§ 24. Двойной интеграл

Наличие нескольких переменных позволяет рассматривать интегрирование как по областям пространства, так и по многообразиям (кривым, поверхностям). В первом случае всегда интегрируется функция, во втором — либо функция, либо векторное поле или дифференциальная форма. Основу во всяком случае составляет интегрирование функции по области пространства. Этот случай в первую очередь всегда и рассматривается.

Интеграл от функции нескольких переменных, как и одномерный, можно определить несколькими путями. В последнее время чаще всего интеграл определяется как интеграл Лебега. С теоретической точки зрения это очень квалифицированный объект с хорошими свойствами. Однако для нахождения интеграла от конкретной функции обычно интересуются не тем, как интеграл определен, а тем, какими он свойствами обладает. С этой точки зрения для нахождения интеграла в высокой степени безразлично, что было положено в основу определения интеграла как такового, ибо обычно подынтегральная функция непрерывна (хотя бы кусочно), а тогда требуемые для нахождения интеграла свойства присутствуют при любой конструкции.

24.1. Нахождение двойных интегралов.

ТЕОРИЯ

Для практических нужд, а именно для нахождения двойных интегралов от конкретных функций, достаточно рассматривать непрерывные функции, заданные на замкнутом ограниченном множестве в $\mathbb{R}^2$, более того, мы будем считать такое множество совпадающим с замыканием своей внутренности. Можно допустить и кусочно непрерывные функции, устроенные так, что их область определения можно представить в виде объединения замкнутых областей, внутренности которых не пересекаются, на внутренности каждой из которых функция непрерывна.

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Напомним конструкцию двойного интеграла (по Риману). Берется разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, каждое из которых имеет площадь (т. е. измеримо по мере Жордана). Затем в каждом из Ω_i, $i = 1, \dots, n$, берется по точке (x_i, y_i) и составляется *инте-*

гральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\Omega_i),$$

где $m(\Omega_i)$ — площадь множества Ω_i. Если при рассмотрении разбиений таких, что наибольшая из площадей составляющих эти разбиения множеств неограниченно уменьшается (стремится к нулю), суммы стремятся к некоторому числу, то его и считают интегралом от f по множеству Ω. Точнее, число I называют (*двойным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Ω на множества $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, у которого $\max\limits_{i=1,\dots,n} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \tag{24.1}$$

Интеграл от f по множеству Ω обозначается обычно символом

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy.$$

В этом обозначении фрагмент $dxdy$ указывает на то, что в основе измерения взята площадь прямоугольника как произведение длин его сторон.

Отметим основные свойства двойного интеграла.

Линейность интеграла. *Двойной интеграл при фиксированной области интегрирования линеен, т. е. для любых непрерывных на Ω функций f, g и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))\, dxdy = \alpha \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy + \beta \iint\limits_{\Omega} g(x, y)\, dxdy \tag{24.2}$$

Аддитивность интеграла. *При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \dots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, то*

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{D_i} f(x, y)\, dxdy. \tag{24.3}$$

Замена переменной. Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $(u, v) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u, v на область D. Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{X} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv, \tag{24.4}$$

где $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ — якобиан отображения Φ.

Равенство (24.4) называют *формулой замены переменной* в двойном интеграле.

Повторный интеграл. Пусть Ω_1 — проекция Ω на ось абсцисс, а Ω_2 — на ось ординат, т. е.

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in \mathbb{R})\ (x, y) \in \Omega\}, \quad \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})\ (x, y) \in \Omega\}.$$

Для простоты предположим, что обе проекции суть замкнутые промежутки или, на худой конец, объединения некоторого набора замкнутых промежутков. Фиксируем $x \in \Omega_1$, и пусть Ω_x — сечение Ω на уровне x, т. е. $\{y : (x, y) \in \Omega\}$ при фиксированном x. Предположим для простоты, что Ω_x состоит из конечного набора замкнутых промежутков. Тогда, рассматривая при фиксированном x интеграл от $f(x, y)$ только как функции переменной y по множеству Ω_x, получим функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_{\Omega_x} f(x, y)\, dy.$$

Ее интегрирование по множеству Ω_1 приведет нас к интегралу

$$\int\limits_{\Omega_1} \Bigg(\int\limits_{\Omega_x} f(x, y)\, dy \Bigg) dx,$$

который называют *повторным* и обычно обозначают так:

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_x} f(x, y)\, dy.$$

Аналогично можно определить и другой повторный интеграл

$$\int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,dx,$$

где $\Omega_y = \{x : (x,y) \in \Omega$.

