§ 1.3. Предел последовательности

3.1. Расширенная числовая прямая. Точные верхняя и нижняя границы.

ТЕОРИЯ

Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел характеризуется наличием в нем алгебраических операций сложения и умножения и отношения порядка, связанными между собой набором аксиом, а также выполнением аксиомы полноты (в том или ином виде). С точки зрения порядка бывает удобно дополнить $\mathbb{R}$ двумя элементами, полагая, что один из них меньше, а другой больше любого вещественного числа. Иначе говоря, к $\mathbb{R}$ добавляют символы $-\infty$ и $+\infty$, полагая, что $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$, множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ обозначают через $\overline{\mathbb{R}}$ и нередко называют *расширенной числовой прямой*. Если нет опасности недоразумения, знак $+$ у символа $+\infty$ опускают.

Алгебраические операции в полной мере на $\overline{\mathbb{R}}$ не переносятся, однако исходя из разумных соображений в каких-то случаях операциям можно придать смысл. Например, для $x \in \mathbb{R}$ можно положить $x + \infty = \infty$, $x - \infty = -\infty$, $+\infty + \infty = +\infty$ и т. д. Однако, например, для выражений $\infty - \infty$ или $0 \cdot \infty$ результата не предусмотрено. Допуская вольность речи, о символах $\pm\infty$ нередко говорят как о числах.

В дальнейшем, если нет полной ясности из контекста, будем указывать, относительно какого из множеств $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$ ведутся рассмотрения.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называют *ограниченным сверху* (*снизу*) в $\mathbb{R}$, если существует такое число C, что для любого $x \in A$ выполнено неравенство $x \leqslant C$ (соответственно $x \geqslant C$).

Число $b \in \mathbb{R}$ называют *верхней* (*нижней*) *границей* множества $A \subset \mathbb{R}$, если $(\forall x \in A)\ x \leqslant b$ (соответственно $(\forall x \in A)\ x \geqslant b$ (рис. 3.1). С использованием кванторов ограниченность сверху (снизу) выражается так:

$$(\exists C \forall x \in A) \quad x \leqslant C \tag{1}$$

(соответственно

$$(\exists C \forall x \in A) \quad x \geqslant C. \tag{2}$$

Можно сказать, что множество ограничено сверху (снизу), если множество его верхних (нижних) границ непусто.

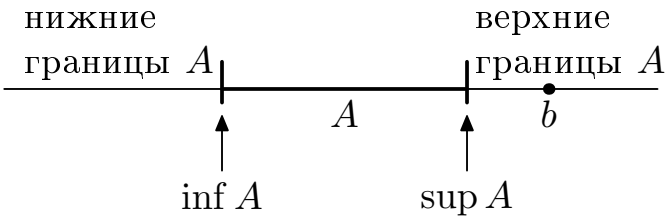

Рис. 3.1.

Множество в $\mathbb{R}$ называют *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу. Ограниченность множества $A \subset \mathbb{R}$ можно описать так:

$$(\exists C > 0 \forall x \in A) \quad |x| \leqslant C. \tag{3}$$

Ясно, что с точки зрения $\overline{\mathbb{R}}$ любое множество ограничено.

Если множество не обладает свойством ограниченности сверху или снизу в $\mathbb{R}$, его называют неограниченным соответственно сверху или снизу. Обращаясь к отрицанию высказываний (1)–(3), можно описать неограниченность сверху, снизу и двустороннюю:

$$(\forall C \exists x \in A) \quad x > C,$$

$$(\forall C \exists x \in A) \quad x < C,$$

$$(\forall C \exists x \in A) \quad |x| > C.$$

Наименьшую из верхних границ множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ называют его *точной верхней границей* и обозначают через $\sup A$ (читается «супремум A»). Двойственным образом определяют точную нижнюю границу $\inf A$ множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ как наибольшую из его нижних границ (читается «инфимум A»).

Утверждение. *Каждое подмножество в $\overline{\mathbb{R}}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы. Если при этом $A \subset \mathbb{R}$ непусто и ограничено сверху (снизу) (в $\mathbb{R}$), то $\sup A \in \mathbb{R}$ ($\inf A \in \mathbb{R}$), так что такое множество A имеет точную верхнюю (нижнюю) границу в $\mathbb{R}$.* Для неограниченного сверху (снизу) множества $A \subset \mathbb{R}$ будет $\sup A = +\infty$ (соответственно $\inf A = -\infty$).

ТЕХНОЛОГИИ

Согласно определению точных границ для доказательства, например, равенства $\sup A = a$, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, в котором сообщается, что стоящее в правой его части число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является точной верхней границей множества A, надо проверить два свойства:

1) a — верхняя граница A, т. е.

$$(\forall x \in A) \quad x \leqslant a;$$

2) граница a наименьшая, иначе говоря, если b — какая-либо граница A, то a ее не больше, т. е.

$$\text{если } (\forall x \in A)\ x \leqslant b, \text{ то } a \leqslant b.$$

Аналогичное можно сказать и о равенстве $\inf A = a$.

