§ 16. Криволинейные координаты. Замена переменных в дифференциальных выражениях

Замена переменных в дифференциальных выражениях (или уравнениях) — весьма важная тема, ибо эта операция постоянно встречается во всех вопросах, связанных с дифференциальными уравнениями. В учебной литературе довольно подробно описаны технические манипуляции, сопровождающие замену. Однако далеко не всегда можно встретить описание того, что лежит в основе замены. Вместе с тем понимание связанных с заменой базовых положений оказывает существенное положительное влияние на усвоение этой темы и формирует способность анализировать появляющиеся в связи с заменой ситуаций.

Замену сопровождают сравнительно устойчивые словосочетания «перейдем к новым координатам», «перейдем к новым переменным» или «запишем в криволинейных координатах», и полезно знать, что скрывается за этими словами.

Криволинейные координаты.

Математическое описание какого-либо процесса нередко сопровождается выделением набора его числовых характеристик и заданием некоторой числовой величины, характеризующей процесс. Иначе говоря, такое описание приводит к фиксации конечномерного арифметического пространства и заданию (числовой) функции на некоторой его открытой области. Пусть переменные этого пространства обозначены через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а функция — через $f(x)$. Как правило, в описании процесса большую роль играет не только сама функция, но и скорость ее изменения по тем или иным координатным направлениям, т. е. частные производные функции. Не всегда координатные направления в рамках выбранных переменных x обеспечивают сравнительно простые свойства скорости изменения функции, т. е. не всегда приводят к несложным соотношениям (как правило уравнениям) относительно частных производных. И тогда можно попробовать посмотреть, как изменяется функция вдоль других линий.

Для формирования подходящего математического аппарата заметим, что положение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точки x можно описать так. Фиксируем какую-то одну из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а остальные оставим меняющимися. Множество таких точек образует некоторую координатную (гипер)плоскость в $\mathbb{R}^n$. Тогда наша точка x может быть охарактеризована как точка, находящаяся на пересечении всех этих плоскостей.

Предположим, что мы хотим использовать другой набор чисел $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ для описания положения той же самой точки. Естественно, что он должен быть связан с исходным набором $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ некоторой зависимостью. Иначе говоря, предположим, что на открытой области Ω изменения переменной u задан достаточно гладкий диффеоморфизм Φ такой, что $x = \Phi(u)$. Расположение точки x на пересечении плоскостей $x_k = \mathrm{const}$ можно в терминах u описать как расположение этой точки на пересечении поверхностей $\{x : x = \Phi(u), u_k = \mathrm{const}\}$, т. е. на этот раз на пересечении множеств, не являющихся плоскими (с точки зрения переменных x). Исходя из такой возможности, набор чисел $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ называют *криволинейными координатами точки* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, говоря при этом о самих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как о *исходных* или *канонических координатах.*

Допустим, что рассматриваемый процесс был описан каким-то уравнением, в котором участвовала функция $y = f(x)$, а также ее производные до порядка k, т. е. уравнением $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}) = 0$, где F — некоторая достаточно гладкая функция, а $y', y'', \ldots, y^{(k)}$ — частные производные функции y по каким-то наборам переменных. Пусть мы вводим новые переменные u, связанные со старыми переменными x зависимостью $x = \Phi(u)$ или зависимостью $u = \Psi(x)$. Естественно ставится задача: используя формулу перехода между переменными, узнать, в какое уравнение относительно новых переменных преобразуется имевшееся уравнение?

При замене переменных встречаются следующие две ситуации.

(1) Преобразование затрагивает только независимые переменные и не касается значений функции.

(2) Преобразование действует не только на аргументы, но и на значения функции.

В принципе, всё можно обработать, используя относящиеся ко второму случаю соображения, однако первый случай допускает более простую процедуру выполнения замены.

Приведем рекомендации по выполнению замены в каждом из случаев (1), (2).

16.1. Замена, затрагивающая только независимые переменные.

ТЕОРИЯ

Образно ситуацию, в которой затрагиваются только аргументы, можно описывать, например, так. Представим себе, что для функции, например, двух переменных ее область рассмотрения выполнена из деформируемого материала (типа резины) и над каждой точкой этой области расположен жесткий стержень, олицетворяющий значение функции. Выполнение преобразования аргументов можно мыслить как деформацию области соответствующего качества, а сохранение значений функции — как перенос вместе с каждой точкой расположенного над ней стержня. Получается снова какая-то функция, которую естественно считать результатом перехода к новым переменным (пересадки старой функции в новые переменные).

