

§ 25. Тройной интеграл и многократный интеграл

25.1. Тройной интеграл.

ТЕОРИЯ

Как и в случае двойного интеграла, для практических нужд, а именно для нахождения тройных интегралов от конкретных функций, достаточно рассматривать непрерывные функции, заданные на замкнутом ограниченном множестве в $\mathbb{R}^3$. Как и в предыдущем параграфе, будем считать такое множество совпадающим с замыканием своей внутренности.

Пусть f — непрерывная функция трех переменных (x, y, z) , заданная на ограниченной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тройной интеграл создается аналогично двойному: берут разбиение области Ω на такие множества $\Omega_1, \dots, \Omega_k$, каждая из которых имеет объем (т. е. измерима, например, по мере Жордана), затем в каждой из частей разбиения Ω_i , $i = 1, \dots, k$, берут по точке (x_i, y_i, z_i) и составляют интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^k f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i), \quad (25.1)$$

где $m(\Omega_i)$ — объем множества Ω_i . Число I называют (*тройным*) *интегралом* от функции f по множеству Ω , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ области Ω на измеримые части такие, что $\max_{i=1, \dots, k} m(\Omega_i) < \delta$, и любого выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, k$, выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i, z_i) m(\Omega_i) \right| < \varepsilon. \quad (25.2)$$

Для тройного интеграла используют обозначение $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$.

Здесь символ $dx dy dz$ указывает на то, что в основу измерения объема взят объем параллелепипеда как произведение его линейных размеров.

Тройной интеграл обладает такими же свойствами, как и двойной.

Линейность интеграла. Тройной интеграл при фиксированной области интегрирования обладает свойством линейности, т. е. для любых

непрерывных на Ω функций f, g и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dx dy dz \\ = \alpha \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (25.3)$$

Аддитивность интеграла. При фиксированной функции интеграл аддитивен как функция множества, т. е. если $D_1, \dots, D_k$ — конечный набор областей, внутренности которых попарно не пересекаются, и $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, то

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^k \iiint_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (25.4)$$

Основу вычисления тройных интегралов, как и двойных, составляет переход от нахождения тройного интеграла к нахождению интегралов от функций меньшего чем три числа переменных, т. е. одномерных и двумерных интегралов. Для тройного интеграла возможностей перехода к повторным больше, чем для двойного. Можно спроектировать область интегрирования $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ на одномерное координатное подпространство, а можно на двумерное. В зависимости от ситуации первым шагом можно находить двойной интеграл или одномерный. Если область проектируется на одномерное подпространство, то для каждой фиксированной точки из такой проекции ищется свой двойной интеграл, тем самым в этом случае появляется необходимость нахождения семейства двойных интегралов, что может вызывать трудности. Если же область интегрирования проектируется на двумерное координатное подпространство, то в первую очередь ищется одномерный интеграл, тем самым в таком случае сначала появляется семейство одномерных интегралов, и с ним обращаться легче, чем с семейством двойных интегралов. Затем находится один двойной интеграл.

Пусть даны достаточно хорошая функция f , заданная на области интегрирования $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $\Omega_0 = \{(x, y) : (\exists z) (x, y, z) \in \Omega\}$ — проекция Ω на плоскость xOy . Фиксируем $(x, y) \in \Omega_0$, и пусть $\Omega_{(x,y)} = \{z : (x, y, z) \in \Omega\}$. Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_{(x,y)}} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Обычно интеграл в правой части записывают так:

$$\iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\Omega_{(x,y)}} f(x, y, z) dz. \quad (25.5)$$

Если при этом для каждой пары $(x, y) \in \Omega_0$ множество $\Omega_{(x,y)}$ — это отрезок $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$, то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_0} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (25.6)$$

В результате после первого интегрирования (по z) получаем двойной интеграл, разбираться с которым учились раньше.

Ясно, что аналогичные соотношения получаются при фиксации сначала какой-либо другой координатной плоскости — yOz или zOx .

Обсудим другой способ разбиения. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y, z \in \mathbb{R}) (x, y, z) \in \Omega\}$ — проекция области Ω на ось Ox . При каждом $x \in \Omega_1$ пусть $\Omega_x = \{(y, z) : (x, y, z) \in \Omega\}$ — сечение области Ω при данном x . Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Здесь внутренний интеграл двойной, с которым мы умеем разбираться, внешний — обычный одномерный интеграл. В частности, если Ω_1 — это отрезок $\Omega_1 = [a, b]$, а при фиксированном $x \in [a, b]$ множество Ω_x — это криволинейная трапеция, ограниченная функциями $z = \lambda(x, y)$, $z = \mu(x, y)$, где $c(x) \leq y \leq d(x)$, то в обычных обозначениях

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (25.7)$$

Как и выше, подобные формулы будут верны, если спроектировать область на какую-либо из других координатных осей.

