

8. Первообразная и неопределенный интеграл

ТЕОРИЯ

Пусть на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ задана функция $f(x)$. Функцию $F(x)$ называют *первообразной функции $f(x)$ на промежутке I* , если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in I$, и *первообразной в обобщенном смысле функции $f(x)$ на промежутке I* , если F непрерывна на I и существует такое конечное подмножество $E \subset I$, что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in I \setminus E$.

Разность любых двух первообразных данной функции постоянна. Совокупность всех первообразных функции f называют *неопределенным интегралом функции f* и обозначают символом $\int f(x) dx$ (фрагмент dx в этом обозначении, как правило, указывает на переменную интегрирования). Если f имеет первообразную на I , то говорят, что f *интегрируема на I* .

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то используют обозначение

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Допуская вольность в обозначениях, указание постоянной опускают, и мы обычно будем так поступать при записи результата нахождения неопределенного интеграла.

Чаще всего мы будем решать задачу нахождения (точной) первообразной, но в тех ситуациях, когда точной первообразной нет, будем изучать вопрос наличия и нахождения первообразной в обобщенном смысле. Все приводимые ниже утверждения с возможными очевидными уточнениями в формулировках справедливы и для первообразных в обобщенном смысле.

Теорема 1 (линейность интеграла). Если функции f, g интегрируемы на I , то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на I и

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx. \quad (8.1)$$

Теорема 2 (интегрирование по частям). Если f, g дифференцируемы на I и произведение $g(x)f'(x)$ интегрируемо на I , то произведение

$f(x)g'(x)$ также интегрируемо на I и имеет место формула интегрирования по частям

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \quad (8.2)$$

Используя запись $df(x) = f'(x)dx$, формулу интегрирования по частям можно записать в одном из видов

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x). \quad (8.3a)$$

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \quad (8.3b)$$

Теорема 3 (о замене переменной). Пусть $f(u)$ — функция, имеющая на промежутке I первообразную $F(u)$, и пусть φ — дифференцируемая на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функция, отображающая этот промежуток на промежуток I . Тогда функция $F(\varphi(x))$ будет первообразной функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ на промежутке Δ . Иначе говоря, если

$$\int f(u) du = F(u), \quad u \in I,$$

то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)), \quad x \in \Delta.$$

Теорема 4 (о подстановке). Пусть $f(x)$ — функция, заданная на промежутке I , и пусть $\varphi(t)$ — заданная на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ строго монотонная дифференцируемая функция, отображающая Δ на I и имеющая дифференцируемую обратную. Тогда если функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную $\Phi(t)$ на промежутке Δ , то f имеет первообразную на I , равную $\Phi(\varphi^{-1}(x))$. Иначе говоря, если

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t), \quad t \in \Delta,$$

то

$$\int f(x) dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in I.$$

Таблица простейших неопределенных интегралов.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1, \quad x > 0; \quad (8.4)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|, \quad x \neq 0; \quad (8.5)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \int e^x dx = e^x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (8.6)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (8.7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (8.8)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, \\ -\operatorname{arcctg} x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}; \quad (8.9)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} x, \\ -\operatorname{arccos} x, \end{cases} \quad x \in [-1, 1]; \quad (8.10)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, \quad |x| \neq 1; \quad (8.11)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad (8.12)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad |x| > 1;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x, \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x; \quad (8.13)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x. \quad (8.14)$$

ТЕХНОЛОГИИ

Общие рекомендации. Если подынтегральная функция — это одна из функций, первообразная от которых находится непосредственно (в таком случае говорят о «табличном интеграле»), надо воспользоваться соответствующей формулой из таблицы первообразных.

Если подынтегральная функция не совпадает ни с одной из функций, указанных в таблице первообразных, то надо поставить вопрос «как устроена функция?». Для нахождения первообразной, в отличие от нахождения производной, нет прямых правил нахождения для сколь-либо

сложно устроенных функций. Есть только теорема о первообразной линейной комбинации, и если подынтегральная функция представляет собой линейную комбинацию функций, нахождение первообразной может быть сведено к нахождению первообразных составляющих функцию слагаемых.