Пусть вводятся новые (независимые) переменные u, связанные со старыми (независимыми) переменными x зависимостью $x = \Phi(u)$ или зависимостью $u = \Psi(x)$. Естественно ставится задача: используя формулу перехода между переменными, узнать, в какое уравнение относительно новых переменных преобразуется имевшееся уравнение? Поскольку при указанных обстоятельствах значения функции не затрагиваются, для ее обозначения можно использовать ту же букву, которая использовалась для заданной функции (что нередко и делают), однако лучше этой традиции по крайней мере на первых порах не следовать для большей внятности выполняемых манипуляций и во избежание недоразумений.

Предположим, что выбрана связывающая точки x и u зависимость $x = \Phi(u)$, $u \in \Omega$, где Ω — открытая область изменения переменной u, или $u = \Psi(x)$, $x \in Q$, где Q — открытая область изменения переменной x. Точки, переходящие друг в друга при заданной зависимости, будем называть *соответственными.*

Принцип определения новой функции. Пусть задана функция $y = f(x)$. Определим новую функцию $w = g(u)$, полагая, что *значения новой и старой функций в соответственных точках совпадают*, т. е. выполнено равенство

$$g(u) = f(x) \tag{16.1}$$

для взаимосвязанных точек x, u.

Равенство (16.1) в зависимости от заданной замены превращается

либо в равенство
$$g(u) = f(\Phi(u)), \quad u \in \Omega, \tag{16.2}$$
если задана зависимость $x = \Phi(u)$ между координатами x, u, либо в равенство
$$g(\Psi(x)) = f(x), \quad x \in Q, \tag{16.3}$$
при заданной зависимости $u = \Psi(x)$.

ТЕХНОЛОГИИ

Каждое из равенств (16.1), (16.2) фиксирует тождество на открытом множестве соответствующего пространства, позволяющее не только пересадить функцию с одних переменных в другие, но при достаточной гладкости и невырожденности участвующих в рассмотрении функций и отображений (что всегда предполагается без дополнительных оговорок) выразить производные одной из функций через производные и значения другой из них. Для такого выражения достаточно продифференцировать определяющее замену тождество, из получаемых при этом равенств выразить производные старой функции и подставить их выражения в соотношение (как правило, это уравнение), характеризующее старую функцию.

В примерах при $n = 2$ или $n = 3$ вместо обозначения x_1, x_2 или x_1, x_2, x_3 для координат точки будем использовать привычные буквы x, y или соответственно x, y, z. Для криволинейных координат чаще всего будем использовать буквы u, v, w или иногда греческие ξ, η, ζ

Для выполнения замены в случае (1), т. е. при участии только независимых переменных, надо записать конкретное проявление либо равенства (16.1), либо равенства (16.2) в зависимости от того, из каких переменных в какие действует задающее замену отображение, и затем дифференцировать записанное равенство требуемое количество раз. Выпишем такие равенства в простейших чаще всего встречающихся случаях.

1. Пусть дана функция $y = f(x)$, тем самым переменная x считается старой переменной, а функция f — старой функцией. Пусть требуется перейти к новой переменной t. Пересаженную в новую переменную функцию обозначим через g. Согласно договоренности эти функции связаны равенством
$$f(x) = g(t), \tag{16.4}$$

где x и t — точки, переходящие одна в другую при замене переменной. Если задано отображение $x = \varphi(t)$, действующее из новой переменной в старую. g. то равенство (16.4) превратится в равенство

$$f(\varphi(t)) = g(t),$$

которое и надлежит дифференцировать для выражения производных старой функции через производные новой. Если же замена осуществляется с помощью отображения $t = \psi(x)$. то (16.4) запишется так:

$$f(x) = g(\psi(x)),$$

и теперь надо дифференцировать это равенство.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$ и ставится задача перейти к новым переменным u, v. Сохранившуюся функцию в новых переменных обозначим через w. Равенство (16.2), выражающее сохранение значений при замене, запишется так:

$$f(x, y) = g(u, v), \tag{16.5}$$

где пары (x, y) и (u, v) переходят одна в другую при замене.