25.5. Замена переменной. Как для двойного интеграла, при замене переменных в тройном надо перенести функцию в область новых переменных и проинтегрировать по мере, в которой учтен коэффициент искажения, вносимый реализующим замену диффеоморфизмом.

Пусть f — непрерывная функция, определенная на открытой области $D \subset \mathbb{R}^3$, и пусть отображение Φ с координатными функциями $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $(u, v, w) \in W$, — диффеоморфизм области W переменных u, v, w на область D . Пусть замкнутая область $\Omega \subset D$ является образом при этом диффеоморфизме некоторой замкнутой области $X \subset W$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_X f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw, \quad (25.8) \end{aligned}$$

где $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ — матрица Якоби отображения Φ .

Равенство (25.8) называют *формулой замены переменной* в тройном интеграле.

Из приложений тройного интеграла отметим только тот факт, что аналогично двойному тройной интеграл $\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$ по Ω от единичной функции равен объему тела $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

ТЕХНОЛОГИИ

При переходе от тройного интеграла к повторному в первую очередь рекомендуется посмотреть, каковы проекции области на двумерные координатные подпространства, и если какая-то из них легко находится, затем надо изучить, будет ли при каждой фиксированной упорядоченной паре из этой проекции часть области, находящаяся над данной точкой, представлять собой промежуток. Если описанная ситуация присутствует, то лучше внешнее интегрирование организовать в виде двойного интеграла, а внутреннее, первичное, в виде одномерного. Это обычно бывает проще разбиения в другом порядке потому, что здесь надо сначала находить одномерные интегралы от семейства функций, а затем один двойной по фиксированной области. Во втором случае, когда фиксируется одна переменная, первый, внутренний двойной интеграл, приходится находить по семейству двумерных областей, что технически сложнее, чем нахождение однократных интегралов по семейству отрезков.

При замене переменных в качестве новых переменных (криволинейных координат) часто используются (географические) *сферические координаты* φ, ψ, r , связанные с исходными переменными x, y, z равенствами

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi,$$

в которых переменная φ может меняться в каком-либо промежутке длиной 2π , обычно $0 \leq \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$, или (физические) *сферические координаты* φ, θ, r , связанные с исходными переменными x, y, z равенствами

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} = r^2 \sin \theta,$$

в которых переменная φ может меняться в каком-либо промежутке длиной 2π , обычно $0 \leq \varphi < 2\pi$, а $\theta \in [0, \pi]$.

Бывают удобны также *цилиндрические координаты* r, φ, h , связанные с x, y, z равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h, \quad \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, h)} = r.$$

Здесь $r > 0$, φ пробегает при этом промежуток длиной не более 2π , обычно $\varphi \in [0, 2\pi)$, а $h \in \mathbb{R}$.

В подходящих случаях используются *обобщенные (географические) сферические координаты* φ, ψ, r , связанные с x, y, z равенствами

$$x = ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad z = cr \sin^\beta \psi, \\ \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \psi, r)} = \alpha \beta abcr^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi.$$

Здесь область изменения переменной φ зависит от показателя α и ограничивается возможностью возведения в степень α , но во всяком случае это область лежит в каком-либо промежутке длиной не более 2π , обычно $0 \leq \varphi < 2\pi$, а $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Пример 1. Запишем интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ в виде повторного, где Ω — область, ограниченная поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$. При этом рассмотрим разный порядок следования переменных.

