§ 1.6. Производная

6.1. Производная функции в точке. Нахождение, геометрический смысл.

ТЕОРИЯ

Рассмотрим интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$, функцию f, заданную на (a,b), и точку $x \in (a,b)$. Если существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

его называют *производной функции f в точке x* и обозначают символом $f'(x)$. Если производная $f'(x)$ конечна, то f называют *дифференцируемой в точке* x. Дифференцируемую в каждой точке интервала (a,b) функцию называют *дифференцируемой* на этом интервале.

Пределы

$$f'_-(x) = \lim_{h\to -0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_+(x) = \lim_{h\to +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

если они существуют, называют *левой* и *правой* производными (или *производной слева* и *справа*, или *односторонними производными*) функции f в точке x. Если существует производная функции в точке, то существуют равные ей односторонние производные. Обратно, если существуют равные между собой односторонние производные, то существует и производная функции в данной точке, равная значению односторонних производных. Если f определена на замкнутом промежутке $[a,b]$, то в точках a, b можно рассматривать соответственно производные справа и слева.

Нахождение производной основано на соответствующих теоремах и на производных элементарных функций.

Теорема 1. *Пусть функции f, g дифференцируемы в точке x. Тогда сумма $f+g$, произведение $f\cdot g$ и частное f/g (последнее при условии $g(x)\neq 0$) дифференцируемы в точке x и*

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Теорема 2 (о производной композиции). *Пусть функция f дифференцируема в точке x, а функция g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и*

$$(g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{$*$}$$

Пусть на (a, b) задана функция f, и пусть $x_0 \in (a, b)$ — точка, в которой существует конечная производная функции f. С геометрической точки зрения прямая с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, являющаяся графиком функции

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

представляет собой касательную к графику функции f в точке x_0. График функции

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

перпендикулярен касательной и является нормалью к графику функции f.

Приведем таблицу производных основных функций, при этом не будем указывать каждый раз на область изменения переменной x или параметров α, a — она всегда будет определяться из условия существования соответствующей функции:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \tag{1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x, \tag{2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{3}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \tag{4}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{5}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{6}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \tag{7}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \ (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{8}$$

ТЕХНОЛОГИИ

При исследовании функции на дифференцируемость и нахождении производной в первую очередь надо выяснить, как устроена функция в некоторой окрестности данной точки, и если ее устройство позволяет воспользоваться сформулированными выше утверждениями, то применить теоремы и получить результат. Если же устройство функции не позволяет использовать теоремы или не выполнены их условия, то при исследовании дифференцируемости надо воспользоваться определением — составлять отношение приращения функции к приращению аргумента и изучать существование предела этого отношения при стремлении к нулю приращения аргумента.

Применение теоремы о нахождении производной функции, представляющей собой результат действия алгебраических операций, заложено в формулах из соответствующих частей формулировки. Некоторые затруднения возникают, если функция представляет собой композицию нескольких функций. Понимая, что большинство читателей уже освоили это правило, тем не менее остановлюсь на нем подробнее для тех, кто только начинает осваивать технику нахождения производной.

Напомним, что устройство функции определяется последней операцией, которая совершается при нахождении значений функции. Это может быть сумма, произведение, частное функций или применение какой-то известной функции. В интересующем нас случае имеем композицию, в которой в качестве последней операции выступает последняя действующая функция. Например, для функции $\sin^2 x$ последнее действие — возведение в квадрат, для $\sin x^2$ — нахождение синуса, и т. п.

На основе теоремы о производной композиции и формулы $(*)$ сконструируем образную процедуру, призванную помочь в освоении правила. Для простоты будем считать, что f и g таковы, что их производные находятся непосредственно, например, по таблице производных. После того как правило нахождения производной будет хорошо усвоено, от этого предположения можно отказаться — цель использования процедуры будет достигнута.