Если задано отображение Φ, действующее из старых переменных x, y в новые u, v, т. е. заданы функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, то равенство (16.5) станет таким:

$$f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)).$$

Если же задано отображение Ψ из новых переменных в старые, т. е. заданы функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, то (16.5) выглядит так:

$$f(x(u, v), y(u, v)) = g(u, v).$$

Аналогично поступают и в случае трех переменных.

Напомним, что в $\mathbb{R}^2$ одни из самых распространенных криволинейных координат — это *полярные координаты* r, φ, связь которых с каноническими координатами x, y осуществляется по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. В пространстве $\mathbb{R}^3$ часто используют (географические) *сферические* координаты r, φ, ψ, связанные с x, y, z формулами

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$
$$r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \psi \in (-\pi/2, \pi/2),$$

или (физические) сферические координаты r, φ, θ такие, что

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$
$$r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \theta \in (0, \pi).$$

Пример 1. Преобразуем уравнение $x^2y'' + xy' + y = 0$, вводя новую переменную t, связанную с переменной x равенством $x = e^t$. Обозначим новую функцию, получаемую переносом функции $y(x)$ в область переменной t, через w и запишем равенство, выражающее совпадение старой и новой функций в соответственных точках. Согласно нашей договоренности должно быть $y(x) = w(t)$ для таких x и t, что $x = e^t$. Подставляя в выписанное выше равенство на место x его выражение через t, мы приходим к тождеству, полностью определяющему новую функцию:

$$y(e^t) = w(t)$$

Продифференцируем его по t:

$$y'(e^t)e^t = w'(t). \tag{$*$}$$

Мы указали точки, в которых взяты производные, для того, чтобы на следующем шаге при дифференцировании учесть все зависимости от t. Поскольку третьей производной брать в этом примере не требуется, в записи второй производной указание аргументов всюду опустим (для краткости). Дифференцируя равенство ($*$), имеем

$$y''e^{2t} + y'e^t = w''. \tag{$**$}$$

Выразим из равенств ($*$), ($**$) y', y'':

$$y' = w'e^{-t}, \quad y'' = (w'' - y'e^t)e^{-2t} = (w'' - w')e^{-2t}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, приходим к соответствующему ему уравнению относительно новой переменной и новой функции:

$$e^{2t}(w'' - w')e^{-2t} + e^tw'e^{-t} + w = 0,$$

или $w'' + w = 0$.

Пример 2. Преобразуем уравнение $yz'_x - xz'_y = 0$, вводя новые переменные ξ, η, связанные с переменными x, y равенствами $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$.

Запишем определяющее новую функцию $w = w(\xi, \eta)$ равенство, отразив в нем тот факт, что в точках $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$ значения новой и старой функций совпадают:

$$w(x, x^2 + y^2) = z(x, y).$$

Продифференцируем его по x и по y. Так как нам не требуется дифференцировать второй раз (в уравнении нет вторых производных), мы не будем записывать указание точек, в которых берутся соответствующие производные. Имеем

$$w'_\xi + w'_\eta \cdot 2x = z'_x, \quad w'_\eta \cdot 2y = z'_y.$$

Полученные для z'_x, z'_y выражения подставим в исходное уравнение, пока не занимаясь выражением старых переменных через новые и оставляя тем самым старые переменные в получаемом равенстве: $y \cdot w'_\xi + 2xyw'_\eta - 2xyw'_\eta = 0$, откуда приходим к уравнению $y \cdot w'_\xi = 0$. Ясно, что в области переменных ξ, η, соответствующей неравенству $y \neq 0$, т. е. в области, где $\eta \neq \xi^2$, уравнение становится таким: $w'_\xi = 0$. Этому уравнению будет удовлетворят произвольная гладкая функция $\varphi(\eta)$, зависящая только от η, так что решением этого уравнения будет функция $w(\xi, \eta) = \varphi(\eta)$. Возвращаясь к исходному уравнению, можно утверждать, что в области, где $y \neq 0$, его решением будет функция $z(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, где φ — произвольная гладкая функция.