При наших достаточно жестких ограничениях на область и функцию можно утверждать, что у функции f есть как двойной интеграл, так и оба повторных и она равны между собой:

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,dy = \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,dx. \tag{24.5}$$

ТЕХНОЛОГИИ

Нахождение двойного интеграла от функции основано на использовании изложенных выше свойств. Чаще всего применятся сведéние двойного интеграла к повторному с использованием в случае необходимости свойства линейности. Довольно часто используют замену переменных. Обсудим эти средства

Переход к повторному интегралу.

Для перехода от двойного интеграла к повторному выполняем следующие действия.

1. Находим проекцию Ω на какую-либо из координатных осей, например, на ось абсцисс.

2. При каждом значении x из этой проекции находим интеграл от f как функции от y по сечению Ω_x (одномерный интеграл).

3. Находим одномерный интеграл, но теперь уже от получившейся функции от x по проекции Ω_1.

Обратимся к совсем конкретной ситуации. Предположим, что Ω — это криволинейная трапеция, т. е. область, координаты точек которой удовлетворяют условиям

$$a \le x \le b, \quad \varphi(x) \le y \le \psi(x), \tag{24.6}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, φ, ψ — непрерывные функции, заданные на $[a,b]$. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{24.7}$$

Аналогично, если Ω задается соотношениями

$$c \le y \le d, \quad \eta(y) \le x \le \zeta(y), \tag{24.8}$$

то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\eta(y)}^{\zeta(y)} f(x,y)\,dx. \tag{24.9}$$

Если сама область Ω не является криволинейной трапецией, но ее можно разбить на части, являющиеся криволинейными трапециями, то следует воспользоваться аддитивностью интеграла и свести нахождение интеграла к случаю криволинейной трапеции.

В том случае, когда Ω — область, определяемая условиями (24.6), можно образно промежуток интегрирования по «внутренней» переменной y обнаружить так: встав в какую-то точку промежутка $[a,b]$, идти снизу вверх, и отмечать момент входа в область Ω и момент выхода из этой области. Увиденный промежуток и есть отрезок, по которому надо интегрировать по переменной y.

Замена переменной.

Формула замены переменной позволяет переносить интегрирование с одной области на другую и может оказаться, что в новых переменных область интегрирования проще, однако при этом скорее всего надо будет интегрировать более сложную функцию.

При рассмотрении формулы замены переменной можно заметить, что происходит пересадка функции f в новые переменные и интегрирование по новой области по мере, которая имеет вид $k(u,v)\,dudv$, где $k(u,v)$ — коэффициент искажения меры, показывающий, как площадь малого квадрата, расположенного около (u,v), изменяется при отображении Φ. Эта структура формулы замены переменной (или перехода к новым переменным) будет сопровождать все рассматриваемые ниже интегралы, только выражения коэффициента искажения меры будут разными.

Для выполнения замены переменных в интеграле от функции $f(x,y)$ по области Ω надо, разумеется, иметь диффеоморфизм $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, переводящий некоторую область D новых переменных (u,v) на область Ω. В задачах обычно известна область Ω и функции, задающие диффеоморфизм. Область D, отображаемая на Ω, находится из принципа сохранения областей и границ: граница D должна перейти в границу

Ω, обычно заданную в условии задачи. Для обнаружения условий, задающих границу области D, надо выражения $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ подставить в равенства, определяющие границу Ω, и получить равенства, характеризующие границу области D.

Из конкретных новых переменных (криволинейных координат) часто используются полярные координаты (r, φ), связанные с (x, y) равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r, \tag{24.10}$$

где $r > 0$, а φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π, обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, или обобщенные полярные координаты

$$\begin{gathered} x = ar\cos^{\alpha}\varphi, \quad y = br\sin^{\alpha}\varphi, \quad r > 0,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi. \end{gathered} \tag{24.11}$$

Пример 1. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции $f(x, y)$ по треугольнику Ω с вершинами в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ (рис. 1).