Представим себе действие функции f как правило, которое надо применить самым последним при нахождении значения функции h, и запишем это условно как действие правила f на некоторый ящик, в котором находится что-то, пока нам не известное, зависящее от переменной дифференцирования x:

$$h(x) = f(\sqcup).$$

Приступаем к дифференцированию. Сначала находим производную $f'(\sqcup)$ функции f, считая ящик единым целым. Затем открываем ящик и смотрим, что в нем находится. Если оказалась переменная дифференцирования x, то процесс нахождения производной закончен, если новая зависимость, то производную $f'(\sqcup)$ умножаем на производную содержимого ящика, которую находим по тому же принципу, как и производную первой функции. Подчеркнем, что появление в ящике переменной x — это признак завершения процесса нахождения производной.

Пример 1. Найдем производную функции $f(x) = \sin^2 x$. Последняя операция при нахождении значения этой функции на элементе x — возведение в квадрат, поэтому функцию схематично можно представить в виде $(\sqcup_1)^2$ и воспользоваться правилом нахождения производной от степенной функции: $((\sqcup_1)^2)' = 2 \cdot \sqcup_1$ (постановка индекса 1 около ящика указывает на то, что это ящик, появившийся на первом шаге, появляющиеся на следующих шагах ящики в отличие от этого будут снабжаться индексами, соответствующими очередному шагу). Открываем ящик и видим там функцию $\sin x$. Последней операцией при нахождении значения этой функции является взятие синуса, так что она имеет вид $\sin(\sqcup_2)$. Находим производную от синуса, т. е. $\cos(\sqcup_2)$, умножаем на нее найденное выше значение: $2 \cdot \sqcup_1 \cdot \cos(\sqcup_2)$, и открываем ящик. Там находится переменная x, значит, процесс закончен, и, заменяя ящики их содержимым, находим, что $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$.

Пример 2. Найдем производную функции $f(x) = \sin x^2$. Последняя операция при нахождении значения этой функции на элементе x — взятие синуса, поэтому представим функцию как $\sin(\sqcup_1)$. Найдем производную: $(\sin(\sqcup_1))' = \cos(\sqcup_1)$. Открыв ящик, находим там x^2. Здесь последняя операция — возведение в квадрат какой-то величины (находящейся в новом ящике), т. е. $(\sqcup_2)^2$. Находим от нее производную: $((\sqcup_2)^2)' = 2(\sqcup_2)$. Открыв теперь ящик, обнаруживаем там переменную x, следовательно, процесс закончен, и можно собрать результат: $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$.

Пример 3. Найдем производную функции $f(x) = \sin^2 x^2$. Последняя операция при нахождении значения этой функции — возведение в квадрат синуса, поэтому функцию схематично можно представить в виде

$(\sqcup_1)^2$ и воспользоваться правилом нахождения производной от степенной функции: $((\sqcup_1)^2)' = 2 \cdot \sqcup_1$. Открываем ящик и видим там функцию $\sin x^2$. Последней операцией при нахождении значения этой функции на элементе x является взятие синуса, так что она имеет вид $\sin(\sqcup_2)$. Находим производную от синуса, т. е. $\cos(\sqcup_2)$, умножаем на нее найденное выше значение: $2 \cdot \sqcup_1 \cdot \cos(\sqcup_2)$, и открываем ящик. Там находится выражение x^2. Здесь последняя операция — возведение в квадрат какой-то величины (находящейся в новом ящике), т. е. $(\sqcup_3)^2$. Находим от нее производную: $((\sqcup_3)^2)' = 2(\sqcup_3)$, умножаем на нее найденное выше значение: $2 \cdot \sqcup_1 \cdot \cos(\sqcup_2) \cdot 2(\sqcup_3)$. Открыв теперь ящик, обнаруживаем там переменную x, следовательно, процесс закончен, и можно собрать результат: $(\sin^2 x^2)' = 2 \sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x$.