Затем надо поставить вопрос: есть ли в подынтегральной функции фрагменты, присутствие которых всегда предполагает выполнение определенных действий. Назовем такие фрагменты *символосочетаниями* или *фигурами символов* и перечислим наиболее часто встречающиеся, сопровождая символосочетания описанием действий, которые надо выполнить при их обнаружении. Обычно такие действия направлены на выполнение замены или на подстановку и использование соответствующего утверждения.

1. Если в подынтегральной функции есть выражение вида $kx + l$, можно либо выполнить замену, а именно положить $kx + l = t$, подготовить замену, т. е. выразить x через t и dx через dt , и перейти к нахождению первообразной от новой функции, зависящей от t , либо предварительно подготовив фрагмент dx к выполнению такой замены, а именно сначала воспользоваться тем, что $dx = \frac{1}{k}d(kx + l)$, и только потом сделать замену.

2. Допустим, что в подынтегральном выражении есть фрагмент $x dx$. Тогда надо воспользоваться равенством $x dx = \frac{1}{2}dx^2$ и если оставшаяся часть подынтегральной функции зависит от x^2 целесообразно выполнить замену $x^2 = t$.

3. Если встретился фрагмент $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$, можно воспользоваться равенством $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d\sqrt{x}$ и проанализировать целесообразность замены $\sqrt{x} = t$. В этом случае даже если подынтегральная функция зависит не только от выражения $\sqrt{x}$, замена может оказаться полезной. В таком случае ее надо подготовить в том смысле, что старую переменную выразить через новую и выразить dx через dt : $x = t^2$, $dx = 2t dt$, перейти к интегралу от новой переменной, и в случае нахождения первообразной вернуться к старой переменной.

4. Фрагменты $\sin x dx$, $\cos x dx$ предполагают использование равенств $\sin x dx = -d \cos x$, $\cos x dx = d \sin x$ и анализ целесообразности соответствующей замены.

5. Символосочетание $\sqrt{1-x^2}$ или $\sqrt{a^2-x^2}$ часто связано с подстановкой $x = \sin t$ или $x = a \sin t$, где t принадлежит какому-либо из промежутков взаимной однозначности синуса, например $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. В результате ее выполнения получается выражение $|\cos t|$, т. е. исчезает иррациональность.

6. Фрагмент $\sqrt{1+x^2}$ или $\sqrt{a^2+x^2}$ часто связан с подстановкой $x = \operatorname{sh} t$ или $x = a \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$, и использованием формул для гиперболических функций.

7. Если в подынтегральной функции есть корень, под которым находится многочлен первой степени, т. е. присутствует выражение вида $\sqrt[n]{kx+l}$, то целесообразно весь корень взять в качестве новой переменной, подготовить замену, а именно выразить x через t и dx через dt и перейти к нахождению первообразной от новой функции, зависящей от t .

8. Выражение $\frac{dx}{x^2}$ может использоваться после замечания о том, что $\frac{dx}{x^2} = -d\frac{1}{x}$ и анализа целесообразности соответствующей замены.

Опишем общие рекомендации по замене и подстановке.

Заменой переменных можно воспользоваться в следующей ситуации.

Допустим, что исходный интеграл $\int g(x) dx$ удалось представить в виде

$$\int g(x) dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x),$$

и если первообразная $F(u)$ функции $f(u)$ известна или может быть найдена, т. е. если $\int f(u) du = F(u)$, то можно найти и первообразную функции $g(x)$:

$$\int g(x) dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)).$$

Другими словами, если исходная подынтегральная функция устроена таким образом, что она, по существу, формируется с использованием некоторого единого выражения, зависящего от x , то, взяв всё это выражение в качестве новой переменной (заменив это выражение единым символом, новой переменной), мы сводим нахождение первообразной исходной функции к нахождению первообразной другой, как правило более простой функции.