Поверхности $x = 1$ и $y = x$ — это параллельные оси Oz плоскости, проходящие через соответствующие прямые, расположенные на плоскости xOy . Поверхность $z = xy$ — это седло, проходящее через оси координат Ox , Oy . Поскольку поверхность $x = 1$ должна участвовать в формировании области, у поверхности $z = xy$ надо брать ту часть, где $x > 0$. Равенства $z = xy$ и $z = 0$ говорят о том, что ограничивающими поверхностями будут также $x = 0$ и $y = 0$. Исходя из этих наблюдений, находим, что проекцией области Ω на плоскость xOy будет треугольник Δ : $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$. Для каждой точки $(x, y) \in \Delta$ точка (x, y, z) будет в Ω при $0 \leq z \leq xy$. Тем самым, сразу расставляя пределы интегрирования по Δ , получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\Delta} dx dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Поступим теперь иначе. Заметим, что условия $0 \leq x \leq 1$, $y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$ приводят к ограничению $0 \leq z \leq 1$ на z . Фиксировав $z \in [0, 1]$, получаем при каждом таком z область в плоскости xOy , ограниченную кривыми $xy = z$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 1).

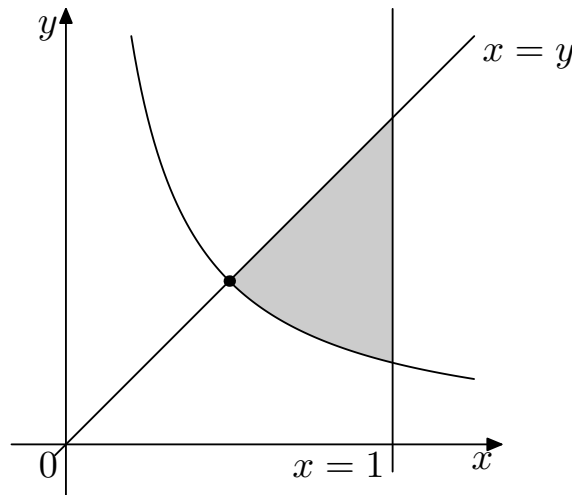


Рис. 1.

Этими линиями ограничивается выделенная на рис. 1 область. Найдем

точку пересечения кривых $y = x$ и $xy = z$: $z = x^2$, $x = \sqrt{z}$. Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{z/x}^x f(x, y, z) dy.$$

ПРИМЕР 2. В интеграле $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, где

$$\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \geq z^2\},$$

перейдем к сферическим координатам и запишем его в виде повторного.

Подставляя $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$ в неравенства, характеризующие область, получим неравенства

$$r^2 \leq 2ar \sin \psi, \quad r^2 \cos^2 \psi \geq r^2 \sin^2 \psi,$$

или

$$r \leq 2a \sin \psi, \quad |\cos \psi| \geq |\sin \psi|,$$

характеризующие соответствующую Ω область D в сферических координатах. Положительность r вместе с ограничением из сферической замены дает ограничение $0 \leq \psi \leq \pi/2$. Далее, среди $\psi \in [0, \pi/2]$ неравенство $|\cos \psi| \geq |\sin \psi|$ выполняется при $\psi \in [0, \pi/4]$. Итак, приходим к интегралу по области

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 2a \sin \psi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

сферических переменных. Переход к повторному интегралу дает равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_D f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\psi \int_0^{2a \sin \psi} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Совершая подходящую замену, вычислим интеграл $\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz$, где Ω расположена в октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ и ограничена поверхностями

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < m < n).$$

Учитывая наблюдения, высказанные в аналогичной ситуации для двойного интеграла, положим

$$u = \frac{x^2 + y^2}{z}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x}.$$

При переходе к переменным u, v, w области Ω соответствует прямоугольник

$$m \leq u \leq n, \quad a^2 \leq v \leq b^2, \quad \alpha \leq w \leq \beta.$$

Найдем якобиан $\det \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$, замечая, что выражения u, v, w через x, y, z проще, чем выражения для координатных функций обратного отображения. Имеем

$$\det \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{z^2} \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -2 \frac{y}{x} \frac{x^2 + y^2}{z^2}.$$

Выразим переменные x, y, z через u, v, w . Переменные x, y, z положительны по условию. Из двух последних равенств замены получаем

$$y = \sqrt{vw}, \quad x = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad x^2 + y^2 = vw + \frac{v}{w} = \frac{v(w^2 + 1)}{w},$$

$$z = \frac{x^2 + y^2}{u} = \frac{v(w^2 + 1)}{uw}.$$

Теперь

$$\begin{aligned}\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \cdot z \cdot \frac{z}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{v(w^2 + 1)}{uw} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{2} \frac{v(w^2 + 1)}{u^2 w^2}.\end{aligned}$$

