§ 1.5. Непрерывные функции

5.1. Непрерывность функции в точке и на множестве.

ТЕОРИЯ

Определение непрерывности функции в точке. Рассмотрим функцию f и точку $a \in \mathbb{R}$. Если a принадлежит области определения $D(f)$ функции f, то будем говорить, что функция f *непрерывна в точке* a, если

$$(\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D(f)) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Если к тому же a — предельная точка множества $D(f)$, то непрерывность f в a равносильна тому, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и выполнено равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Если же a не является предельной точкой $D(f)$ и тем самым говорить о пределе в этой точке невозможно, то любая функция в такой точке непрерывна. Договоримся также считать функцию f непрерывной в предельной точке множества $D(f)$, не принадлежащей $D(f)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (требовать в этом случае равенства его значению функции в точке затруднительно — точка по предположению не входит в область определения, так что такого значения просто нет).

В случае отсутствия непрерывности функции в данной точке говорят, что она *разрывна* в этой точке.

Теорема (о непрерывности функций, полученных в результате алгебраических операций). *Линейная комбинация, произведение и отношение* (*последнее при условии отличия от нуля знаменателя*) *непрерывных в точке a функций непрерывны в этой точке.*

Теорема (о непрерывности композиции). *Пусть функция f непрерывна в точке a, а функция g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.*

Определение (классификация точек разрыва). Точку a называют *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные односторонние пределы $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$. Говорят, что разрыв первого рода *устранимый*, если $f(a+0) = f(a-0)$. Во всех остальных случаях говорят, что a — *точка разрыва второго рода*.

Определение непрерывности функции на множестве. Говорят. что функция *непрерывна на множестве*, если ее сужение на это множество непрерывно в каждой точке данного множества.

Подчеркнем, что в данном определении непрерывности функции на множестве затрагиваются значения только в точках данного множества, в то время как значения в точках, в него не входящих, никакого влияния на непрерывность на данном множестве не оказывают.

ТЕХНОЛОГИИ

При исследовании непрерывности функции в данной точке сначала надо определить, что это за точка — входит ли она в область определения функции или нет и является ли она предельной точкой области определения. Если это точка из области определения, но не предельная точка, то ответ готов — функция в такой точке непрерывна.

Как правило, рассматриваемая точка будет предельной точкой области определения. В таком случае задаем вопрос «как устроена функция?» в расчете на то, что устройство функции позволит воспользоваться соответствующими теоремами. Если конструкция функции позволяет использовать какую-то теорему о непрерывности функций, составленных из непрерывных функций, вопрос о непрерывности в таких точках решается положительно.

Если же вид функции не позволяет применить какую-то из теорем, то надо изучить существование предела (хотя бы односторонних пределов). Если конечного предела нет, то нет и непрерывности. Если конечный предел есть, то надо посмотреть, определена ли функция в этой точке, и если нет, то, как мы выше договорились, она в ней уже непрерывна (только за счет существования предела). Если определена, то надо сравнить значение предела со значением функции, и если они одинаковы, то функция непрерывна, если нет, то разрывна.

4.4. Пример. Исследуем на непрерывность функцию

$$f(x) = [x] \sin \pi x,$$

где квадратные скобки указывают на целую часть числа, т. е. $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Функция f определена на всем $\mathbb{R}$ и представляет собой произведение двух функций, из которых $\sin \pi x$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Покажем, что функция $[x]$ непрерывна в каждой точке $a \notin \mathbb{Z}$, и тогда f

будет непрерывной на множестве всех нецелых вещественных чисел как произведение непрерывных функций. Действительно, если $a \notin \mathbb{Z}$, то существует такая окрестность $(a-r, a+r)$ точки a, которая не содержит целых чисел, а тогда целая часть $[x]$ во всех точках такой окрестности принимает одно и то же значение, т. е. совпадает с непрерывной (тождественно постоянной) функцией и, значит, сама непрерывна в a.

Пусть $a \in \mathbb{Z}$. В любой достаточно малой (настолько малой, чтобы в ней не было отличных от a целых точек) окрестности точки a слева от a будет $[x] = a - 1$, а справа от a оказывается $[x] = a$. Отсюда $\lim\limits_{x \to a-0} [x] = a - 1$, $\lim\limits_{x \to a+0} [x] = a$, и ввиду различия пределов слева и справа заключаем, что предела в этой точке нет, так что $[x]$ разрывна в произвольной целой точке.