Метод подстановки для нахождения интеграла $\int f(x) dx$ применяют обычно так. Из каких-то соображений берут удовлетворяющую условиям теоремы о подстановке функцию $\varphi(t)$ и на место x в исходном интеграле подставляют $x = \varphi(t)$, при этом расписывая $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t) dt$. В результате переходят к нахождению первообразной новой функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т. е. к нахождению интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$. Если его удастся найти и при этом

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t),$$

то интеграл от $f(x)$ получают подстановкой в Φ на место t выражения $\varphi^{-1}(x)$, т. е.

$$\int f(x) dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)).$$

Интегрирование по частям применяется в следующей ситуации. Если подынтегральная функция представима (или представлена) в виде произведения двух дифференцируемых функций и мы находим, что дифференцирование одной из них приводит к более простой функции, то можно попробовать воспользоваться интегрированием по частям. В таком случае второй сомножитель надо представить в виде производной от соответствующей функции (т. е. найти первообразную второго сомножителя) и применить формулу интегрирования по частям. В результате после дифференцирования первой функции может получиться подынтегральная функция более простого вида. При этом чаще всего удобно пользоваться формулой вида (8.3b).

Процесс интегрирования по частям организуется так. Допустим, что в интеграле вида $\int f(x)\varphi(x) dx$ мы нашли, что функция $f(x)$ в результате ее дифференцирования становится проще (например, это x^n или $\operatorname{arctg} x$, или $\operatorname{arcsin} x$ и т. п.). Тогда ищем первообразную функции $\varphi(x)$, т. е. представляем $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = g'(x)$. Далее «занося $g(x)$ под d », т. е. делаем запись вида $g'(x) dx = dg(x)$. Затем выполняем операцию интегрирования по частям:

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x).$$

Наконец, в последнем интеграле делаем подготовку для дальнейшего его нахождения:

$$\int g(x) df(x) = \int g(x) f'(x) dx,$$

и переходим к нахождению последнего интеграла. Эту последовательность действий можно записать так:

$$\begin{aligned} \int f(x) \varphi(x) dx &= \int f(x) g'(x) dx = \int f(x) dg(x) \\ &= f(x)g(x) - \int g(x) df(x) = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Рекомендации для частных случаев.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, т. е. функций вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где P, Q — полиномы, основано на возможности представления рациональной функции в виде суммы таких рациональных функций, интегрирование которых провести сравнительно просто.

Для краткости и простоты ограничимся рассмотрением функции вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^m(x^2+px+q)^k},$$

где полином x^2+px+q не имеет вещественных корней и степень $P(x)$ меньше, чем степень $m+2k$ знаменателя. Утверждается, что существуют числа $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_k$, при которых верно равенство

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(x-a)^m(x^2+px+q)^k} &= \frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{a_m}{(x-a)^m} \\ &+ \frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{b_kx+c_k}{(x^2+px+q)^k}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Рассматривая числа a_i, b_j, c_j как неопределенные коэффициенты, приведем к общему знаменателю сумму дробей в правой части (8.15), в результате в числителе получится некоторый полином степени не выше чем $m+2k-1$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x у полученного полинома и у полинома $P(x)$, придем к системе уравнений, решая которую, найдем требуемые коэффициенты.

Обратим внимание на то, что каждый множитель в знаменателе исходного дробного выражения порождает свою группу слагаемых.

На практике иногда вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной бывает проще подставить на место x какие-то конкретные значения переменной и получить требуемую систему уравнений. Обычно подставляют такие значения, которые обращают в нуль как можно больше сомножителей в числителе после приведения к общему знаменателю.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. Для таких функций стараются сделать подстановку или замену переменной так, чтобы в результате прийти к интегралу от рациональной функции. Отметим несколько наблюдений по поиску таких замен.

1. Если подынтегральная функция рационально зависит от x и от выражения $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то можно сделать замену $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (конечно, если коэффициенты a, b, c, d таковы, что x однозначно выражается через t с выполнением условий теоремы 4), т. е. подстановку $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$. В результате получаем интеграл от рациональной функции, после нахождения которого возвращаемся к старой переменной x .

2. При интегрировании функций, рационально зависящих от x и от выражения $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, могут быть полезны *подстановки Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t, \quad \text{если } a > 0, \quad (8.16)$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}, \quad \text{если } c > 0, \quad (8.17)$$

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1), \quad (8.19)$$

приводящие к интегрированию рациональной функции от t .

3. При интегрировании функций вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где P, Q — полиномы, бывает полезно разложить дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей.