Переходим к нахождению интеграла:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz &= \int_m^n du \int_{a^2}^{b^2} dv \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{vw} \sqrt{\frac{v}{w}} \frac{v(w^2 + 1)}{uw} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v(w^2 + 1)}{u^2 w^2} dw \\ &= \frac{1}{2} \int_m^n \frac{du}{u^3} \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(w^2 + 1)^2}{w^3} dw \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{u^2} \Big|_m^n \cdot \frac{1}{4} v^4 \Big|_{a^2}^{b^2} \cdot \left(\frac{1}{2} w^2 + 2 \ln w - \frac{1}{2w^2}\right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) (b^8 - a^8) \left(\beta^2 - \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

ПРАКТИКА

1. Тройной интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz$ записать в виде повторного с указанным порядком следования переменных и расставить пределы интегрирования для указанных областей:

- (1) $\Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, 4 \geq z \geq 0, 2x + y \leq 2\}$, (а) (y, z, x) , (б) (x, y, z) ;
- (2) $\Omega = \{x \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, y^2 + z^2 \leq a^2\}$, (а) (y, z, x) , (б) (x, z, y) ;
- (3) $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, x^2 + y^2 \geq z^2\}$, (а) (x, y, z) , (б) (x, z, y) ;
- (4) $\Omega = \{y^2 + z^2 \leq x^2, y^2 + x^2 \leq 1, x \geq 0\}$, (а) (x, y, z) , (б) (y, z, x) ;

2. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

$$(1) \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^h f(x, y, z) dz, \quad (z, y, x);$$

$$(2) \int_0^4 dz \int_0^{3-\frac{3}{4}z} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x, y, z) dx, \quad (x, y, z);$$

$$(3) \int_0^2 dx \int_0^{2-\frac{x}{2}} dy \int_0^{2-y-\frac{x}{2}} f(x, y, z) dz, \quad (z, x, y);$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz, \quad (x, z, y), (z, y, x);$$

3. Вычислить интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ для следующих функций и областей:

(1) $f(x, y, z) = y$, Ω — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 4$; ответ: $16/3$;

(2) $f(x, y, z) = x + z$, область Ω ограничена плоскостями $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$; ответ: $5/12$;

(3) $f(x, y, z) = x^2 - z^2$, область Ω ограничена плоскостями $y = -x$, $z = x$, $z = y$, $z = 1$; ответ: $-4/15$;

(4) $f(x, y, z) = xy$, область Ω ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; ответ: $1/8$;

(5) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, область Ω ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$; ответ: $\pi/6$;

(6) $f(x, y, z) = xyz$, область Ω ограничена поверхностями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$; ответ: $1/96$;

4. Вычислить интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ от следующих функций

f по следующим областям Ω :

(1) $f(x, y, z) = z$, Ω ограничена поверхностями $R^2 z^2 = h^2(x^2 + y^2)$, $z = h$, $h > 0$; ответ: $\pi R^2 h^2/4$;

(2) $f(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$, Ω ограничена поверхностями $y^2 + z^2 = R^2$, $y + x = R$, $y - x = R$, $R > 0$; ответ: $4\pi R^4/3$;

(3) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, y \geq 0, z \geq 0\}$; ответ: 0;

(4) $f(x, y, z) = x + z$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$; ответ: $-\pi R^4/8$;

(5) $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq y\}$; ответ: $128/525$;

(6) $f(x, y, z) = xz^2$, $\Omega = \{(3x - 4)^2 \leq y^2 + z^2 \leq x^2\}$; ответ: $8\pi/5$;

(7) $f(x, y, z) = xyz$, $\Omega = \{x \leq cyz \leq 2x, y \leq zx \leq 2y, z \leq xy \leq 2z\}$; ответ: $27/32$;

(8) $f(x, y, z) = x^2$, область Ω ограничена поверхностями

$$z = ay^2, z = by^2, y > 0, z = \alpha x, z = \beta x, z = h,$$

$$0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < h;$$

ответ: $\frac{2}{27} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) h^{3/2}$.

5. Найти

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

где m, n, p — целые неотрицательные числа.

Ответ: $\frac{4\pi}{m+n+p+3} \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, если m, n, p четные, для иных 0.

6. Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s dx dy dz,$$

где область V ограничена плоскостями

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

полагая

$$x + y + z = \xi, \quad y + z = \xi\eta, \quad z = \xi\eta\zeta.$$

Ответ: $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

(1) $x^2 + y^2 = R^2$, $x + y + z = a$, $x + y + z = -a$; ответ: $2\pi R^2 a$;

- (2) $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$; ответ: 88/105;
- (3) $z = xy, z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0$; ответ: 7/24;
- (4) $z = x^2 + y^2, z = x + y$; ответ: $\pi/8$;
- (5) $x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0$; ответ: 45 π /32;
- (6) $x^2 + y^2 = 1, z = e^{-(x^2+y^2)}, z = 0$; ответ: $\pi(1 - e^{-1})$;
- (7) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz, a > 0$; ответ: $a^3/360$;
- (8) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, z = \sqrt{x^2 + y^2} (z > \sqrt{x^2 + y^2})$; ответ: πa^3 ;
- (9) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{p}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$; ответ: $\frac{abc}{60} \frac{p(5c+4p)}{(c+p)^2}$;
- (10) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{p} + \frac{y}{q}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$; ответ: $\frac{abc}{60} \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2}\right)$;
- (11) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, x = 0, z = 0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$;
 ответ: $5abc\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right)$;
- (12) $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y, x \geq 0, y \geq 0$; ответ: $9a^4/4$.

25.2. Многократный интеграл.

ТЕОРИЯ

Как и в случаях с двойным и тройным интегралом определение многократного интеграла не играет существенной роли при его нахождении от заданных, обычно непрерывных, функций. По этой причине не будем углубляться в теорию, отметив, что для многократного интеграла используется следующее обозначение. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$. (Многократный) интеграл от функции f обозначается через

$$\int \cdots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Переход от многократного интеграла к повторному осуществляется аналогично тому, как это делается для тройных интегралов. Пусть $D_1 =$

$[a_1, b_1]$ — проекция области Ω на первую координатную составляющую, т. е.

$$[a_1, b_1] = \{t \in \mathbb{R} : (\exists x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}) (t, x_2, \dots, x_n) \in \Omega\},$$

и при каждом фиксированном $x_1 \in D_1$ обозначим через Ω_{x_1} сечение области Ω на уровне x_1 , т. е. $\Omega_{x_1} = \{(x_2, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega\}$, Тогда

$$\int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Omega_{x_1}} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

В частности, если Ω имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 &\leq x_1 \leq b_1, \\ a_2(x_1) &\leq x_2 \leq b_2(x_1), \\ &\dots\dots\dots \\ &, x_{n-1}) \leq x_n \leq b_n(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

где $a_1, b_1, a_1 < b_1$, — числа, а $a_i, b_i, a_i < b_i, i = 2, \dots, n$, — функции от соответствующих переменных, то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} dx_2 \cdots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned} \quad (25.9)$$

Для многомерного интеграла имеет место формула замены перемен-
ной. Если

$$(x_1, \dots, x_n) = (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n))$$

— диффеоморфизм, при котором замкнутая область D пространства переменных $(u_1, \dots, u_n)$ переводится на область Ω , и $f(x_1, \dots, x_n)$ — заданная на Ω непрерывная функция, то

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_D \cdots \int f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)) \left| \det \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n. \end{aligned} \quad (25.10)$$

ТЕХНОЛОГИИ

Нахождение многократного интеграла можно попытаться реализовать путем перехода к нахождению одномерных интегралов на основе формулы (25.9), однако это довольно трудоемкий и запутанный процесс.

При нахождении многомерных интегралов надо иметь в виду, что исполнение одного шага на пути уменьшения размерности области интегрирования может привести к рекуррентной по размерности n формуле понижения, согласно которой исходный интеграл I_n как-то сводится к такому же интегралу I_{n-1} по такого же, как и исходный, типу множества, но уже меньшей размерности. Продолжая процесс, можно прийти к одномерному интегралу.

Из конкретных многомерных замен отметим (географическую) сферическую. Она задается равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \varphi_1, \\x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\&\dots\dots\dots \\x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},\end{aligned}\tag{25.11}$$

где

$$r > 0, \quad 0 < \varphi_i < \pi, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad 0 < \varphi_{n-1} < 2\pi,$$

а ее якобиан находится по формуле

$$\det \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}.$$

ПРАКТИКА

1. Найти объем n -мерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, \quad x_i \geq 0, \quad a_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ответ: $\frac{a_1 \dots a_n}{n!}$.

2. Найти объем n -мерного конуса, ограниченного поверхностями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n.$$

Ответ: $\frac{\pi^{(n-1)/2}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 \dots a_n$.