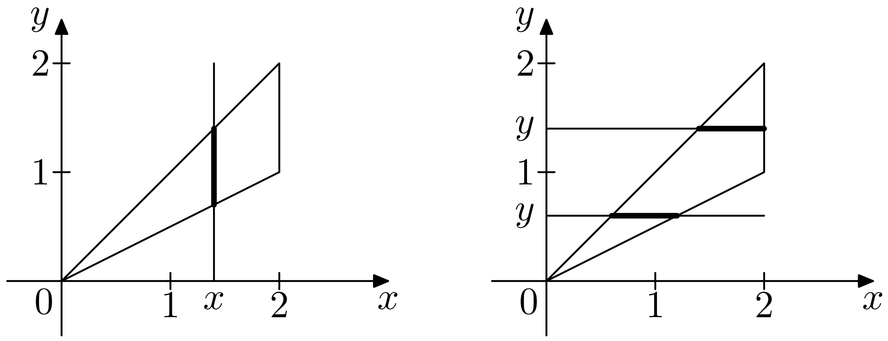

Рис. 1.

Ясно, что его проекция на ось Ox — это отрезок $[0, 2]$. Фиксировав $x \in [0, 2]$ и двигаясь снизу вверх при заданном x, мы войдем в область Ω, пройдя график функции $y = x/2$, и выйдем из Ω через график функции $y = x$, т. е. при каждом фиксированном x сечение Ω на элементе x представляет собой отрезок $[x/2, x]$. Значит, внутренний интеграл от $f(x, y)$ по сечению на элементе x имеет вид $\int\limits_{x/2}^{x} f(x, y)\,dy$. Сделав теперь x переменным, получаем функцию от x, интеграл от которой по отрезку $[0, 2]$ и приведет к одному из повторных интегралов, а именно к интегралу

$$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x,y)\, dy.$$

Обратимся к другому из повторных интегралов. Проекция Ω на ось Oy — это отрезок $[0,2]$. Фиксируем $y \in [0,2]$ и будем двигаться слева направо при этом фиксированном y. В область Ω мы войдем через график функции $x = y$, а вот выход будет зависеть от расположения y, а именно, если $0 \le y \le 1$, то выходим через график функции $x = 2y$, а если $1 \le y \le 2$, то через график функции $x = 2$. Это указывает на то, что нам придется разбить Ω на две части, соответственно с $0 \le y \le 1$ и $1 \le y \le 2$. Тогда двойной интеграл будет равен сумме двух повторных интегралов:

$$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)\, dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)\, dx.$$

Пример 2. Расставим пределы интегрирования в одном и в другом порядке в двойном интеграле от функции $f(x,y)$ по области Ω, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2 - 2x$. Ясно, что эти графики пересекаются в точках $(0,0)$, $(3,3)$, и из нескольких получающихся областей только одна, а именно при $x \in [0,3]$, ограничена (рис. 2).

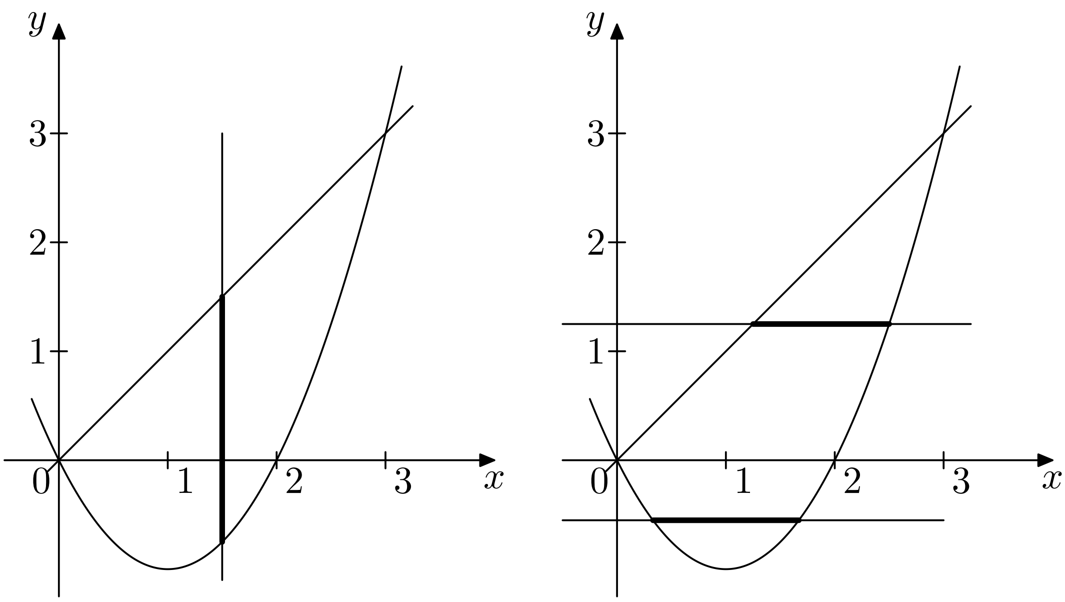

Рис. 2.