Итак, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций приходим к непрерывности нашей функции во всех нецелых точках. Можно ли утверждать, что в каждой целой точке она будет разрывна? Нет, пока нельзя. Нам только известно, что в таких точках не выполняются условия теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций, но будет ли при этом произведение разрывным — вопрос пока открытый.

Отметим, что $\lim\limits_{x \to n} \sin \pi x = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. По теореме о пределе произведения ограниченной функции на бесконечно малую будет $\lim\limits_{x \to n} [x] \sin \pi x = 0$, так как целая часть вблизи любой конечной точки ограничена. Тем самым $[n] \sin \pi n = 0$, если $n \in \mathbb{Z}$. Получили, что предел функции в любой целочисленной точке совпадает с ее значением в такой точке, следовательно, наша функция непрерывна в каждой целочисленной точке. В итоге приходим к тому, что f непрерывна в каждой точке области определения.

ПРАКТИКА

1. Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

(1) $f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ **(2)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ **(4)** $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(5) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ **(6)** $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi/x))$,

(7) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ **(8)** $f(x) = \cos^2 \dfrac{1}{x}$,

(9) $f(x) = x[x]$, **(10)** $f(x) = x[1/x]$,

(11) $f(x) = e^{-1/x}$, **(12)** $f(x) = \arcsin(1/x)$.

2. Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

(1) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$, $x \geq 0$, **(2)** $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$

(3) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos^{2n} x$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

3. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x)$$

разрывна при каждом $x \in \mathbb{R}$.

4. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n} \text{ и } m, n \text{ взаимно просты}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x.

5. Обязательно ли будет разрывной в данной точке a сумма $f(x) + g(x)$, если (а) функция f непрерывна, а g разрывна в точке a; (б) обе функции f, g разрывны в точке a?

6. Обязательно ли будет разрывным в данной точке a произведение $f(x)g(x)$, если (а) функция f непрерывна, а g разрывна в точке a; (б) обе функции f, g разрывны в точке a?

7. Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$, $g(f(x))$, если (а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2$; (б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x(1 - x^2)$; (в) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x - [x]$.

8. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то и $|f(x)|$ — непрерывная функция.

9. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то функция

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{если } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{если } |f(x)| \le c, \\ c, & \text{если } f(x) > c, \end{cases}$$

где c — любое (фиксированное) положительное число, также непрерывна.

10. Доказать, что если функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны, то функции $\varphi(x) = \max(f(x), g(x))$, $\psi(x) = \min(f(x), g(x))$ непрерывны.

5.2. Равномерная непрерывность

В определении непрерывности функции в точке говорится, что по заданному $\varepsilon > 0$ требуется найти $\delta > 0$, для которого будут выполнены указанные далее в определении свойства. Ясно, что такое δ должно зависеть от ε и от той точки, в которой рассматривается непрерывность. Отметим эту зависимость явно, записав определение непрерывности функции f в точке a:

$$(\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon, a, f) > 0\, \forall x) \quad |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Вместе с тем может оказаться, что по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать δ так, чтобы оно подходило для всех точек a из некоторого множества X, т. е. было бы пригодным при заданном ε в равной мере для всех $a \in X$. Эта ситуация нашла свое отражение в определении равномерной непрерывности функции на заданном множестве.

Определение равномерной непрерывности. Пусть даны функция f и множество $X \subset D(f)$. Говорят, что f *равномерно непрерывна на* X, если

$$(\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon, f) > 0\, \forall x_1 \in X\, \forall x_2 \in X) \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что в отличие от непрерывности свойство равномерной непрерывности содержательно только если его рассматривать на некотором (не конечном) множестве.

Если функция равномерно непрерывна на каком-то множестве, то она будет таковой и на любом его подмножестве.