3. Найти объем n -мерного шара

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2.$$

Ответ: $\frac{\pi^{n/2} a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

4. Найти $\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} x_n^2 dx_1 \dots dx_n$, где область Ω определяется неравенствами

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi^{(n-1)/2} a^{n-1} h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

25.3. Несобственные кратные интегралы. Выше мы имели дело только с непрерывными (по крайней мере ограниченными) функциями, заданными на ограниченном множестве. Однако, как и для интеграла от функции одной переменной, есть много ситуаций, в которых желательно интегрировать либо неограниченные функции, либо функции, заданные на неограниченном множестве. Конечно, если в качестве базовой конструкции принимается интеграл Лебега, то там такие возможности есть, но и в таком случае встречаются важные ситуации, не подпадающие под действие интеграла Лебега. Это связано, например, с тем, что функция интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда она абсолютно интегрируема, т. е. интегрируем модуль этой функции. Поэтому и для многократного интеграла встречается конструкция, подобная несобственному интегрированию функций одной переменной, но тем не менее в чем-то от одномерной отличающаяся.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Последовательность Ω_k , $k \in \mathbb{N}$, называют *исчерпывающей множеством Ω* , если

1) $\overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$;

2) $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$;

Будем рассматривать только такие функции на Ω , которые интегрируемы на любом открытом множестве D таком, что $\overline{D} \subset \Omega$, где черта сверху означает замыкание множества.

Если для любой последовательности исчерпывающих множеств Ω_k , $k \in \mathbb{N}$, существует не зависящий от выбора последовательности Ω_k , $k \in \mathbb{N}$, предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \cdots \int_{\Omega_k} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

его называют *несобственным интегралом от функции f по области Ω* и используют обозначение

$$\int \cdots \int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \cdots \int_{\Omega_k} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

а f называют *интегрируемой в несобственном смысле на Ω* .

Сходящиеся несобственные интегралы обладают свойствами линейности, положительности и аддитивности по множествам интегрирования, для них справедлива формула замены переменной в обычном виде.

Для исследования сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции достаточно использовать какую-либо одну последовательность исчерпывающих множеств — для таких функций существование соответствующего предела и его величина не зависит от выбора последовательности исчерпывающих множеств.

Несобственный интеграл называют *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл от модуля функции. Известно, что если кратный интеграл при условии $n \geq 2$ на размерность пространства n сходится, то он и абсолютно сходится. Это утверждение подчеркивает различие подходов к несобственным интегралам в одномерном и в многомерном случаях.

ТЕХНОЛОГИИ

Исследование сходимости двойных и тройных (а также многократных) интегралов осуществляется обычно путем сведения задачи к изучению сходимости одномерных интегралов путем либо замены переменных, либо перехода к повторным интегралам и частичного нахождения появляющихся однократных интегралов.

ПРАКТИКА

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$(1) \quad \iint_{x^2+y^2>1} \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}, \text{ ответ: сходится при } \alpha > 2;$$

$$(2) \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^4+y^4)^\alpha}, \text{ ответ: сходится при } \alpha > 1/2;$$

$$(3) \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{x^\alpha + y^\beta}, \Omega = \{x > 0, y > 0, x^\alpha + y^\beta > 1\}, \alpha, \beta > 0, \text{ ответ:}$$

сходится при $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1$;

$$(4) \iint_{y>1+x^2} \frac{dxdy}{(x+y)^p}, \text{ ответ: сходится при } p > 2;$$

$$(5) \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}, \Omega = \{x^2+y^2 < 1, x > 0, 0 < y < x^2\}, \text{ ответ:}$$

сходится при $\alpha < 3/2$;

$$(6) \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}, \Omega = \{x > 0, y > 0, x+y < 1\}, \text{ ответ: сходится}$$

при $\alpha < 2$;

$$(7) \iiint_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}, \text{ ответ: сходится при } p > 3/2;$$

$$(8) \iiint_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}, \text{ ответ: сходится при } p < 1.$$

2. Показать, что интеграл

$$\iint_{\substack{x>1, \\ y>1}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy, \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx$$

сходятся.

3. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x|<n, \\ |y|<n}} \sin(x^2+y^2) dxdy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 < 2\pi n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

4. Доказать, что повторные интегралы

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \sin(x^2 + y^2) dy, \quad \int_0^\infty dy \int_0^\infty \sin(x^2 + y^2) dx$$

сходятся и имеют одинаковое значение. Найти это значение.