4. При интегрировании функции вида $x^m(a+bx^n)^p$, где m, n, p рациональны, следует сделать такие подстановки:

1) если p целое, то полагают $x = t^N$, где N — общий знаменатель дробей m, n ;

2) если $\frac{m+1}{n}$ целое, то полагают $a + bx^n = t^N$, где N — знаменатель дроби p ;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ целое, то полагают $ax^{-n} + b = t^N$, где N — знаменатель дроби p .

В других случаях интеграл от функции $x^m(a + bx^n)^p$ в элементарных функциях не выражается.

ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция переменных u, v , приводятся к интегрированию рациональной функции заменой $\operatorname{tg}(x/2) = t$, т. е. подстановкой $x = 2 \operatorname{arctg} t$ на подходящем промежутке изменения t . При этом полезно помнить формулы (8.24) (см. ниже).

Если функция R обладает дополнительно некоторыми свойствами, то можно применить другие подстановки, которые, как правило, приводят к уменьшению объема вычислений. А именно, если

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x), \quad (8.20)$$

то можно положить $\cos x = t$, а если

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x), \quad (8.21)$$

то можно взять $\sin x = t$. В случае, если

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x), \quad (8.22)$$

полагают $\operatorname{tg} x = t$.

При интегрировании выражений, зависящих от тригонометрических функций, часто полезны различные тригонометрические преобразования.

При нахождении первообразных от функций, в которых кроме переменной есть буквенные постоянные (параметры), по умолчанию они считаются положительными.

Примеры.

ПРИМЕР 1. Найдём интеграл $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

Как устроена функция? Ее можно представить в виде суммы двух функций и воспользоваться теоремой о первообразной от линейной комбинации табличных интегралов:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int \sqrt{x} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2}.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. При интегрировании выражений, связанных с тригонометрическими функциями, прежде всего надо попробовать провести простейшие преобразования, используя формулы, с тем, чтобы, возможно, прийти к табличным интегралам:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x.$$

ПРИМЕР 3. Если искомый интеграл отличается от табличного только постоянными множителями в каких-то частях подынтегрального выражения, то можно воспользоваться простой заменой. Обратим внимание на то, что среди табличных есть интеграл $\int \frac{dx}{1+x^2}$, в котором единица в знаменателе неизменяема, ее трогать нельзя, а с переменной можно поработать. Добиться единицы в знаменателе нетрудно:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{b}{a}x\right)^2},$$

и здесь можно пойти двумя путями. Можно преобразовать переменную под символом « d »:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{b}{a}x\right)^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{d\left(\frac{b}{a}x\right)}{1 + \left(\frac{b}{a}x\right)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}x,$$

а можно сделать замену: $\frac{b}{a}x = t$, подготовить ее: $x = \frac{a}{b}t$, $dx = \frac{a}{b}dt$, перейти к нахождению первообразной

$$\frac{a}{b} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{a}{b} \operatorname{arctg} t$$

и вернуться к исходной переменной:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} x.$$

ПРИМЕР 4. Найдем при $x > 0$ интеграл $I := \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$.

Видна фигура символов вида $\sqrt{1 + x^2}$, и можно попробовать подстановку $x = \operatorname{sh} t$. Этот ход приводит к результату, однако мы обеспечим другую фигуру символов, вынеся x^2 из-под корня и воспользовавшись присущим этому символосочетанию ходом:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + 1/x^2}} = - \int \frac{d(1/x)}{\sqrt{1 + 1/x^2}} \\ &\quad (\text{замена } u = 1/x) \\ &= - \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = - \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5. При нахождении первообразных от функций, включающих тригонометрические функции, часто используются тригонометрические формулы. Найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos^2 x} = - \int \frac{d \cos x}{1 - \cos^2 x} \\ &\quad (\text{замена } u = \cos x) \\ &= - \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - u}{1 + u} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6. При интегрировании дробно-рациональной функции обычно раскладывают ее в сумму простейших дробей, и иногда это легко сделать без обращения к специальным методам:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2} \right) dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

ПРИМЕР 7. Найдем интеграл

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx.$$

Здесь просматривается фрагмент $\sqrt{a^2 + x^2}$, при наличии которого рекомендуется выполнить подстановку $x = a \operatorname{sh} t$. Найдя $dx = a \operatorname{ch} t dt$, обратимся к нахождению интеграла