Пример 3. Преобразуем уравнение $xz'_x + \sqrt{1 + y^2}z'_y = xy$, переходя к новым переменным $u = \ln x$, $v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Новая функция $w(u, v)$ будет связана со старой $z(x, y)$ выполнением равенства в соответствующих точках:

$$w(\ln x, \ln(y + \sqrt{1 + y^2})) = z(x, y). \tag{*}$$

Продифференцируем равенство (*) по x и по y:

$$w'_u \cdot \frac{1}{x} = z'_x, \quad w'_v \cdot \frac{1}{y + \sqrt{1 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\right) = z_y,$$

откуда, упрощая, имеем

$$z'_x = \frac{w_u}{x}, \quad z'_y = \frac{w_v}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Выражая x, y через u, v, т. е. $x = e^u$, $y = \operatorname{sh} v$, и подставляя все в исходное уравнение, приходим к уравнению $w'_u + w'_v = e^u \operatorname{sh} v$.

ПРАКТИКА

1. Перейти к новым переменным в следующих уравнениях:

(1) $y''' = \dfrac{6y}{x^3}$, $t = \ln|x|$;

(2) $(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$, $x = \cos t$.

2. Вводя новые переменные ξ, η, решить уравнения:

(1) $z'_x = z'_y$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$;

(2) $xz'_x + yz'_y = z$, $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{x}$.

3. Приняв u, v за новые переменные, преобразовать уравнения:

(1) $(x+y)z'_x - (x-y)z'_y = 0$, $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

(2) $(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 0$, $x = uv$, $y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$;

(3) $ax^2z''_{xx} + 2bxyz''_{xy} + cy^2z''_{yy} = 0$, $u = \ln x$, $v = \ln y$;

(4) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

(5) $z''_{xx} + z''_{yy} + z = 0$, $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$;

(6) $xz''_{xx} - yz''_{yy} = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$, $x = (u+v)^2$, $y = (u-v)^2$;

(7) $x^2z''_{xx} - y^2z''_{yy} = 0$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$;

(8) $x^2z''_{xx} - (x^2+y^2)z''_{xy} + y^2z''_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

4. С помощью линейной замены $\xi = x + \lambda y$, $\eta = x + \mu y$ преобразовать уравнение $Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} = 0$, где A, B, C — постоянные и $AC - B^2 < 0$, к виду $u''_{\xi\eta} = 0$.

5. Доказать, что вид уравнения Лапласа $\Delta z = z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ не меняется при любой невырожденной замене переменных $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, удовлетворяющей условиям $\varphi'_u = \psi'_v$, $\varphi'_v = -\psi'_u$.

Ответы.

1. (1) $y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t - 6y = 0$; (2) $y''_{t^2} + n^2y = 0$. **2.** (1) $z = \varphi(x+y)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция; (2) $z = x\varphi\big(\frac{y}{x}\big)$. **3.** (1) $z'_u = z'_v$; (2) $(z'_u)^2 + (z'_v)^2 = 0$; (3) $a\big(z''_{u^2} - z'_u\big) + 2bz''_{uv} + b\big(z''_{v^2} - z'_v\big) = 0$; (4) $z''_{u^2} + z''_{v^2} = 0$; (5) $z''_{u^2} + z''_{v^2} + e^{2u}z = 0$; (6) $z''_{uv} + \frac{1}{u^2-v^2}(vz'_u - uz'_v) = 0$; (7) $z''_{uv} = \frac{1}{2u}z'_v$; (8) $z''_{uv} = \frac{2}{u(4-uv)}z'_v$.

16.2. Замена, затрагивающая не только независимые переменные, но и значения функции.

ТЕОРИЯ

Рассмотрим ситуацию, в которой может меняться всё — как независимые переменные, так и значения функции. Наша ближайшая задача — получить равенство, определяющее связь между старой и новой функциями и тем самым задающее новую функцию. Для этого обратимся к такой замене с точки зрения преобразования графиков функций.

Образно ситуацию этого случая удобно интерпретировать с помощью преобразования графика функции двух переменных. Представим себе, что для функции двух переменных поверхность в пространстве, являющаяся ее графиком, находится в открытой области пространства, заполненной деформируемым материалом (типа пластилина). Преобразование, затрагивающее значения функции, должно действовать на весь связанный с функцией комплекс, т. е. на ее график, позволяя вместе с точками из области определения изменять значения функции. Тем самым в этом случае должно быть задано отображение из пространства также в пространство. В результате деформации, соответствующей заданному преобразованию, график превращается в некоторую поверхность, и может оказаться графиком какой-то функции. Ее естественно считать новой функцией, полученной в результате выполнения замены. Отразим изложенные соображения в формальном тексте.