Обычно при обосновании того факта, что какое-то число служит точной границей последовательности, используют критерий точной границы (рис. 3.2).

Теорема (критерий точной верхней границы). *Если A — непустое множество в $\overline{\mathbb{R}}$, то равенство $\sup A = a$ равносильно тому, что*

1) *a — верхняя граница A;*

2) *любое $b < a$ не является верхней границей множества A, т. е.*

$$(\forall b < a \exists x \in A) \quad x > b.$$

Для непустого ограниченного в $\mathbb{R}$ множества $A \subset \mathbb{R}$ свойство 2 можно сформулировать в терминах отклонения числа b от границы a, и это выглядит так:

2′) *для любого $\varepsilon > 0$ смещение от a влево на ε не является верхней границей A, т. е.*

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A) \quad x > a - \varepsilon.$$

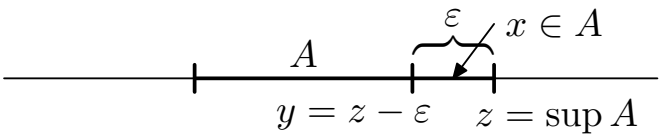

Рис. 3.2.

Точной верхней (нижней) границей последовательности называют точную верхнюю (нижнюю) границу множества ее членов.

Согласно критерию точной верхней границы для доказательства того, что указанное число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является точной верхней границей множества X надо, во-первых, проверить, что это верхняя граница, а затем рассуждать так. Поскольку критерий начинается с квантора общности и

он находится в утверждении, которое надо доказать, мы не вправе распоряжаться сдвигом и должны начать рассуждения для непустого множества в $\overline{\mathbb{R}}$ словами «пусть дано произвольное $b < a$» или для непустого ограниченного множества в $\mathbb{R}$ словами «пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$», подчеркивая этим, что мы ориентируемся на внешнее, не зависящее от нас обстоятельство. Затем согласно критерию надо сформировать правило, согласно которому можно указать элемент x данного множества X, удовлетворяющий второму условию критерия. Гарантия существования такого элемента вытекает либо из условия, либо, если множество задано конкретно, из определяющих это множество свойств. Наличие указанного правила означает завершение обоснования.

Если ставится задача найти точную границу, то в первую очередь надо предъявить кандидата на эту роль, а затем доказывать, что это действительно будет точной верхней границей.

Рассуждения относительно точных нижних границ двойственны соответствующим рассуждениям для точных верхних и оставляются читателю.

Пример 1. Докажем, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ и для любого числа $\lambda \geq 0$ справедливо равенство

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A$$

(здесь $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$).

Если $\lambda = 0$, утверждение очевидно. Будем считать, что $\lambda \neq 0$.

Обозначим $a = \sup A$. Требуется доказать, что λa — точная верхняя граница множества λA. Как указано выше, для этого надо проверить, что λa — верхняя граница и что сдвиг вниз на произвольное $\varepsilon > 0$ уже не будет верхней границей. На чем основывать проверку? Разумеется, на данных в условии свойствах. Так как $a = \sup A$, число a — верхняя граница множества A, стало быть, $(\forall x \in A)\ x \leqslant a$. Умножив неравенство на положительное число, получаем, что $(\forall x \in A)\ \lambda x \leqslant \lambda a$, так что λa — верхняя граница.

Проверим второе свойство. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Надо подобрать такое $x \in A$, что $\lambda x > \lambda a - \varepsilon$. Запишем последнее неравенство, изолировав в нем x: $x > a - \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Согласно условию для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $x \in A$, что $x > a - \varepsilon_1$. Поскольку здесь квантор общности применяется в ситуации, которая нам дана, мы вправе распоряжаться ε_1 и брать для него те значения, которые будут целесообразны. Условие

гарантирует, что при любом нашем выборе есть соответствующий элемент в множестве A. Сопоставляя выписанные выше неравенства, нетрудно заметить, что ε_1 целесообразно выбрать так, что $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, и цепочка выбора требуемого элемента в множестве λA выстраивается так: берем $\varepsilon > 0$, по нему находим ε_1 так, что $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, по этому ε_1 найдется элемент $x \in A$ такой, что $x > a - \varepsilon_1 = a - \frac{\varepsilon}{\lambda}$, а это означает, что $\lambda x > \lambda a - \varepsilon$. Правило выбора по заданному $\varepsilon > 0$ требуемого $\lambda x \in \lambda A$ сформировано, а это и означает, что утверждение доказано.