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} \cdot a \cdot \operatorname{ch} t dt &= a^2 \int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt \\ &= a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \operatorname{ch} 2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\operatorname{arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$ и тем самым

$$t = \operatorname{arsh} \left(\frac{x}{a} \right) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a},$$

вернемся к переменной x :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \operatorname{ch} \left(\operatorname{arsh} \frac{x}{a} \right) \operatorname{sh} \left(\operatorname{arsh} \frac{x}{a} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{a^2} \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8. Найдем интеграл $\int x e^{-x} dx$. Заметим, что под интегралом стоит произведение двух функций, одна из которых, а именно $f(x) = x$, после дифференцирования становится проще. Это подсказывает нам, что следует попробовать воспользоваться интегрированием по частям. Представим второй сомножитель как производную соответствующей функции: $e^{-x} = (-e^{-x})'$. Проведем предварительную подготовку для использования одной из формул (8.2), (8.3), т. е. запишем интеграл так:

$$\int x e^{-x} dx = - \int x de^{-x}.$$

Теперь завершим нахождение путем применения формулы (8.3):

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= - \int x de^{-x} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(1 + x). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 9. В этом примере совместим использование замены и затем интегрирования по частям. Найдем интеграл $\int e^{\sqrt{x}} dx$. Поскольку

в подынтегральной функции есть корень, под которым находится многочлен первой степени, а именно выражение $\sqrt{x}$, можно весь корень в показателе степени взять в качестве новой переменной. Сделаем замену $\sqrt{x} = t$ и подготовим переход к новой переменной: $x = t^2$, $dx = 2t dt$, $t \geq 0$. Применяя интегрирование по частям, имеем

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2 \int t de^t \\ &= 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2 e^t (t - 1) = 2 e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1).\end{aligned}$$

ПРИМЕР 10. Найдем интеграл $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx$ от рациональной функции. Запишем представление подынтегральной функции в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} &= \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{(x + 1)^2} + \frac{c}{x - 1} \\ &= \frac{a(x + 1)(x - 1) + b(x - 1) + c(x + 1)^2}{(x + 1)^2(x - 1)},\end{aligned}$$

откуда, приравнявая числители, получаем равенство

$$x^2 + 1 = a(x + 1)(x - 1) + b(x - 1) + c(x + 1)^2, \quad (8.23)$$

на основе которого составим систему для нахождения a, b, c . Можно было бы раскрыть скобки в правой части (8.23) и затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях. Однако в нашем случае проще поступить следующим образом. Подставим в (8.23) на место x значения $x = 1$, $x = -1$, при которых обращаются в нуль выражения $x - 1$ и $x + 1$, а также какое-либо значение, при котором правую часть нетрудно вычислить, например $x = 0$. Тогда получим соответственно равенства

$$2 = 4c, \quad 2 = -2b, \quad 1 = -a - b + c,$$

откуда $a = 1/2$, $b = -1$, $c = 1/2$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{1}{x + 1}.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 11. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ от рациональной функции. Для этого представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1) + (bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)},$$

откуда $1 = a(x^2+1) + (bx+c)(x+1)$. Полагая здесь $x = -1$, сразу найдем, что $1 = 2a$, т. е. $a = 1/2$. Раскроем теперь скобки и приведем подобные члены:

$$1 = ax^2 + a + bx^2 + cx + bx + c = (a+b)x^2 + (b+c)x + a + c.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов в левой и правой частях последнего равенства, имеем

$$a+b=0, \quad b+c=0, \quad a+c=1,$$

и учитывая, что $a = 1/2$, получаем $b = -1/2$, $c = 1/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{1-x}{x^2+1} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x \right) = \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 12. Найдем интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int \frac{dx}{(x-a)(x-b) \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}},$$

рассматривая для простоты случай $a < b$ и $x > b$ (остальные получаются аналогично). Положим

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}, \quad a \neq b, \quad x = \frac{a-bt^n}{1-t^n}, \quad dx = \frac{(a-b)nt^{n-1}}{(1-t^n)^2} dt, \\ x-b &= \frac{a-b}{1-t^n}, \quad x-a = t^n(x-b) = \frac{(a-b)t^n}{1-t^n}. \end{aligned}$$