Как известно, график отображения $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, где X, Y — какие-то множества, это множество таких упорядоченных пар $(x, y) \in X \times Y$, для которых $y = f(x)$.

Пусть задана функция $f(x)$ на некотором открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащем график функции f, задано достаточно гладкое невырожденное отображение Φ, взаимно однозначно отображающее это множество на множество $Q \in \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через Ψ обратное к Φ отображение. Точки, переходящие друг в друга при этих отображениях, будем называть *соответственными*. Ввиду гладкости и невырожденности Φ образ $\Phi[\mathrm{gr}(f)]$ графика $\mathrm{gr}(f)$ функции f будет (по крайней мере локально) графиком некоторой функции, действующей из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Принцип определения новой функции. *График старой функции f взаимно однозначно отображается на график новой функции w.*

Не уменьшая общности, будем считать, что новая функция w действует из первых n переменных в последнюю.

Займемся составлением равенства, отражающего указанную выше договоренность и позволяющего выразить производные старой функции через производные новой. Обозначим точки старого $(n+1)$-мерного пространства через $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, а нового — $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$, Обозначим через $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n+1}$ координатные функции отображения Φ, а через $\Psi_1, \ldots, \Psi_{n+1}$ — отображения Ψ. Допустим, что задано отображение Φ, действующее из старых переменных в новые. Пусть $(x, f(x))$ — точка графика f. Ее образом является точка

$$(\Phi_1(x, f(x)), \ldots, \Phi_n(x, f(x)), \Phi_{n+1}(x, f(x))).$$

Согласно определению графика и нашей договоренности *последняя координата* $\Phi_{n+1}(x, f(x))$ *должна быть значением функции* w *на первых* n *координатах*, т. е.

$$\Phi_{n+1}(x, f(x)) = w(\Phi_1(x, f(x)), \ldots, \Phi_n(x, f(x)) \tag{16.6}$$

Если же задано отображение Ψ, действующее из новых переменных в старые и $(u, w(u))$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, — точка графика новой функции, то образом ее при отображении Ψ будет точка

$$(\Psi_1(u, w(u)), \ldots, \Psi_n(u, w(u)), \Psi_{n+1}(u, w(u))).$$

Согласно определению графика и нашей договоренности *последняя координата* $\Psi_{n+1}(u, w(u))$ *должна быть значением функции* f *на первых* n *координатах*, т. е.

$$\Psi_{n+1}(u, w(u)) = f(\Psi_1(u, w(u)), \ldots, \Psi_n(u, w(u))) \tag{16.7}$$

Требуемые производные f'_{x_k}, $k = 1, \ldots, n$, и т. д. могут быть найдены из равенств, получаемых в результате дифференцирования определяющего новую функцию равенства.

ТЕХНОЛОГИИ

Как и в случае действия замены только на независимые переменные, в рассматриваемой ситуации технология выполнения действий по замене, по существу, заложена в договоренностях, определяющих замену. Выпишем проявления равенств (16.6), (16.7) в простейших частных случаях.

Пусть дана функция $y = f(x)$, которую считаем старой функцией, и требуется перейти к новой функции $w = g(t)$.

Если дано отображение $(x, y) \mapsto (t, w)$ из старых переменных (x, y) в новые (t, w), затрагивающее значения функции, т. е. $t = t(x, y)$, $w = w(x, y)$, то словосочетание «последняя координата есть значение новой функции на остальных (т. е. на первой координате)», а именно отражающее его равенство (16.6), выглядит так:

$$w(x, f(x)) = g(t(x, f(x))).$$

Если дано отображение $(t, w) \mapsto (x, y)$ из новых переменных (t, w) в старые (x, y), т. е. $x = x(t, w)$, $y = y(t, w)$, то соответствующее равенство (16.7) таково:

$$y(t, w(t)) = f(x(t, w(t))).$$

Пусть дана функция $z = f(x, y)$ от переменных x, y (старая функция) и надо перейти к (новой) функции $w = g(u, v)$ от переменных u, v.

Предположим, что задано отображение $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, т. е. заданы функции $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. Тогда надо обратиться к проявлению равенства (16.6) и в этом случае оно станет таким:

$$w(x, y, f(x, y)) = g(u(x, y, f(x, y)), v(x, y, f(x, y))).$$

Если задано отображение $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$, т. е. заданы функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, то надо обратиться к равенству (16.7), имеющему на этот раз вид

$$z(x, y, g(x, y)) = f(u(x, y, g(x, y)), v(x, y, g(x, y))).$$

Пример 1. Преобразуем уравнение $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, если $x = u + t$, $y = u - t$ и $u = u(t)$.