Пример 2. Найти точные границы последовательности

$$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}.$$

Последовательность ограничена сверху единицей, а снизу — нулем. Используя свойства периодичности синуса, можно утверждать, что множитель $\sin^2 \frac{n\pi}{4}$ принимает значение 0 на номерах вида $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, значение $1/2$ на номерах вида $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, и значение 1 на номерах вида $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\frac{n}{n+1}$ положительна и возрастает. Из этих наблюдений можно сделать вывод, что найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $x_n = 0$ (и таких номеров будет много). Нижняя граница, достигаемая на каком-то элементе, очевидно, будет точной, так что $\inf x_n = 0$. Займемся точной верхней границей. Умножая близкое к единице значение $\frac{n}{n+1}$ на единицу (при соответствующих номерах), мы будем получать близкие к единице числа. Это позволяет предположить, что точной верхней границей будет единица. Обоснуем эту гипотезу. Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем номер n вида $4k + 2$ и попытаемся подобрать такое $k \in \mathbb{N}$, что $1 - \varepsilon < x_{4k+2}$, т. е. $1 - \varepsilon < \frac{4k+2}{4k+3}$. Решая это неравенство, в котором ε считается параметром, а k — искомой величиной, получим, что при $\varepsilon \geq 1$ требуемое неравенство выполнится при любом k, а при $\varepsilon < 1$ — для $k > \frac{1-3\varepsilon}{4\varepsilon}$. Итак, правило выбора по заданному $\varepsilon > 0$ требуемого номера n найдено, так что $\sup x_n = 1$.

ПРАКТИКА

1. Доказать, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ и для любого числа $\lambda \geq 0$ справедливо равенство

$$\inf \lambda A = \lambda \inf A.$$

2. Доказать, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

3. Доказать, что для любых непустых ограниченных множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ справедливы равенства

(1) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,

(2) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

(здесь $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$).

4. Положим $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$. Показать, что

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = y + (x - y)^+ = x + (y - x)^+,$$

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = y - (x - y)^- = x - (y - x)^-,$$

где $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$ соответственно наибольшее и наименьшее из чисел x, y.

5. Найти точные границы последовательностей

(1) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$, **(2)** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$,

(3) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$, **(4)** $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

6. Доказать, что для любых ограниченных последовательностей x_n, y_n вещественных чисел имеют место неравенства

$$\inf x_n + \inf y_n \leqslant \inf(x_n + y_n) \leqslant \inf x_n + \sup y_n \leqslant \sup(x_n + y_n) \leqslant \sup x_n + \sup y_n,$$

а если члены последовательностей неотрицательны, то

$$\inf x_n \cdot \inf y_n \leqslant \inf(x_n \cdot y_n) \leqslant \inf x_n \cdot \sup y_n \leqslant \sup(x_n \cdot y_n) \leqslant \sup x_n \cdot \sup y_n.$$

Привести примеры последовательностей, для которых все неравенства строгие.

3.2. Предел последовательности.

ТЕОРИЯ

Пусть даны последовательность x_n и число a. Договоримся о том, как математически выразить интуитивно ясное представление о том, что последовательность x_n неограниченно приближается к числу a, т. е. значения x_n при неограниченном увеличении n становятся всё ближе и ближе к a

Сначала обратимся к геометрической поддержке. Так как последовательность — это функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для ее геометрического представления можно использовать график как множество всех упорядоченных пар (n, x_n) на координатной плоскости. Правда, в этом случае сплошной линии, как у графиков обычных функций, не получится, а будет дискретное множество, но это обстоятельство не должно нас смущать.

Изобразим координатную плоскость, на которой по оси абсцисс отметим натуральные $n = 1, 2, \ldots$ и над каждой отмеченной точкой на высоте x_n поместим в виде точки значение x_n последовательности. На оси ординат отметим точку a (рис. 1).

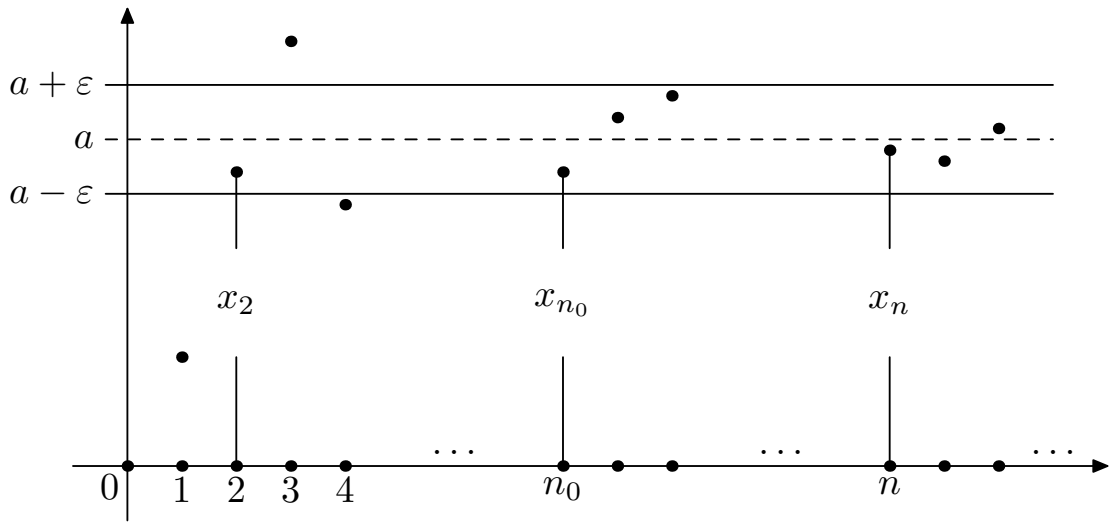

Рис. 3.3.