Пример 4. Исследуем на дифференцируемость и найдем производную функции $f(x) = |x|$. Согласно определению имеем

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

так что в некоторой окрестности каждой точки $x > 0$ эта функция совпадает с функцией $y(x) = x$, а значит, ее производная в такой точке равна 1. Рассуждая аналогично, можно прийти к выводу, что $f'(x) = -1$ в каждой точке $x < 0$. Остается рассмотреть $x = 0$. Воспользуемся тем, что $f(x)$ определена по-разному слева и справа от нуля и обратимся к пределам слева и справа:

$$\lim_{h \to -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-h}{h} = -1, \quad \lim_{h \to +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h}{h} = 1,$$

и ввиду того, что соответствующие пределы слева и справа различны, в точке 0 предела нет, а вместе с этим и производной нет.

Отметим, что при $x \neq 0$ производную модуля можно записать с использованием функции «знак числа»: $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$.

Пример 5. Исследуем на дифференцируемость и найдем производную функции $f(x) = |\sin^3 x|$. Заметим, что $f(x)$ является композицией $\lambda \circ \psi \circ \varphi$ функций $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(t) = t^3$ и $\lambda(u) = |u|$. Функции φ и ψ дифференцируемы всюду, а функция λ — всюду, кроме нуля. Поэтому утверждение 2 из п. 5.1 гарантирует дифференцируемость композиции в тех точках x, где $\sin^3 x \neq 0$, и в таких точках будет $f'(x) =$

$3\sin^2 x\cdot\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$. Займемся теми точками, в которых $\sin^3 x = 0$, т. е. точками вида $x = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Имеем

$$\frac{|\sin^3(k\pi+h)| - |\sin^3 k\pi|}{h} = \frac{|\sin^3 h|}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

следовательно, $f(x)$ дифференцируема и в каждой точке вида $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, при этом $f'(k\pi) = 0$.

ПРАКТИКА

1. Найти производные следующих функций:

(1) $f(x) = (1+nx^m)(1+mx^n)$, **(2)** $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$,

(3) $f(x) = \dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$, **(4)** $f(x) = x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$,

(5) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, **(6)** $f(x) = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$,

(7) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, **(8)** $f(x) = \sin^n x\cdot\cos nx$,

(9) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$, **(10)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos^n x}$,

(11) $f(x) = e^{-x^2}$, **(12)** $f(x) = e^x(1+\operatorname{ctg}(x/2))$,

(13) $f(x) = e^{ax}\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$, **(14)** $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$,

(15) $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$, **(16)** $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$,

(17) $f(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$, **(18)** $f(x) = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$,

(19) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, **(20)** $f(x) = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$,

(21) $f(x) = \arcsin\dfrac{x}{2}$, **(22)** $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{a}$,

(23) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$, **(24)** $f(x) = \arcsin(\sin x)$,

(25) $f(x) = \arccos(\cos^2 x)$, **(26)** $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$,

(27) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$, **(28)** $f(x) = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

(29) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$, $a > 0$, **(30)** $f(x) = \log_x e$,

(31) $f(x) = x^{1/x}$, **(32)** $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

2. Исследовать на дифференцируемость, найти производные и изобразить графики функций и их производных:

(1) $f(x) = x|x|$, **(2)** $f(x) = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$,

(3) $f(x) = |\cos x|$, **(4)** $f(x) = [x]\sin^2 \pi x$,

(5) $f(x) = |\pi^2 - x^2|\sin^2 x$, **(6)** $f(x) = \arcsin(\cos x)$,

(7) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 1/e, & |x| > 1, \end{cases}$ **(8)** $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0. \end{cases}$

3. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет производную в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, разрывную в нуле.

4. При каких n функция

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

(а) непрерывна в нуле, (б) дифференцируема в нуле, (в) имеет непрерывную в нуле производную?

5. При каких m, n, где $m > 0$, функция

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin\dfrac{1}{|x|^m} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет (а) ограниченную в окрестности нуля производную, (б) неограниченную в окрестности нуля производную?

6. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

7. Найти $f'(a)$, если $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке a.

8. Показать, что функция $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$, не имеет производной в точке a.

9. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le x_0, \\ ax + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция f была дифференцируемой в точке x_0?

10. Пусть

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \le x_0, \\ ax + b, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева в точке x_0. При каком выборе коэффициентов a, b функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0?