Здесь задано отображение $(t, u) \mapsto (x, y)$, действующее из новых переменных в старые, так что новая функция $u = u(t)$ будет характеризоваться следующим обстоятельством: если взять точку $(t, u(t))$ графика новой функции, то ее образ, т. е. точка $(u(t)+t, u(t)-t)$, будет точкой графика функции $y = y(x)$, а это значит, что последняя координата $u(t) - t$ равна значению функции y на первой координате $u(t) + t$:

$$u(t) - t = y(u(t) + t). \tag{$*$}$$

Дифференцируя равенство $(*)$ дважды, получаем

$$u'(t) - 1 = y'(u(t) + t) \cdot (u'(t) + 1), \quad u'' = y''(u' + 1)^2 + y'u''.$$

Из этих равенств имеем

$$y' = \frac{u'-1}{u'+1}, \quad y'' = \frac{u''(1-y')}{(u'+1)^2} = u''\frac{2}{(u'+1)^3}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, приходим к уравнению $u'' + 8u(u')^3 = 0$.

Пример 2. Решим уравнение $az'_x + bz'_y = 1$, вводя новые переменные ξ, η, связанные со старыми равенствами $\xi = x$, $\eta = y - bz$.

Заметим, что замена определена только двумя равенствами, хотя в них участвуют не только переменные x, y, но и третья переменная z. В таких формулировках будем дополнять данное преобразование до отображения из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, считая, что *последняя координата остается неизменной*, т. е. происходит отображение $(x, y, z) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x$, $\eta = y - bz$, $\zeta = z$.

Обозначим новую функцию через w и выпишем равенство, ее определяющее. Точка графика $(x, y, z(x, y))$ функции z перейдет при нашем преобразовании в точку $(x, y - bz(x, y), z(x, y))$, и согласно договоренности эта точка должна быть точкой графика функции w, что означает выполнение равенства

$$z(x, y) = w(x, y - bz(x, y)).$$

Дифференцируя его по x и по y, находим

$$z'_x = w'_\xi + w'_\eta \cdot (-bz'_x), \quad z'_y = w'_\eta \cdot (1 - bz'_y),$$

откуда

$$z'_x = \frac{w'_\xi}{1 + bw'_\eta}, \quad z'_y = \frac{w'_\eta}{1 + bw'_\eta}.$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{aw'_\xi}{1 + bw'_\eta} + \frac{bw'_\eta}{1 + bw'_\eta} = 1,$$

или $aw'_\xi = 1$. Этому уравнению удовлетворяет функция $w = \dfrac{\xi}{a} + \varphi(\eta)$, где φ — произвольная гладкая функция. Вернувшись к переменным x, y, получим

$$z(x, y) = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz(x, y)).$$

Пример 3. Преобразуем уравнение $(x-z)z'_x + yz'_y = 0$, взяв x за функцию, а y, z — за независимые переменные. Такая формулировка означает, что надо перейти в уравнении к новым переменным u, v и функции $w(u,v)$, связанным со старыми соотношением $(x,y,z) \mapsto (u,v,w)$, где $u = y$, $v = z$, $w = x$, т. е. тот факт, что x следует считать функцией, означает требование расположить x на последнем месте, оставив на первых двух переменные y и z. Запишем соотношение для преобразования точек графика: $(x, y, z(x,y)) \mapsto (y, z(x,y), x)$. Тем самым определяющее функцию w равенство таково:

$$x = w(y, z(x,y))$$

Продифференцируем его по x и по y:

$$1 = w'_v \cdot z'_x, \quad 0 = w'_u + w'_v \cdot z'_y,$$

откуда

$$z'_x = \frac{1}{w'_v}, \quad z'_y = -\frac{w'_u}{w'_v}.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\frac{w-v}{w'_v} - \frac{uw'_u}{w'_v} = 0,$$

или $uw'_u = v - w$. Это уравнение, записанное в переменных x, y, z, имеет вид $y \cdot x'_y = z - x$.