Поскольку нас интересует неограниченное приближение x_n к a «в перспективе», при далеких номерах n, расположение последовательности при начальных номерах нас не интересует. Представим себе, что есть два участника договоренности: **Вы** и **Я**. Вы намерены убедить меня в

том, что последовательность x_n неограниченно приближается к a, и если удастся это сделать, то мы вместе назовем это обстоятельство выражениями «a есть *предел* последовательности x_n» или «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» (последние выражения не следует понимать буквально, это термины, которые означают лишь то, что за ними кроется).

Так как Вы убеждаете меня в неограниченном приближении, Я, естественно, должен проверять, насколько значения x_n отличаются от величины a, для чего приготовлю число, которым буду измерять точность приближения, или, иначе говоря, величину отклонения x_n от a. Естественно, число должно быть положительным. Я буду обозначать его греческой буквой ε. Согласно договору приближение должно быть неограниченным, т. е. надо гарантировать невозможность вставить границу между значениями x_n с далекими номерами и числом a. Это можно гарантировать, например, такой процедурой. Я буду предлагать Вам какое-то, неизвестное Вам заранее значение $\varepsilon > 0$, а от Вас буду ожидать, что Вы обеспечите отклонение x_n от a в пределах заданной точности ε для всех далеких номеров n, т. е. сумеете найти такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ отклонение x_n от a будет в пределах от $-\varepsilon$ до ε. Последнее можно выразить так: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, или так: $|x_n - a| < \varepsilon$. Обратившись к рис. 1, об этом можно сказать так: Вы обеспечите такой номер n_0, что для всех n, лежащих правее от этого номера, отмеченные на высоте x_n точки, изображающие элементы последовательности, окажутся в полосе между горизонтальными линиями, проведенными на высотах $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. Если Вы не можете обеспечить отклонение x_n от a в пределах заданной мной точности $\varepsilon > 0$ для всех далеких номеров n, то Я не готов согласиться с тем, что x_n неограниченно приближается к a.

Сформулируем договоренность в математических терминах.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ будем называть *пределом последовательности* x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, при этом будем использовать обозначение $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

С использованием кванторов соотношение $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ запишется так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geqslant n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Часть обозначения вида $n \to \infty$ подчеркивает, что мы оцениваем близость x_n к a при неограниченном возрастании номеров n. Часто в

этом случае говорят «при n, стремящемся к бесконечности». Заметим однако, что каждое число находится на своем месте и никуда не стремится, тем самым эту фразу не следует воспринимать буквально. Это всего лишь фрагмент термина, за которым скрывается определенное содержание. Поскольку ни при каких других обстоятельствах мы оценивать отклонение x_n от a не будем, в обозначениях часть $n \to \infty$ иногда (даже, скорее всего, всегда, если достаточно ясно, по какой переменной происходит переход к пределу) будем опускать и писать просто $a = \lim x_n$.

Тот факт, что $a = \lim x_n$, выражают также словами «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» и записывают $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ или, короче, $x_n \to a$.

Определение. Говорят, что последовательность имеет пределом соответственно $+\infty$, $-\infty$ и ∞ (плюс бесконечность, минус бесконечность или бесконечность без знака), если для любого $\mathrm{E} > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \geqslant n_0$ выполнено соответственно неравенство $x_n > \mathrm{E}$, $x_n < -\mathrm{E}$ и $|x_n| > \mathrm{E}$.

Последовательность, имеющую какой-либо из бесконечных пределов, называют *бесконечно большой.*

Если последовательность имеет (конечный) предел, то ее называют *сходящейся.* Тем самым термин «сходится» применяют только в случае конечного предела, в общем случае используют термин «стремится».

ТЕХНОЛОГИИ

Обсудим, как доказывать с помощью определения тот факт, что $a = \lim x_n$, и выработаем признак конца доказательства. Поскольку конструкция предела последовательности похожа на конструкцию неограниченности или точных границ, ясно, что и обсуждение будет аналогичным рассмотрению свойства неограниченности или точных границ.

Поскольку здесь есть внешнее, от нас не зависящее требование $\forall \varepsilon > 0$, мы должны выработать **правило поиска** требуемого далее значения $n_0 \in \mathbb{N}$ в зависимости от какого-то нам неизвестного значения ε. Рассуждение, посвященное подбору n_0, надо начинать, например, так: пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Этим мы подчеркиваем, что готовы к выработке правила. Затем надо пойти в конец и посмотреть, что от нас ожидают. А от нас ожидают, что мы для произвольного $n \geqslant n_0$ гарантируем оценку $|x_n - a| < \varepsilon$, где n_0 предстоит указать.

