференциал не позволяет судить о свойствах функции f , связанных с экстремумом в точке a .

Для выяснения знакоопределенности квадратичной формы можно использовать критерий Сильвестра.

Утверждение. Пусть

$$l = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

— квадратичная форма от переменных u_i, u_j . Тогда l определено положительная в том и только в том случае, если строго положительны все главные (диагональные) миноры матрицы (a_{ij}) , $i, j = 1, \dots, n$.

Условия определенной отрицательности квадратичной формы l получаются из приведенного утверждения применением его к форме $-l$. А именно, квадратичная форма определено отрицательна, если ее главные миноры меняют знак, начиная с отрицательного.

ТЕХНОЛОГИИ

Последовательность действий, выполняемых при исследовании функции на предмет экстремумов, очевидно вытекает из теорем о необходимых и достаточных условиях и состоит в выполнении следующих шагов.

1. Найти частные производные функции по всем переменным.
2. Приравняв найденные частные производные к нулю, решить полученную систему уравнений, т. е. найти стационарные точки.
3. Выписать второй дифференциал как квадратичную форму в каждой из стационарных точек и исследовать знакоопределенность полученных квадратичных форм. Для этого лучше всего составить матрицу второго дифференциала и воспользоваться критерием Сильвестра.

Если второй дифференциал представляет собой полуопределенную квадратичную функцию, то для изучения наличия хотя бы нестрогого экстремума приходится прибегать к изучению индивидуальных особенностей функции, смотреть ее изменение вдоль каких-то направлений или даже вдоль каких-то проходящих через изучаемую точку кривых. Это может вылиться в довольно сложную задачу. Полезно использовать разложение по формуле Тейлора в окрестности стационарной точки.

Задачи поиска экстремума неявно заданной функции основаны на той же теоретической базе, что и задачи нахождения функции, заданной явно. Различие в основном в том, что здесь свои особенности выполнения необходимых условий, в них может оказывать влияние значение функции, и на это нужно обратить внимание.

Пример 1. Найдем точки локального экстремума функции

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Составим систему уравнений

$$f'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \quad f'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \quad f'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0$$

для нахождения стационарных точек, из которой находим единственную в области $x > 0, y > 0, z > 0$ стационарную точку $a(1/2, 1, 1)$. Найдем теперь вторые производные функции f и затем их значения в точке a :

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad f''_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad f''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3},$$

$$f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = -\frac{2z}{y^2},$$

$$f''_{xx}(a) = 4, \quad f''_{yy}(a) = 3, \quad f''_{zz}(a) = 6, \quad f''_{xy}(a) = -2, \quad f''_{yz}(a) = -2.$$

Матрица квадратичной формы $d^2f(a)$ такова:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

и ее главные миноры равны соответственно 4, 8, 32. Значит, $d^2f(a)$ определено положительно и a — точка локального минимума функции f , при этом $f(1/2, 1, 1) = 4$.

ПРАКТИКА

1. Исследовать на экстремум следующие функции:

(1) $u(x, y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3;$

(2) $u(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2;$

$$(3) u(x, y) = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy;$$

$$(4) u(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2;$$

$$(5) u(x, y) = \frac{x+y}{xy} - xy; \quad (6) u(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y;$$

$$(7) u(x, y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}; \quad (8) u(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y};$$

$$(9) u(x, y, z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2;$$

$$(10) u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z;$$

$$(11) u(x, y, z) = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2;$$

$$(12) u(x, y, z) = (x + 7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}.$$

2. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$, заданную неявно условиями:

$$(1) x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z + 8 = 0, z > 2;$$

$$(2) x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0, z > 2.$$

3. Исследовать на строгий экстремум каждую функция $z = z(x, y)$, заданную неявно уравнением:

$$(1) x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0;$$

$$(2) x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0.$$

Ответы.

1. (1) минимум $u(1, 2) = -25$, максимум $u(-1, -2) = 31$; (2) минимум $u(0, 0) = 0$, максимум $u(-5/3, 0) = 125/27$; (3) максимум $u(1, 3) = 9$; (4) максимум $u(0, 0) = 0$, четыре минимума $u(\pm 1/2, \pm 1) = -9/8$; (5) максимум $u(-1, -1) = -3$; (6) минимум $u(4, 2) = 6$; (7) максимум $u(-4, -2) = 8/e^2$; (8) экстремумов нет; (9) максимум $u(-3, 2, -1) = 22$; (10) минимум $u(6, -18, 2) = -112$; (11) минимум $u(8, 4, 2) = 60$; (12) максимум $u(1/10, 0, 7/10) = 5/\sqrt{e}$, минимум $u(-1/10, 0, -7/10) = -5/\sqrt{e}$. **2.** (1) Максимум $z(2, 3) = 5$; (2) максимум $z(3, -1) = 13/3$. **3.** (1) Минимум $z_1(-1, 1) = -5$, максимум $z_2(-1, 1) = 1$; (2) минимум $z_1(-1, 2) = 1$, максимум $z_2(-1, 2) = -2$.