11. Можно ли утверждать, что сумма $f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке x, если (а) функция f имеет производную в точке x, а функция g — нет; (б) обе функции f и g не имеют производной в точке x?

12. Можно ли утверждать, что произведение $f(x) \cdot g(x)$ не имеет производной в точке x, если (а) функция f имеет производную в точке x, а функция g — нет; (б) обе функции f и g не имеют производной в точке x?

13. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x\to b} f'(x) = \infty$?

14. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to b} f'(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$?

15. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

16. Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, конечный или бесконечный?

17. Под какими углами пересекаются кривые

(1) $y = x^2$, $x = y^2$; **(2)** $y = \sin x$, $y = \cos x$?

18. Доказать, что семейства парабол $y^2 = p^2 - 2px$ и $y^2 = 2qx + q^2$, $p \ne 0$, $q \ne 0$, образуют ортогональную сетку.

19. Доказать, что семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют ортогональную сетку.

20. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

6.2. Дифференциал функции в точке.

ТЕОРИЯ

Дифференцируемость f в точке x равносильна возможности выделения главной линейной части у приращения $f(x+h) - f(x)$ функции f в окрестности точки x, т. е. возможности представления

$$f(x+h) - f(x) = K \cdot h + o(h) \quad \text{при } h \to 0,$$

или

$$f(x+h) = f(x) + K \cdot h + \alpha(h) \cdot h \quad \text{при } h \to 0,$$

где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. В этом асимптотическом равенстве коэффициент K главной линейной части равен производной $f'(x)$, так что дифференцируемость f в точке x равносильна справедливости асимптотического равенства

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + o(h) \quad \text{при } h \to 0. \tag{1}$$

Главную часть справа в последнем равенстве, т. е. линейную относительно h функцию $f'(x) \cdot h$, называют *дифференциалом функции f в точке x* и при этом используют обозначение

$$df(x)(h) = f'(x) \cdot h. \tag{2}$$

В терминах дифференциала равенство (1) принимает вид

$$f(x+h) - f(x) = df(x)(h) + o(h), \quad h \to 0. \tag{3}$$

Так как для тождественной функции $f(x) = x$ будет $f'(x) = x' = 1$, можно записать, что $dx(h) = 1 \cdot h = h$, и если на место h в правой части (3) подставить выражение $dx(h)$, то равенство станет таким:

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h). \tag{4}$$

Переходя от равенства, выражающего совпадение значений функций слева и справа при каждом h, к равенству в терминах только символов функций, т. е. убирая h слева и справа, получим равенство

$$df(x) = f'(x)\, dx. \tag{5}$$

Именно эту запись и используют для выражения дифференциала функции f в точке x.

ТЕХНОЛОГИИ

Для нахождения дифференциала функции надо найти ее производную и сделать запись вида (5).

Возможность выделения главной части функции в виде дифференциала можно использовать для нахождения приближенных значений функции вблизи таких точек, в которых значение производной легко находится — для этого надо в формуле (3) ограничиться только главной частью и написать, что $f(x+h) - f(x) \approx df(x)(h) = f'(x) \cdot h$ для малых h. Важно при этом иметь в виду, что поскольку дифференциал определяется на основе асимптотического равенства, невозможно оценить погрешность найденного приближенного значения.

ПРАКТИКА

1. Найти дифференциалы:

(1) $d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2))$, **(2)** $d\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

2. Найти дифференциалы в указанных точках:

(1) $d\left(\dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{x-1}{x}\right)$, $x = -1$;

(2) $d\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\ln x}{x}$, $x_1 = 1/e$, $x_2 = e$.

3. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение функции $y = y(x)$ в указанных точках:

(1) $y = \sqrt[3]{x}$, (а) $x = 65$, (б) $x = 125{,}1342$;

(2) $y = \sin x$, (а) $x = 29°$, (б) $x = 359°$.

6.3. Производные высших порядков.