Пример 4. Преобразуем уравнение $yz''_{yy} + 2z'_y = \dfrac{2}{x}$, принимая u, v за новые переменные, а $w(u,v)$ — за новую функцию, где переменные (x,y,z) и (u,v,w) связаны соотношениями $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

Точка $(x, y, z(x,y))$ графика z перейдет в точку $\left(\dfrac{x}{y}, x, xz(x,y) - y\right)$, так что определяющее функцию w равенство таково:

$$xz(x,y) - y = w\left(\frac{x}{y}, x\right). \qquad (*)$$

Продифференцируем тождество $(*)$ по y:

$$xz'_y(x,y) - 1 = w'_u\left(\frac{x}{y}, x\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

и полученное равенство еще раз по y:

$$xz''_{yy} = w''_{uu}\frac{x^2}{y^4} + w'_u\frac{2x}{y^3}.$$

Отсюда

$$z'_y = \frac{1}{x} - \frac{w'_u}{y^2}, \quad z''_{yy} = \frac{x}{y^4}w''_{uu} + \frac{2}{y^3}w'_u.$$

Подставляя в исходное уравнение, учитывая, что $x = v$, $y = \dfrac{v}{u}$, и проводя преобразования, приходим к уравнению $w''_{uu} = 0$.

ПРАКТИКА

1. Преобразовать уравнения, вводя новые переменные:

(1) $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, $x = e^t$, $y = ue^{2t}$, $u = u(t)$;

(2) $(1 + x^2)^2y'' = y$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = \dfrac{u}{\cos t}$, $u = u(t)$.

2. Преобразовать к полярным координатам r, φ уравнение

$$(xy' - y)^2 = 2xy(1 + (y')^2),$$

считая $r = r(\varphi)$.

3. Преобразовать уравнения

(1) $xz'_x + yz'_y = \dfrac{x}{z}$, $u = 2x - z^2$, $v = \dfrac{y}{z}$;

(2) $(x + z)z'_x + (y + z)z'_y = x + y + z$, $u = x + z$, $v = y + z$;

(3) $yz'_x - xz'_y = (y - x)z$, $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $w = \ln z - (x + y)$;

(4) $(xy + z)z'_x + (1 - y^2)z'_y = x + yz$, $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$;

(5) $z''_{xy} = (1 + z'_y)^3$, $u = x$, $v = y + z$;

(6) $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x}$, $w = \dfrac{z}{x}$;

(7) $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$;

(8) $z''_{xx} + z''_{xy} + z'_x = z$, $u = \dfrac{x + y}{2}$, $v = \dfrac{x - y}{2}$, $w = ze^y$.

4. Преобразовать уравнение $(y - z)z'_x + (y + z)z'_y = 0$, приняв x за функцию, а $u = y - z$, $v = y + z$ за независимые переменные.

5. Показать, что уравнение $z''_{xx}+2z''_{xy}+z''_{yy}=0$ не меняет своего вида при замене переменных $u=x+z$, $v=y+z$.

6. В уравнении

$$x^2u''_{xx}+y^2u''_{yy}+z^2u''_{zz}=(xu'_x)^2+(yu'_y)^2+(zu'_z)^2$$

положить $x=e^\xi$, $y=e^\eta$, $z=e^\zeta$, $u=e^w$, где $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

7. Показать, что вид уравнения $z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2=0$ не меняется при любом распределении ролей между переменными x, y, z.

Ответы. **1.** (1) $u''_{t^2}+(u+3)u'_t+2u=0$; (2) $u''_{t^2}=0$. **2.** $(r')^2=\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$. **3.** (1) $z'_v=\frac{z}{v}\frac{z^2+u}{z^2-u}$; (2) $(2u+v-z)z'_u+(u+2v-z)z'_v=u+v-z$; (3) $w'_v=0$; (4) $w_v=0$; (5) $(1-z'_v)z''_{uv}+z'_vz''_{v^2}=1$; (6) $w''_{v^2}=0$; (7) $w''_{u^2}=\frac{1}{2}$; (8) $w''_{u^2}+w''_{uv}=2w$. **4.** $x'_u+x'_v=\frac{u}{v}$; **6.** $w''_{\xi^2}+w''_{\eta^2}+w''_{\zeta^2}=w'_\xi+w'_\eta+w'_\zeta+(e^w-1)((w'_\xi)^2+w'_\eta)^2+w'\zeta)^2)$.