15.2. Условный (относительный) экстремум.

ТЕОРИЯ

Задача нахождения условного (говорят также относительного) экстремума состоит в поиске локальных максимумов и минимумов функции

при условии, что рассматриваются при сравнении со значением в данной точке не все точки из окрестности данной, а только те, которые подчинены некоторым условиям, т. е. экстремума относительно некоторого множества, включающего данную точку. Обычно в качестве таких множеств выступают кривые или поверхности на плоскости или в пространстве. В более общих ситуациях, т. е. в случае пространств большей размерности, такими множествами являются гладкие многообразия, частными случаями которых служат кривые и поверхности.

Пусть дана функция $f(x)$, действующая из открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Пусть, кроме того, даны k функций $h_1(x), \dots, h_k(x)$, $1 \leq k < n$, заданных на Ω . Обозначим через Q множество точек $x \in \Omega$, являющихся решениями системы уравнений $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$. Точку $x_0 \in \Omega$ называют *точкой условного максимума (минимума) функции f относительно множества Q* (или *при условии выполнения связей $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$*), если существует такая ее окрестность U , что $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geq f(x_0)$) для всех $x \in U \cap Q$, т. е. для всех $x \in U$, удовлетворяющих условиям $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$. Если в сравнении значений $f(x)$ и $f(x_0)$ неравенство строгое, то говорят о *строгом условном (относительном) максимуме или минимуме*. Если в данной точке есть либо относительный максимум, либо относительный минимум, то такую точку называют *точкой относительного экстремума*.

Всюду далее будем предполагать, что функции f и $h_1(x), \dots, h_k(x)$ гладкие, т. е. имеют непрерывные частные производные по всем переменным $x_1, \dots, x_n$, и, кроме того, система функций $h_1, \dots, h_k$ обладает свойством невырожденности на множестве Q , т. е. ранг матрицы Якоби $\frac{\partial(h_1, \dots, h_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ равен k во всех точках множества Q .

Изучение относительного экстремума можно свести к исследованию экстремума функции в области пространства соответствующей размерности, если удастся как-либо параметризовать кривую или поверхность (многообразие). Тогда надо пересадить функцию в пространство параметров и исследовать ее экстремум. Однако такое удастся далеко не всегда, и на помощь может прийти метод множителей Лагранжа.

Теорема 1 (необходимое условие относительного экстремума). Пусть $x \in \Omega$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, — точка экстремума функции f при условиях

$$h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0. \quad (14.3)$$

Тогда найдутся такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, что функция Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(x_1, \dots, x_n)$$

имеет в точке x нулевые частные производные по переменным $x_1, \dots, x_n$.

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ называют множителями Лагранжа.

Теорема 2 (достаточное условие относительного экстремума). Предположим, что функции $f, h_1, \dots, h_k$ дважды гладкие в Ω , т. е. имеют в каждой точке из Ω непрерывные частные производные второго порядка по всем переменным. Предположим также, что в точке $x \in \Omega$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, такой, что $h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0$, выполнены необходимые условия экстремума, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Составим квадратичную форму

$$d^2 L(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (14.5)$$

(от переменных dx_i, dx_j) и рассмотрим ее сужение на подпространство $H \subset \mathbb{R}^n$, ортогональное градиентам $\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_k(x)$. Тогда если $d^2 L(x)$, рассматриваемая только на H , знакоопределенная, то x — точка строгого относительного экстремума, а именно строгого максимума в случае определенно отрицательной и строгого минимума для определенно положительной квадратичной формы.

ТЕХНОЛОГИИ

Шаги, предпринимаемые для исследования относительного экстремума, могут быть следующими.

1. Посмотреть, можно ли выразить из уравнений связи часть переменных с тем, чтобы получить задачу об экстремуме функции на множестве (меньшего числа переменных). Если такое возможно, проделать все шаги изучения обычного экстремума.

2. Если выражение невозможно или проблематично, надо составить функцию Лагранжа, предписанную теоремой 1, найти ее частные производные и приравнять их к нулю. Тем самым для нахождения n координат точки x , в которой возможен условный экстремум, и k множителей

Лагранжа в нашем распоряжении оказываются $k + n$ уравнений

$$h_1(x) = 0, \dots, h_k(x) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0. \quad (15.1)$$

3. Решить полученную систему, т. е. найти координаты стационарных точек и соответствующие им значения множителей Лагранжа.