Для выбора номера n_0, начиная с которого будет выполнена требуемая оценка, попробуем *ограничить сверху разность* $|x_n - a|$ *чем-то более простым, но все еще малым*. Иначе говоря, попробуем подобрать такую последовательность a_n, что $|x_n - a| \leqslant a_n$ и есть шанс подобрать по заданному $\varepsilon > 0$ номер n_0 для последовательности a_n так, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Если ясно, как это сделать, то найденный номер n_0 подойдет и для разности $|x_n - a|$ — она ведь не больше чем a_n и тем более будет меньше чем ε. Если еще недостаточно видно, как подобрать номер для последовательности a_n, то, в свою очередь, можно попробовать ограничить ее другой последовательностью, более простой, но все еще малой. И так продолжать процесс до тех пор, пока не появится последовательность, для которой требуемый номер найти уже легко. Как только нам удастся выработать правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$, доказательство закончится. Можно заметить, что отличие от неограниченности или точных границ в том, что там достаточно найти один элемент, а здесь надо обеспечить выполнение неравенства для всех членов последовательности, начиная с некоторого.

Можно рассуждать несколько иначе. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Обратимся к тому, что от нас потребуется. Мы должны обеспечить выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех достаточно далеких номеров n. Поставим вопрос: *откуда можно получить выполнение такого неравенства*? Иначе говоря, *из какого соотношения это неравенство вытекает*? Если взять последовательность a_n такую, что $|x_n - a| \leqslant a_n$, и найти номер n_0 такой, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$, то для этих же номеров n будет выполнено и требуемое неравенство. Если для последовательности a_n выбор номера затруднен, то процесс можно продолжить и вновь обратиться к вопросу: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Ответ на него может привести к другой последовательности, и так следует продолжать процесс до тех пор, пока не найдется такая последовательность, для которой выбор номера тривиален.

Эти рассуждения относятся, скорее, к доказательству равенства $a = \lim x_n$ для конкретной последовательности x_n. Отчасти их можно применять и тогда, когда речь идет о доказательстве утверждений с участием предела. Однако если для конкретной последовательности выбор номера обеспечивается ограничением сверху какими-то также конкретными последовательностями, то в утверждениях выбор требуемого номера, как правило, обеспечивается ограничениями сверху, исходящими из предельных свойств, данных в условии.

Пример 1. Докажем, что

$$\lim \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} = 0. \qquad (*)$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Пойдем в конец определения предела последовательности и посмотрим, что от нас будут ожидать. От нас потребуется обеспечить выполнение неравенства

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| < \varepsilon$$

для всех далеких номеров. Попробуем ограничить левую часть последнего неравенства сверху чем-то более простым, но все еще малым. Заметив, что $|\sin n^2| \leqslant 1$, имеем

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| \leqslant \frac{n}{n^4 + 1}.$$

Легко ли подобрать требуемый номер, исходя из новой последовательности, т. е. насколько легко выразить n через ε из неравенства

$$\frac{n}{n^4 + 1} < \varepsilon?$$

По-видимому, не столь легко, сколь хотелось бы. Поэтому попробуем ограничить выражение $\dfrac{n}{n^4 + 1}$ сверху сверху чем-то более простым, но все еще малым. Уменьшив знаменатель, мы увеличим дробь, поэтому

$$\frac{n}{n^4 + 1} \leqslant \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Легко ли выразить n через ε из неравенства $\dfrac{1}{n^3} < \varepsilon$? Легко. Можно выразить, а можно еще облегчить выражение, если заметить, что $\dfrac{1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n}$, а из неравенства $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ выразить n через ε совсем легко. Последнее неравенство равносильно тому, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, и в качестве требуемого номера n_0 можно взять любое натуральное число, большее чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Например, можно взять $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где взятие целой части (символизируют квадратные скобки) «обнатураливает» дробь $\dfrac{1}{\varepsilon}$, при этом, возможно, немного

уменьшая ее, а добавление единицы делает результат бóльшим, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Если $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, то для любого $n \geqslant n_0$ тем более $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а тогда, пользуясь логикой предыдущих рассуждений, можно гарантировать, что для таких номеров также

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| < \varepsilon.$$

Правило выбора требуемого номера n_0 по заданному ε сформировано, значит, соотношение $(*)$ доказано.

Пример 2. Доказать, что $\lim \frac{n}{2^n} = 0$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Ориентируясь на него, озаботимся поиском оценки сверху для членов нашей последовательности. Пронаблюдав за несколькими первыми ее членами, предположим, что $\frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$, т. е. $n^2 \leq 2^n$ для $n \geq 4$. Действительно, такое неравенство верно, что легко доказывается, например, методом математической индукции. Значит, $\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, и мы пришли к достаточно простой последовательности для обеспечения выбора номера. Подберем n_0 так, чтобы $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, т. е. возьмем какое-либо натуральное n_0, удовлетворяющее неравенству $n_0 \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для $n \geq n_0$ будет $\frac{1}{n} < \varepsilon$, а значит, и $\frac{n}{2^n} \leq \varepsilon$.

Пример 3. Пусть $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\lim \sin x_n = \sin a$.