При фиксированном $x \in [0,3]$, двигаясь снизу вверх, мы войдем в область Ω через график функции $y = x^2 - 2x$, а выйдем через $y = x$ (см. рис. 2(a)), так что в результате получим следующий повторный интеграл:

$$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} f(x,y)\,dy.$$

Проекция этой области на ось ординат представляет собой отрезок $[-1,3]$, но здесь придется разбить область на две части, соответствующие $-1 \le y \le 0$ и $0 \le y \le 3$, и интеграл представится в виде суммы

$$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{y}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx.$$

Пример 3. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$, где Ω — круг $x^2 + y^2 \le 2x$, перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования.

Подставляя выражения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ в соотношение, задающее область Ω, получим неравенство $r^2 \le 2r\cos\varphi$, или $r \le 2\cos\varphi$, характеризующее соответствующую Ω область D в координатах (φ, r) (здесь нам удобно ставить координаты именно в указанном порядке, а не в противоположном, как это удобно при нахождении якобиана). Ограничение $r \ge 0$ приводит к ограничению $\cos\varphi \ge 0$, или же $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Можно для наглядности изобразить зависимость $r = r(\varphi)$ в рамках исходных декартовых координат (x,y) (рис 3), а также изобразив пары (φ, r) как декартовы координаты (рис. 4).

Ясно, что

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi dr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr.$$

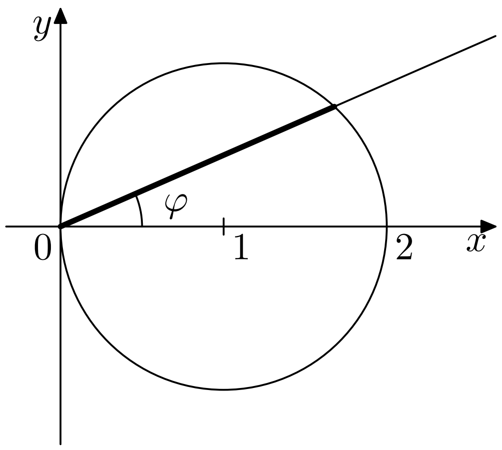

Рис. 3.

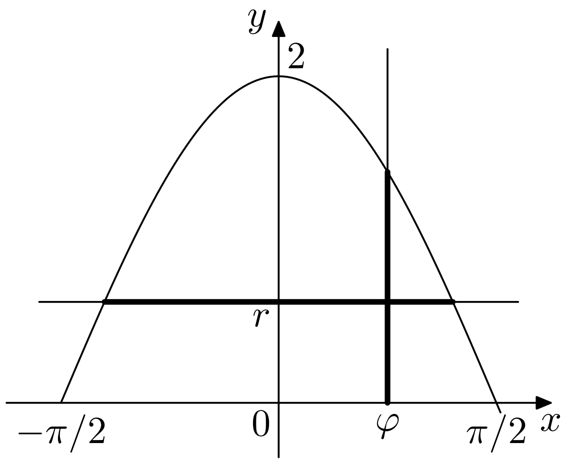

Рис. 4.

Запишем повторный интеграл при другом порядке следования переменных. Проекция области D на ось Or — это отрезок $[0,2]$, и если при фиксированном r идти слева направо (при той интерпретации φ, r, где они изображены в виде прямоугольной системы координат), то для нахождения зависимости $\varphi = \varphi(r)$, при которой мы войдем в область D, надо решить уравнение $r = 2\cos\varphi$ с учетом ограничения $-\pi/2 \le \varphi \le 0$, или же $\cos\varphi = r/2$, $-\pi/2 \le \varphi \le 0$, или

$$\varphi = \pm \arccos\frac{r}{2} + 2\pi k, \quad -\pi/2 \le \varphi \le 0,$$

откуда $\varphi = -\arccos\dfrac{r}{2}$. Выйдем из D на графике функции $\varphi = \arccos\dfrac{r}{2}$. Тем самым приходим к повторному интегралу

$$\int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

ПРАКТИКА

1. В интеграле $\displaystyle\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для областей, ограниченных указанными линиями или заданных неравенствами:

(1) $y = 0$, $y = a$, $x + y = 0$, $x + y = 2a$;

(2) $2y = x$, $2y = x + 6$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$;

(3) $y = x^2$, $x + y = 2$; **(4)** $x = 0$, $x = 1$, $x = y^2$, $y = e^x$;