4. Применить теорему о достаточных условиях относительного экстремума. Для этого придется записать сужение второго дифференциала на подпространство, ортогональное градиентам всех функций, формирующих уравнения связей. Технически для нахождения сужения квадратичной формы $d^2L(x)$ от переменных $dx_1, \dots, dx_n$ в стационарной точке x на подпространство H надо составить систему уравнений

$$\langle \nabla h_1(x) | dx \rangle = 0, \dots, \langle \nabla h_k(x) | dx \rangle = 0, \quad (14.6)$$

где $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$, т. е. систему

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (14.7)$$

выразить $n - k$ переменных через оставшиеся и, подставив их в $d^2L(x)$, получить второй дифференциал только на подпространстве H .

5. Ограниченная на подпространство H квадратичная форма второго дифференциала может дать результат об относительном экстремуме.

ПРИМЕР 1. Изучим экстремум функции $z = xy$ при условии $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, т. е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Нетрудно понять, что здесь нетрудно параметризовать окружность и перейти к изучению экстремума функции одной переменной. В целях пояснения применения средств, связанных с методом Лагранжа, проделаем на этом простом примере все предписанные методом действия.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Из системы

$$L'_x = y + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

находим $\lambda = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а также $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Изучим подробно задачу для одного из найденных значений λ и одной из точек, удовлетворяющих при выбранном λ необходимым условиям, другие случаи разбираются аналогично. Пусть $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем

$$L''_{xy} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1, \quad L''_{xx} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = L''_{yy} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\lambda = 1.$$

Таким образом,

$$d^2 L \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (dx, dy) = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = (dx + dy)^2.$$

Эта квадратичная форма полуопределенная на $\mathbb{R}^2$ — она принимает неотрицательные значения и обращается в нуль на прямой $dx = -dy$. Если бы мы получили форму, знакоопределенную на всем $\mathbb{R}^2$, то далее нам ничего делать не надо было — она была бы знакоопределенной и на требуемом подпространстве, откуда мы могли бы сделать заключение о наличии условного экстремума. Но наша ситуация не такая, и нам придется заниматься сужением второго дифференциала на подпространство, ортогональное градиенту $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)$ функции $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ в точке $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Такое подпространство представляет собой прямую

$$\{(dx, dy) : dx \cdot \sqrt{2} - dy \cdot \sqrt{2} = 0\}.$$

Выражая, например, dy через dx и подставляя полученное выражение в $d^2 L \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, получаем $d^2 L \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Big|_{dy=dx} = (2dx)^2$, и поскольку полученная квадратичная форма (уже от одной переменной) определено положительна, в точке $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ достигается минимум функции $z = xy$ относительно множества $x^2 + y^2 = 1$.

ПРИМЕР 2. Изучим экстремум функции $u(x, y) = x^2 - y^2$ при условии $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

И в этом примере вместо обращения к параметризации покажем, как используется метод Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Из системы

$$L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = -2y + 2\lambda y = 0$$

находим $\lambda = 1$ и $x = 0$, $y = \pm 1$, а также $\lambda = -1$ и $x = \pm 1$, $y = 0$.

Изучим подробно одну из найденных точек, а именно точку $x = 0$, $y = 1$ с соответствующим ей значением $\lambda = 1$. Найдем

$$L''_{xx} = 2 + 2\lambda, \quad L''_{yy} = -2 + 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0.$$

Составим

$$d^2L(0,1)(dx, dy) = 4dx^2.$$

Она принимает неотрицательные значения, но обращается в нуль на множестве $dx = 0$, $dy \in \mathbb{R}$, так что не будет знакоопределенной. Найдем градиент $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)$ и $\nabla h(0, 1) = (0, 2)$. На подпространстве, состоящем из точек (dx, dy) таких, что $(dx, dy) \perp \nabla h(0, 1)$, т. е. удовлетворяющих уравнению $0 \cdot dx + 2 \cdot dy = 0$, или $dy = 0$, приходим к квадратичной форме $4dx^2$, но уже рассматриваемой не на всех (dx, dy) , а только на одномерном пространстве $dx \in \mathbb{R}$, $dy = 0$, на котором она определена положительно. В итоге получаем, что у данной функции достигается относительный минимум в рассматриваемой точке.

ПРИМЕР 3. Изучим экстремум функции $f(x, y, z) = xyz$ на множестве $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $h_2(x, y, z) = x + y + z = 0$.