Поскольку пока кроме определения у нас в распоряжении ничего нет, будем ориентироваться на определение. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Надо обеспечить выполнение неравенства $|\sin x_n - \sin a| < \varepsilon$ для всех достаточно далеких номеров n. Попробуем оценить разность $|\sin x_n - \sin a|$ сверху чем-то более простым и связанным с разностью $|x_n - a|$, ибо только из этой разности, используя условие, можно ожидать гарантию существования требуемого номера. Воспользуемся известными тригонометрической формулой и неравенством $|\sin t| \leqslant |t|$. Имеем

$$|\sin x_n - \sin a| = 2\left|\sin \frac{x_n - a}{2} \cos \frac{x_n + a}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x_n - a}{2}\right| \leqslant |x_n - a|. \quad (*)$$

Поскольку $\lim x_n = a$, для произвольного ε_1 найдется такой номер n_1, что для любого $n \geqslant n_1$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon_1$. Теперь, взяв ε,

воспользуемся тем, что дано, возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon$, по нему найдем номер n_1, и неравенство $(*)$ позволяет утверждать, что, положив $n_0 = n_1$, получаем искомый номер. Требуемое равенство доказано.

ПРАКТИКА

1. Доказать равенства

(1) $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1,$ **(2)** $\lim \dfrac{1}{n!} = 0,$

(3) $\lim \dfrac{n^2 \sin n!}{(n+1)^3} = 0,$ **(4)** $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$

2. Доказать равенства

(1) $\lim \dfrac{2^n}{n!} = 0,$ **(2)** $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0,$

(3) $\lim \dfrac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1,$ **(4)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0,\ a > 1,\ k \in \mathbb{R},$

(5) $\lim \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0,$ **(6)** $\lim nq^n = 0,\ |q| < 1,$

(7) $\lim \sqrt[n]{n} = 1,$ **(8)** $\lim \dfrac{\log_a n}{n} = 0,$ **(9)** $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

3. Пусть $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Доказать равенства
(1) $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{a},$ **(2)** $\lim \cos x_n = \cos a,$
(3) $\lim 2^{x_n} = 2^a,$ **(4)** $\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}.$

3. Доказать, что последовательность $x_n = n^2 \cos \dfrac{n\pi}{2}$ неограниченная, но не является бесконечно большой.

4. Доказать, что

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\log_a n)^p = +\infty,\ a > 1,\ p \geq 1;$

(2) $\lim(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n}) = +\infty.$

(3) $\lim(4\sqrt{n} - n) = -\infty;$ **(4)** $\lim \dfrac{2}{1 - \sqrt[n]{n}} = -\infty.$

3.3. Критерий Коши.

ТЕОРИЯ

Одной из особенностей множества вещественных чисел является наличие аксиомы полноты, формулируемой в том или ином виде. Она гарантирует существование числа при определенных условия. С одним из ее выражений мы уже встречались, когда утверждали, что для любого множества в $\overline{\mathbb{R}}$ существуют его точные границы. Есть несколько форм гарантий существования в терминах предала, и одна из них выражается в виде критерия Коши.

Как можно заметить, в определении предела участвует само значение предела. Однако бывает важно просто знать, сходится последовательность или нет. Сформулированный ниже критерий дает принципиальную возможность судить о сходимости числовой последовательности, не прибегая к значению ее предела.

Определение. Последовательность x_n называют *фундаментальной*, или *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall m > n_0\, \forall n > n_0) \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Условие фундаментальности иногда удобно использовать в следующем виде:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n > n_0\, \forall p \geq 0) \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши). *Для существования конечного предела числовой последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

ТЕХНОЛОГИИ

Критерий Коши редко используется для доказательства сходимости конкретных последовательностей, он чаще участвует в теоретических вопросах. Тем не менее надо представлять себе основные особенности его применения.

Для доказательства сходимости последовательности с помощью критерия Коши надо поступать так же, как поступали при доказательстве того, что некоторое число является пределом данной последовательности. Отличие здесь в том, что при обосновании фундаментальности надо по заданному ε конструировать правило выбора номера, обслуживающего не один индекс, как в пределе последовательности, а два, стало быть,

разность $|x_{n+p} - x_n|$ надо оценивать сверху чем-то более простым, малым и не зависящим от p, чтобы влияния этого параметра на выбор номера не было. Конкретная реализация указанного пожелания своя в каждом конкретном случае.

ПРАКТИКА

1. Используя критерий Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n, \quad |a_k| \le M,\ k = 0, 1, \ldots,\ |q| < 1; \tag{1}$$

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}; \tag{2}$$

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}; \tag{3}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}. \tag{4}$$

2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательностей

(1) $\sin n$, **(2)** $(-1)^n$, **(3)** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, **(4)** $\cos n$.

3. Говорят, что *последовательность x_n имеет ограниченное изменение*, если существует такое число C, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \le C$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится. Обратное неверно (построить пример).

3.4. Нахождение предела последовательности.

ТЕОРИЯ

Нахождение предела последовательности — не самая популярная задача, ибо в рядовых случаях она решается без особого труда, а не в рядовых может представлять собой достаточно тонкое исследование. Тем не менее какие-то навыки по этому поводу приобрести не помешает.

При нахождении предела последовательности можно использовать связь предела с алгебраическими операциями, отраженную в следующем утверждении.