(5) $x^2 + y^2 \le 2ax$; **(6)** $x^2 + y^2 \le 4x$, $y \ge x$;

2. Записать повторный интеграл или сумму повторных интегралов в виде двойного и изобразить множество интегрирования:

(1) $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)\,dx$; **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$;

(3) $\displaystyle\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{-2}^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{2x-4}^{x} f(x,y)\,dy$;

(4) $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$

3. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

(1) $\displaystyle\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{x} f(x,y)\,dy$, $a > 0$; **(2)** $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2+y} f(x,y)\,dx$;

(3) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x,y)\,dy$, **(4)** $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$;

(5) $\displaystyle\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$; **(6)** $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\,dy.$

4. Вычислить интегралы

(1) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} x^2y^2\,dxdy$, Ω ограничена линиями $x = y^2$, $x = 1$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0\}$;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \le 25,\ 3x + y \ge 5\}$;

(4) $$\iint\limits_{\Omega} x\,dxdy, \quad \Omega = \{x^2+y^2 \le 2,\ x^2-y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\};$$

(5) $$\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy, \quad \Omega = \{0 \le y \le 6,\ x \le 6,\ xy \ge 3\ y-x-2 \le 0\};$$

(6) $$\iint\limits_{\Omega} x^2y^2\,dxdy, \quad \Omega = \{y \ge 0,\ xy \le 1,\ x^2-3xy+2y^2 \le 0\}.$$

1. В интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов:

(1) $\Omega = \{x^2+y^2 \le a^2,\ y \ge x\}$, **(2)** $\Omega = \{x^2+y^2 \le 2ay\}$,
(3) $\Omega = \{x^2+y^2 \le 2ax,\ y \ge x\}$,
(4) $\Omega = \{x^2+y^2 \le a^2,\ x+y+a \le 0\}$,
(5) $\Omega = \{x^2+y^2 \le 2ay \le 2a^2,\ x \ge 0\}$, **(6)** $\Omega = \{2x \le x^2+y^2 \le 2\}$.

5. Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

(1) $$\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0\}.$$

(2) $$\iint\limits_{\Omega} y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\},$$

(3) $$\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le ax\},\ a > 0,$$

(4) $$\iint\limits_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ \Omega = \{x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2 \le 2y\},$$

(5) $$\iint\limits_{\Omega} x^2\,dxdy,\ \Omega = \{(x^2+y^2)^2 \le 2xy,\ x \ge 0\},$$

(6) $$\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy,\ \Omega = \{0 \le x \le (x^2+y^2)^{3/2} \le 1,\ y \ge 0\}.$$

Ответы. **4.** (1) $4/27$, (2) $2a^5/15$, (3) $135/4$, (4) $1/\sqrt{2}$, (5) $255/4$; (6) $\ln 2/6$; **6.** (1) $2a^5/15$, (2) $\pi/8$, (3) $3\pi a^2/16$, (4) $\frac{(8-3\sqrt{3})}{3}$, (5) $\pi/32$, (6) $1/5$.

24.2. Приложения двойных интегралов.

ТЕОРИЯ

Двойной интеграл можно использовать для нахождения площади. А именно, из определения двойного интеграла легко усмотреть, что если мы проинтегрируем единичную функцию по данной области (в переменных (x, y)), то получим величину площади этой области:

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$

Двойной интеграл можно использовать для нахождения объема тел. А именно, из определения двойного интеграла можно усмотреть такую его геометрическую интерпретацию: если $z = f(x, y)$ — некоторая неотрицательная функция на области Ω, то интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy$ равен объему подграфика функции f, т. е. множества $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega,\ 0 \le z \le f(x, y)\}$. Если f_1, f_2 — функции, заданные на Ω, такие, что $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$ для всех $(x, y) \in \Omega$, то объем части пространства $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega,\ f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)\}$, находящегося между графиками f_1, f_2, равен интегралу

$$\iint\limits_{\Omega} (f_2(x, y) - f_1(x, y))\, dxdy.$$

Двойной интеграл можно использовать для нахождения площади поверхности. Пусть M — гладкая поверхность, заданная параметрически посредством непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega.$$

Тогда площадь $S(M)$ поверхности M может быть найдена по формуле

$$S(M) = \iint\limits_{\Omega} k(u, v)\, dudv,$$

где величина $k(u, v)$ (коэффициент искажения площади) может быть найдена либо по формуле

$$k(u, v) = \sqrt{EG - F^2}, \qquad (24.12)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

либо по формуле

$$k(u,v) = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2}. \tag{24.13}$$

Если же поверхность M является графиком функции $z = z(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, то

$$S(M) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{24.14}$$

ТЕХНОЛОГИИ

Технологии в приложениях двойных интегралов состоят в применении соответствующих формул для решения поставленной задачи и нахождении двойного интеграла, что было описано выше. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = cy^2, \quad x^3 = dy^2, \quad 0 < a < b,\ 0 < c < d,$$

воспользовавшись подходящей заменой переменных.