В этом примере параметризация не столь проста, сколь в предыдущих, поэтому применим метод Лагранжа по существу, а не ради тренировки.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z).$$

Найдем первые производные:

$$L'_x = yz + 2\lambda x + \mu, \quad L'_y = xz + 2\lambda y + \mu, \quad L'_z = xy + 2\lambda z + \mu.$$

Решим систему уравнений

$$yz + 2\lambda x + \mu = 0, \quad xz + 2\lambda y + \mu = 0, \quad xy + 2\lambda z + \mu = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

Сложим первые три уравнения, результат умножим на 2, прибавим к нему четвертое уравнение и учтем пятое. В итоге получим $\mu = 1/6$. Теперь вычтем из первого уравнения второе, из второго третье и из третьего первое. Приходим к системе

$$(y - x)(z - 2\lambda) = 0, \quad (z - y)(x - 2\lambda) = 0, \quad (x - z)(y - 2\lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

Если в первом уравнении $y = x$, то во втором и третьем первые множители в нуль не обращаются, так что $x = y = 2\lambda$. Подставив эту информацию в последние два уравнения, найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \mp \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Аналогично, полагая во втором уравнении $y = z$ и в третьем $x = z$, можно получить еще четыре корня.

Изучим подробно точку M с координатами

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

с соответствующими ей $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\mu = \frac{1}{6}$, оставив читателю изучение остальных пяти. Найдем

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = z, \quad L''_{xz} = y, \quad L''_{yz} = x.$$

Тогда

$$d^2 L(M)(dx, dy, dz) = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\sqrt{\frac{2}{3}}dxdy + \frac{2}{\sqrt{6}}dydz + \frac{2}{\sqrt{6}}dzdx.$$

Образует подпространство, ортогональное градиентам функций связи

$$\nabla h_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

и

$$\begin{aligned} \nabla h_1(x, y, z) &= (2x, 2y, 2z)|_{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})} \\ &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{6}}(1, 1, -2). \end{aligned}$$

Это будет одномерное подпространство, состоящее из таких (dx, dy, dz) , что

$$dx + dy - 2dz = 0, \quad dx + dy + dz = 0.$$

Выразим dy, dz через dx : $dy = -dx$, $dz = 0$. Квадратичная форма $d^2L(M)(dx, dy, dz)$ на полученном подпространстве примет вид

$$d^2L(M)(dx, dy, dz) = \frac{2}{\sqrt{6}}dx^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}dx^2 = \sqrt{6}dx^2,$$

так что будет определено положительно. Таким образом, в точке M функция f на рассматриваемом множестве достигает относительного минимума $f(M) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

ПРАКТИКА

Исследовать на экстремум функции u при указанных условиях связи:

- (1) $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad 3x + 2y - 6 = 0$;
- (2) $u(x, y) = x^2 - y^2, \quad 2x - y - 3 = 0$;
- (3) $u(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1$;
- (4) $u(x, y) = 2x^2 + 12xy + y^2, \quad x^2 + 4y^2 = 1$;
- (5) $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$;
- (6) $u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$;
- (7) $u(x, y, z) = xy^2z^3, \quad x + y + z = 12, \quad x > 0, y > 0, z > 0$;
- (8) $u(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$;
- (9) $u(x, y, z) = xy + yz, \quad x^2 + y^2 = 2, y + z = 2, x > 0, y > 0, z > 0$;
- (10) $u(x, y, z) = xyz, \quad xy + yz + zx = 8, x + y + z = 5$.

Ответы.

(1) Минимум $u(18/13, 12/13) = 36/13$; (2) максимум $u(2, 1) = 3$; (3) два минимума $u(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2}) = 1/2$ и два максимума $u(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) = 3/2$; (4) два минимума $u(\pm \frac{3}{5}, \mp \frac{2}{5}) = -50$ и два максимума $u(\pm \frac{4}{5}, \pm \frac{3}{10}) = 425/4$; (5) минимум $u(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; (6) $u(\frac{ab^2}{b^2-a^2}, \frac{a^2b}{a^2-b^2}) = \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$, минимум, если $a^2 > b^2$, максимум, если $a^2 < b^2$, нет экстремума при $a^2 = b^2$; (7) максимум $u(2, 4, 6) = 6912$; (8) минимумы $u(1, 1, -1) = u(1, -1, 1) = u(-1, 1, 1) = u(-1, -1, -1) = -1$, максимумы

$u(1, 1, 1) = u(1, -1, -1) = u(-1, -1, 1) = u(-1, 1, -1) = 1$; (9) максимум $u(1, 1, 1) = 2$; (10) минимумы $u(2, 2, 1) = u(2, 1, 2) = u(1, 2, 2) = 4$, максимумы $u(4/3, 4/3, 7/3) = u(4/3, 7/3, 4/3) = u(7/3, 4/3, 4/3) = 112/27$.