Утверждение (связь предела с алгебраическими операциями). *Если x_n, y_n — сходящиеся последовательности и $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, то*

последовательности $x_n + y_n$, $x_n \cdot y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ *также сходятся* (*последняя при условии* $y \neq 0$), *при этом*

$$\lim(x_n + y_n) = x + y, \quad \lim x_n y_n = xy, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Результат этого утверждения распространяется и на те случаи, когда хотя бы какой-то из пределов бесконечен. В этом случае утверждение верно, если соответствующий результат имеет смысл. Например, если $x \in \mathbb{R}$, $y = \infty$, то предел суммы бесконечен. Формулировка результата для всех ситуаций предоставляется читателю.

Теорема (о пределе монотонной последовательности). *Всякая монотонная последовательности вещественных чисел имеет предел* (*в* $\overline{\mathbb{R}}$). *Если она неубывающая и ограничена сверху или невозрастающая и ограничена снизу, то ее предел конечен.*

Могут оказаться полезными следующие утверждения.

Теорема (о зажатой последовательности). *Пусть последовательность* z_n *зажата между последовательностями* x_n *и* y_n, *т. е. для любого* $n \in \mathbb{N}$ *либо* $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, *либо* $y_n \leqslant z_n \leqslant x_n$. *Если последовательности* x_n *и* y_n *имеют пределом значение* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *то и* z_n *стремится к* a.

Теорема (о произведении бесконечно малой на ограниченную). *Пусть последовательность* x_n *ограниченная, а* $\lim y_n = 0$. *Тогда* $\lim x_n y_n = 0$.

ТЕХНОЛОГИИ

При нахождении предела последовательности в первую очередь надо задать вопрос: «как устроена последовательность?», и если это результат применения алгебраических операций, надо проверить, выполняются ли условия теоремы о связи предела с алгебраическими операциями. В случае их выполнения применение теоремы может привести к результату. Если последовательность есть результат применения операций, но не выполнены условия теоремы, надо посмотреть, можно ли преобразовать общий член так, чтобы обеспечить выполнение условий теоремы.

Утверждение о связи предела и алгебраических операций действенно для явно заданных последовательностей, т. е. для таких последовательностей, у которых для ее общего члена есть выражение в виде формулы. Однако последовательность не всегда имеет явное задание. Может оказаться, что она задана рекуррентно, т. е. указывается например первый ее член и правило перехода от каждого из членов к непосредственно за ним

следующему. Иначе говоря, задается x_1 и формула вида $x_{n+1} = f(x_n)$. Бывают последовательности, у которых задано более одного из первых членов, но тогда должно быть указано правило формирования очередного члена в зависимости от такого количества его предшественников, сколько членов задано в начале. Для рекуррентно заданных последовательностей можно поступить, например, так. Сначала доказать, что последовательность сходится (например, с помощью критерия Коши или используя теорему о сходимости монотонных последовательностей), обозначить значение предела какой-то буквой, например x, а затем перейти к пределу в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$. Если функция f достаточно хорошая, то получается уравнение $x = f(x)$ для предела последовательности, и если его можно решить, то значение предела находится.

Пример 1. Найти предел $\lim \dfrac{n^3 + 2^n}{n + 2^{n+1}}$.

Как устроена последовательность? Это частное. Можно ли воспользоваться теоремой о пределе частного? Нельзя, ибо пределы как числителя, так и знаменателя бесконечны. В этом случае надо попытаться провести преобразования, опираясь на следующее соображение. Посмотрим, за счет чего пределы числителя и знаменателя бесконечны, т. е. какие их фрагменты обеспечивают бесконечный предел. Ясно, что все слагаемые в числителе и знаменателе стремятся к бесконечности. Тогда надо понять, какие из них стремятся «быстрее». Это степени. Их надо вынести за скобки:

$$\lim \frac{n^3 + 2^n}{n + 2^{n+1}} = \lim \frac{2^n\left(\frac{n^3}{2^n} + 1\right)}{2^n\left(\frac{n}{2^n} + 2\right)} = \lim \frac{\frac{n^3}{2^n} + 1}{\frac{n}{2^n} + 2} \underset{(1)}{=} \frac{\lim \frac{n^3}{2^n} + 1}{\lim \frac{n}{2^n} + 2} = \frac{1}{2},$$

где переход (1) возможен, так как выше доказано, что $\lim \dfrac{n^\alpha}{2^n} = 0$, тем самым пределы числителя и знаменателя существуют и конечны, а стало быть, можно воспользоваться теоремой о пределе частного.

Пример 2. Пусть последовательность x_n задана следующим образом:

$$x_1 = a > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Найти ее предел.

Поскольку последовательность задана рекуррентно, как отмечено выше, сначала попробуем доказать существование ее предела, а затем, пе-

рейдя к пределу в определяющем последовательность равенстве, найдем значение предела.