Заметим, что выражения $\frac{x^2}{y}$ и $\frac{x^3}{y^2}$ меняются в постоянных пределах, поэтому, если мы введем новые переменные u, v, полагая $u = \frac{x^2}{y}$ и $v = \frac{x^3}{y^2}$, то область D изменения переменных u, v составляет прямоугольник $a \le u \le b$, $c \le v \le d$. Для нахождения якобиана $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ можно сначала выразить x, y через u, v, а затем считать якобиан, а можно попробовать найти якобиан $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и потом из него получить требуемый якобиан. Пойдем сначала вторым путем, потому что выражения u, v через x, y проще, чем выражения x, y через u, v. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{x^3}{y^3},$$

так что

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2\dfrac{x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ 3\dfrac{x^2}{y^2} & -2\dfrac{x^3}{y^3} \end{vmatrix} = -\frac{x^4}{y^4}.$$

Заметив, что $\dfrac{x}{y} = \dfrac{v}{u}$, находим, что

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\right| = \left(\frac{u}{v}\right)^4.$$

Тем самым

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \int\limits_a^b du \int\limits_c^d \frac{u^4}{v^4}\, dv = \int\limits_a^b u^4\, du \int\limits_c^d v^{-4}\, dv$$

$$= \frac{u^5}{5}\bigg|_a^b \cdot \frac{u^{-3}}{-3}\bigg|_c^d = \frac{b^5 - a^5}{15}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{d^3}\right).$$

Пример 2. Найдем объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$.

Здесь тело представляет собой часть пространства, заключенную между графиками функции $z = 0$ и $z = x^2 + y^2$, рассматриваемых на области $\Omega = \{(x,y) : x^2 \le y \le 1\}$. Тем самым его объем равен интегралу

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_{y=x^2}^{y=1} = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx$$

$$= 2\left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\bigg|_0^1 = \frac{88}{105}.$$

ПРАКТИКА

1. Используя (обобщенные) полярные координаты, найти площадь области, ограниченной кривыми:

(1) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$, $b > a > 0$;

(2) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$;

(3) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$, $\quad x \geq 0$, $y \geq 0$;

(4) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3)$;

(5) $(x + y)^4 = 6xy^2$, $y \geq 0$; $\quad$ **(6)** $x^3 + y^3 = axy$.

2. Найти площадь области, ограниченной данными кривыми, используя подходящую замену:

(1) $x = 2y$, $y = 3x$, $3x = 2 - y$, $x = 4 - 2y$;

(2) $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$;

(3) $xy = a^2$, $xy = b^2$, $x^2 = py$, $x^2 = qy$, $b > a > 0$, $q > p > 0$;

(4) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}$, $y = x$, $y = 8x$, $b > a > 0$.

3. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

(1) $x^2 + y^2 = ax$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

(2) $x + y + z = a$, $4x + y = a$, $4x + 3y = 3a$, $y = 0$, $z = 0$, $a > 0$;

(3) $x^2 + y^2 = ay$, $z = xy$, $z = 0$ $(x > 0)$;

(4) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

5. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

6. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

7. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Ответы. 1. (1) $\frac{(\pi+2)(b^2-a^2)}{4}$, (2) $ab + (a^2 - b^2)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$, (3) $3\pi a^2/16$, (4) $5\pi a^2/16$, (5) $6/35$, (6) $a^2/6$; **2.** (1) $25/21$, (2) $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{1(\alpha+1)(\beta+1)}$, (3) $\frac{b^2-a^2}{2}\ln\frac{q}{p}$, (4) $\frac{3}{16}(b^2-a^2)\left(\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{6}{25}\right)$; **3.** (1) $3a^4/32$, (2) $a^3/12$, (3) $a^4/4$' (4) $32\pi/3$; **4.** $2(2\sqrt{2} - 1)\pi a^2/3$; **5.** $\pi\sqrt{2}/4$; **6.** $\pi\sqrt{2}$; **7.** $\pi a^2/4$.