Утверждение (теорема Кантора). *Непрерывная на замкнутом ограниченном промежутке числовой прямой функция равномерно непрерывна на нем.*

ТЕХНОЛОГИИ

Хорошее средство доказательства равномерной непрерывности функции появится позже, оно состоит в ограниченности производной функции на данном множестве. К настоящему моменту для доказательства равномерной непрерывности у нас в распоряжении есть только теорема Кантора и определение. При использовании определения можно руководствоваться соображениями, аналогичными рекомендациям, высказанным при обосновании предела последовательности с использованием определения: надо ограничивать разность $|f(x_1) - f(x_2)|$ сверху чем-то более простым и зависящим от разности $|x_1 - x_2|$ таким образом, чтобы из этой зависимости и соответствующих оценок можно было сформировать правило выбора δ по заданному ε.

Можно учитывать следующее образное восприятие равномерной непрерывности: она означает, что функция на данном множестве не имеет участков с неограниченно увеличивающейся крутизной.

Для доказательства отсутствия равномерной непрерывности на заданном множестве можно использовать отрицание заложенного в определении равномерной непрерывности свойства, а именно доказывать, что

$$(\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta(\varepsilon, f) > 0\, \exists x_1 \in X\, \exists x_2 \in X) \quad |x_1 - x_2| < \delta \& |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon.$$

При этом полезно учитывать сказанное выше восприятие равномерной непрерывности. Ее отсутствие надо обнаруживать там, где функция имеет участки с неограниченно возрастающей скоростью изменения.

4.7. Пример. Покажем, что функция $f(x) = x^2$ равномерно непрерывна на любом промежутке $(-l, l)$, $0 < l < +\infty$, и не будет равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Действительно, по теореме Кантора функция x^2, будучи непрерывной, равномерно непрерывна на каждом замкнутом ограниченном промежутке, в частности на $[-l, l]$, а тогда она равномерно непрерывна и на $(-l, l)$.

Рассмотрим теперь $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$. Отсутствие равномерной непрерывности связано с увеличением крутизны функции, а это происходит при удалении аргумента. Запишем утверждение, означающее отсутствие равномерной непрерывности x^2 на $\mathbb{R}$:

$$(\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x_1 \in \mathbb{R}\, \exists x_2 \in \mathbb{R}) \quad |x_1 - x_2| < \delta) \& |x_1^2 - x_2^2| \geqslant \varepsilon.$$

Значение ε будем подбирать в последнюю очередь, когда по произвольному $\delta > 0$ выберем x_1 и x_2, ориентируясь на необходимость получения неравенства $|x_1^2 - x_2^2| \geq \varepsilon$. Пусть дано $\delta > 0$. Надо подобрать пару точек, отличающихся друг от друга меньше, чем на δ. Пусть $x_1 > 0$ — одна из таких точек, тогда вторую возьмем в виде $x_2 = x_1 + \alpha$, где α — какое-либо положительное число такое, что $\alpha < \delta$ (этим мы обеспечим неравенство $|x_2 - x_1| < \delta$). Рассмотрим разность

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_1 + \alpha)^2 - x_1^2 = \alpha(2x_1 + \alpha).$$

Зададимся вопросом: как сделать последнее выражение бóльшим какого-то числа, и какое это может быть число? Поскольку мы пока вольны в выборе x_1, ясно, что разумно взять его таким: $x_1 = 1/\alpha$. Тогда для такого x_1 получим

$$\alpha(2x_1 + \alpha) = \alpha(2/\alpha + \alpha) = 2 + \alpha^2 > 2,$$

откуда видно теперь, что в качестве требуемого ε можно взять $\varepsilon = 2$, и тогда при заданном $\delta > 0$ надо взять любое x_1 такое, что $1/x_1 < \delta$, а к нему взять $x_2 = x_1 + \alpha$, где $\alpha < \delta$. В итоге окажется, что $|x_2 - x_1| < \delta$, а вместе с тем $|x_2^2 - x_1^2| \geq 2$.

ПРАКТИКА

1. Показать, что функция $f(x) = \sin(\pi/x)$ непрерывна и ограничена в промежутке $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на нем.

2. Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, однако не является там равномерно непрерывной.

3. Показать, что функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

4. Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$ и на $[b, c]$, то она равномерно непрерывна на $[a, c]$.

5. Говорят, что функция f *удовлетворяет на множестве E условию Липшица*, (с константой K), если $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ для любых $x, y \in E$. Доказать, что если f удовлетворяет условию Липшица на множестве E, то она равномерно непрерывна на этом множестве.