ТЕОРИЯ

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на промежутке (a, b). Если при некотором натуральном n определена производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$ в точках $x \in (a, b)$, полагают $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ в тех точках, в которых существует указанная в правой части производная. При этом саму функцию считают производной нулевого порядка.

ТЕХНОЛОГИИ

При нахождении производных высших порядков можно использовать формулы

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad (x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\pi/2), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\pi/2).$$

Производная порядка n от произведения n раз дифференцируемых функций f, g может быть найдена по формуле Лейбница

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \tag{1}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$.

Формулу для нахождения производной высокого порядка от произведения эффективно применять в том случае, если у одного из множителей производные начиная с некоторого невысокого порядка нулевые. Тогда в сумме (1) остается несколько членов.

ПРАКТИКА

1. Пусть f — трижды дифференцируемая функция. Найти $y''(x)$, $y'''(x)$, если

(1) $y(x) = f(x^2)$, **(2)** $y(x) = f(e^x)$.

2. Показать, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$.

3. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема при $x \le x_0$. Как следует подобрать коэффициенты a, b, c, чтобы функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \le x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

была дважды дифференцируемой?

4. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную порядка n и $g(x) = f(ax+b)$ то $g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

5. Найти $f^{(n)}(x)$, если

(1) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, **(3)** $f(x) = \sin^2 x$,
(4) $f(x) = \sin^3 x$, **(5)** $f(x) = \sin ax \sin bx$, **(6)** $f(x) = x\cos ax$,
(7) $f(x) = e^x \cos x$.

6. Найти $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = x^2 e^{ax}$.

7. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$.

6.4. Производная параметрически заданной функции.

ТЕОРИЯ

Пусть на промежутке $I = \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ заданы гладкие (т. е. имеющие на I непрерывные производные) функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$ в некоторой точке $t_0 \in I$. Тогда в некоторой окрестности (α, β) точки t_0 функция $x = \varphi(t)$ обратима. Пусть $t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к φ функция, определенная в некоторой окрестности (c, d) точки $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда на (c, d) определена функция

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)). \tag{1}$$

Если учесть, что $x = \varphi(t)$, последнее равенство можно записать и так:

$$\psi(t) = f(\varphi(t)) \tag{2}$$

для $t \in (\alpha, \beta)$. О функции f говорят, что она *задана параметрически посредством функций* φ, ψ. Обратим внимание на локальный характер параметрически заданной функции, хотя, конечно, множества, на которых она может быть определена, бывают обширными.

К понятию параметрически заданной функции можно подойти иначе и, возможно, естественнее с интуитивной точки зрения. Пусть, как и выше, на промежутке $I = \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ заданы гладкие функции $x = \varphi(t)$,

$y = \psi(t)$. Пусть фиксирован момент времени t_0, и пусть множество упорядоченных пар $(\varphi(t), \psi(t))$, попавших в некоторый круг с центром в точке $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, представляет собой график некоторой функции $f(x)$. В таком случае говорят, что *функция f задана параметрически посредством функций* $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Тот факт, что точка является графиком функции, означает, что вторая координата равна значению функции на первой, стало быть, функция f характеризуется тем, что

$$\psi(t) = f(\varphi(t))$$

для t из некоторой окрестности точки t_0, т. е. при такой точке зрения равенство (2) служит основой определения параметрически заданной функции.

ТЕХНОЛОГИИ

При выполнении указанных выше условий параметрически заданная функция дифференцируема и ее производная может быть найдена путем дифференцирования либо равенства (1) по x, либо равенства (2) по t с применением теоремы о производной композиции, т. е.

$$f'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}, \tag{3}$$

если исходить из равенства (1), и

$$f'(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{4}$$

если из равенства (2). Обычно при нахождении производной параметрически заданной функции идут вторым путем, т. е. дифференцируют по t равенство (2) и из полученного результата выражают требуемую производную..

Если определяющие функцию f функции φ, ψ имеют вблизи точки t_0 производные более высокого чем первый порядков, то в некоторой окрестности точки x_0 параметрически заданная функция имеет того же порядка производные, которые могут быть найдены последовательным дифференцированием равенства (1) либо равенства (2).