Начнем с монотонности, и в зависимости от вида монотонности станет ясно, ограниченность с какой стороны потребуется. Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right).$$

Ясно, что надо сравнить a и x_n^2. По определению

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - a$$
$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geqslant 0,$$

тем самым $a < x_n^2$, $\dfrac{a}{x_n^2} < 1$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ и последовательность x_n убывающая. Ее ограниченность снизу очевидна, ибо она состоит из положительных членов. Следовательно, она как убывающая и ограниченная снизу имеет конечный предел. Пусть $\lim x_n = x$. Переходя к пределу в определяющем последовательность равенстве, для x получаем уравнение

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

корень которого равен $\sqrt{a}$.

ПРАКТИКА

1. Пусть последовательность x_n сходится, а y_n расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей $x_n + y_n$ и $x_n y_n$?

2. Найти пределы:

(1) $\lim \dfrac{n^2 - n + 1}{3n_n^3 + 2}$, **(2)** $\lim \dfrac{\sqrt{3n+2}}{2n-3}$,

(3) $\lim \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}$, **(4)** $\lim(\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n + 1})$,

(5) $\lim \dfrac{n\cos(n^2 + n - 1)}{\sqrt{n^3 + 2n}}$, **(6)** $\lim \dfrac{\sqrt{n+1} - n}{\sqrt{n+1} + n}$,

(7) $\lim \dfrac{\lg n + \lg(n+1)}{\lg(n+2) + \lg(n+3)}$, **(8)** $\lim \dfrac{3 \cdot 2^n + 5}{2 - 3 \cdot 2^n}$.

3. Найти пределы рекуррентно заданных последовательностей:

(1) $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$;
(2) $x_1 = \sqrt{a}$, $a > 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

3.5. Подпоследовательности и частичные пределы. Верхний и нижний пределы.

ТЕОРИЯ

Определение. Пусть x_n — последовательность, а n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т. е. $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots$. Последовательность $y_k = x_{n_k}$, т. е. композицию данной последовательности и строго возрастающей последовательности номеров, называют *подпоследовательностью последовательности* x_n.

Если какая-то подпоследовательность последовательности имеет предел, его называют *частичным пределом данной последовательности.*

Теорема 1. *Если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность также имеет предел, равный пределу всей последовательности.*

Теорема 2. *Из всякой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую предел (в* $\overline{\mathbb{R}}$*). Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Определение. Пусть x_n — последовательность вещественных чисел. Составим последовательности

$$y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}, \quad z_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Последовательность y_n невозрастающая, а z_n неубывающая. Их пределы называют соответственно *верхним* и *нижним пределами данной последовательности* и обозначают через $\overline{\lim}\, x_n$ (или $\limsup x_n$) и $\underline{\lim}\, x_n$ (или $\liminf x_n$).

Теорема. *Верхний и нижний пределы суть наибольший и наименьший из частичных пределов соответственно.*

ТЕХНОЛОГИИ

Верхний и нижний, а также частичные пределы имеют, скорее, теоретическую, чем практическую ценность. Дело в том, для последовательности, имеющей предел, все частичные пределы равны этому пределу. Верхний и нижний пределы полезны по крайней мере тем, что они всегда существуют, у любой последовательности, и это полезно с точки зрения

гарантий существования. Частичные пределы полезны при доказательстве отсутствия предела данной последовательности: достаточно построить две ее подпоследовательности, имеющие различные пределы, и вся последовательность предела иметь не может. Это хорошее дополнение к критерию Коши с точки зрения изучения отсутствия предела.

Для нахождения частичных пределов надо пронаблюдать, как изменяются члены последовательности в зависимости от номеров, и это обычно приводит к получению всех частичных пределов. Верхний и нижний пределы суть наибольший и наименьший из частичных, так что если найдены частичные пределы, то есть также верхний и нижний.

ПРАКТИКА

1. Найти верхний и нижний пределы последовательностей

(1) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$, **(2)** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$,

(3) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$, **(4)** $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

2. Доказать, что для любых ограниченных последовательностей x_n, y_n вещественных чисел имеют место неравенства

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leqslant \underline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n,$$

а если члены последовательностей неотрицательны, то

$$\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \leqslant \underline{\lim}(x_n \cdot y_n) \leqslant \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}(x_n \cdot y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n.$$

Привести примеры последовательностей, для которых все неравенства строгие.

3. Построить последовательность, имеющую частичными пределами данные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

4. Построить последовательность, имеющую частичными пределами данные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

5. Доказать расходимость последовательностей:

(1) $\cos\dfrac{n\pi}{2}$, **(2)** $\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$.

Дополнение

Приведем небольшой набор задач теоретического плана. Их решение не входит в объем обязательной работы, но для студентов, хорошо разобравшихся в основном материале, полезно порешать задачи такого типа.

1. Пусть $\overline{\lim}\,\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, где $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim x_n = 0$.

2. Пусть последовательность x_n такова, что $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$. Доказать, что $\dfrac{x_n}{n} = a$.

3. Доказать, что если последовательность x_n сходится, то последовательность средних арифметических $a_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ также сходится, при этом $\lim a_n = \lim x_n$. Обратное неверно.

4. Пусть $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, где $y \neq 0$ и $y_1 + y_2 + \cdots + y_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = \frac{x}{y}.$$

5. Пусть $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x$. Доказать, что $\lim \sqrt[n]{x_n} = x$.