ПРАКТИКА

1. Найти производные первого и второго порядков от функций $f(x)$, заданных параметрически посредством функций $x(t)$, $y(t)$:

(1) $x = e^{-t}, \quad y = t^3$; **(2)** $x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t$;

(3) $x = e^{2t}\cos^2 t, \quad y = e^{2t}\sin^2 t$;

(4) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$.

Ответы. К п. 6.1. (1) $mn(x^{m-1}+x^{n-1}+(m+n)x^{m+n-1})$; (2) $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x| \neq 1)$; (3) $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}(p-(q+1)x-(p+q-1)x^2)$ $(x \neq -1)$; (4) $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x > 0)$; (5) $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$; (6) $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}$; (7) $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ $(|x| < |a|)$; (8) $n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$;
(9) $\frac{2\sin x(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$; (10) $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$ $(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z})$;
(11) $-2xe^{-x^2}$; (12) $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2(x/2)}$; (13) $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$; (14) $\frac{x}{x^4-1}$ $(|x| > 1)$; (15) $a^a\cdot x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$; (16) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (17) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (18) $\frac{1}{\sin x}$ $(0 < x - 2k\pi < \pi,\ k\in\mathbb{Z})$; (19) $-\frac{1}{\cos x}$ $x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z})$; (20) $2\sin(\ln x)$ $(x > 0)$; (21) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $(|x| < 2)$; (22) $\frac{2ax}{x^4+a^2}$; (23) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$; (24) $\operatorname{sgn}(\cos x)$ $(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z})$; (25) $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $(x \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$; (26) $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 < |x| < 1)$; (27) $\frac{1}{1+x^2}$ $(x \neq 1)$; (28) $-\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ $(x \neq 0)$; (29) $\sqrt{a^2-x^2}$; (30) $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $(x > 0,\ x \neq 1)$; (31) $x^{1/x-2}(1-\ln x)$ $(x > 0)$; (32) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x)$.

2. (1) дифференцируема всюду; (2) недифференцируема при $x = 1$; (3) недифференцируема при $x = \frac{2k-1}{2}\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; (4) дифференцируема всюду; (5) дифференцируема всюду; (6) недифференцируема при $x = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; (7) дифференцируема всюду; (8) дифференцируема всюду.

4. (а) $n > 0$, (б) $n > 1$, (в) $n > 2$. **5.** (а) $n \geq m+1$, (б) $1 < n < m+1$. **7.** $\varphi(a)$. **9.** $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$. **10.** $a = f'_-(x_0)$, $b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0)$.

17. (1) $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; (2) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **20.** $a = \frac{1}{2e}$.

К п. 6.2. 1. (1) $9\sqrt{x}\ln x\,dx$; (2) $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2. (1) $-\frac{1}{2}\,dx$; (2) $\frac{2e^2}{e^2+1}\,dx$.

3. (1) (а) $4{,}0208$, (б) $5{,}00177$; (2) (а) $0{,}485$, (б) $-0{,}017$.

К п. 6.3. **1.** (1) $y'' = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2)$, $y''' = 8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2)$; (2) $y'' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$, $y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$.
3. $a = \frac{1}{2} f''(x_0)$, $b = f'(x_0)$, $c = f(x_0)$.

5. (1) $\frac{(-1)^{n-1} n! c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$; (2) $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$; (3) $-2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$; (4) $\frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$; (5) $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right)$; (6) $a^n x\cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + na^{n-1}\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$; (7) $e^x 2^{n/2}\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

6. $n(n-1)a^{n-2}$.

К п. 6.4. (1) $y'_x = -3t^2 e^t$, $y''_x = 3t(2+t)e^{2t}$; (2) $y'_x = -1$, $y''_x = 0$ $(0 < x < 1)$; (3) $y'_x = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, $y''_x = \frac{e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)}{2\cos^3 t(\cos t - \sin t)^3}$ $\left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$; (4) $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $y''_x = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$ $(t \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$.