Тогда

$$I = \int \frac{(a-b)nt^{n-1} dt}{(1-t^n)^2 \frac{(a-b)t^n}{1-t^n} \frac{a-b}{1-t^n} t} = \frac{n}{a-b} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{n}{(b-a)t} = \frac{n}{b-a} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}.$$

ПРИМЕР 13. Сведем интеграл

$$I = \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.$$

от функции, содержащей иррациональность, к интегралу от рациональной функции. Воспользуемся подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = x + t$. Тогда $x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2tx + t^2$, или

$$x(3-2t) = t^2 - 2, \quad x = \frac{t^2 - 2}{3 - 2t}, \quad dx = -2 \frac{t^2 + 3t - 2}{(3 - 2t)^2} dt.$$

Подставив, получим

$$I = 2 \int \frac{t(t^2 + 3t - 2)}{(3t - 4)(3 - 2t)} dt.$$

ПРИМЕР 14. Найдём интеграл $I = \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$ от функции, рационально зависящей от тригонометрических. Она нечетная относительно синуса, поэтому целесообразно положить $\cos x = t$. Тогда для x , например, из промежутка $[0, \pi]$ будет $x = \arccos t$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Имеем

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{dt}{(2+t)\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}} \\ &= - \int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{(2+t)(t-1)(t+1)} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}. \end{aligned}$$

ПРАКТИКА.

1. Найти интегралы, используя общие методы:

$$(1) \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}, \quad (2) \int \sqrt{1-\sin 2x} dx, \quad (3) \int \operatorname{th}^2 x dx,$$

$$\begin{aligned}
(4) \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx, & \quad (5) \int \frac{dx}{2-3x^2}, & (6) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}, \\
(7) \int \frac{dx}{1+\cos x}, & (8) \int \frac{dx}{1-\cos x}, & (9) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\
(10) \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, & (11) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, & (12) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}, \\
(13) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, & (14) \int x\sqrt{1+x} \, dx, & (15) \int \operatorname{tg} x \, dx, \\
(16) \int \operatorname{ctg} x \, dx, & (17) \int \frac{dx}{\cos x}, & (18) \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}, \\
(19) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx, & (20) \int \frac{x^2}{1+x} \, dx, & (21) \int \frac{x \, dx}{(1-x^2)^2}, \\
(22) \int \frac{x \, dx}{(x+2)(x+3)}, & (23) \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}, \, a \neq b, \\
(24) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \, a^2 \neq b^2, & (25) \int \sin^2 x \, dx, \\
(26) \int \cos^2 x \, dx, & (27) \int \sin^3 x \, dx, & (28) \int \cos^3 x \, dx, \\
(29) \int \cos^4 x \, dx, & (30) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}, & (31) \int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \, dx, \\
(32) \int \frac{dx}{1+e^x}, & (33) \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2-2}}, & (34) \int \sqrt{1-x^2} \, dx, \\
(35) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \, dx, & (36) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \\
(37) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \, dx, & (38) \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \, dx, \\
(39) \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}, & (40) \int \sqrt{(x+a)(x+b)} \, dx, \\
(41) \int x^2 e^{-2x} \, dx, & (42) \int x \cos x \, dx, & (43) \int x \operatorname{sh} x \, dx, \\
(44) \int \arcsin x \, dx, & (45) \int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx, & (46) \int x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx, \\
(47) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx, & (48) \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}, & (49) \int x^2 \sqrt{a^2+x^2} \, dx,
\end{aligned}$$

$$(50) \int \sin \ln x \, dx, \quad (51) \int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad (52) \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

2. Найти интегралы от рациональных функций:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{x \, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad (2) \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} \, dx, \\ (3) \int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)} \, dx, \quad (4) \int \frac{x \, dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}, \\ (5) \int \frac{dx}{x^3+1}, \quad (6) \int \frac{x \, dx}{x^3-1}, \quad (7) \int \frac{dx}{x^4-1}, \quad (8) \int \frac{dx}{x^4+1}, \\ (9) \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}, \quad (10) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}, \\ (11) \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}, \quad (12) \int \frac{(x^4+1) \, dx}{(x-1)(x^4-1)}. \end{aligned}$$

3. Найти интегралы от функций, содержащих иррациональность:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}, \quad (2) \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \, dx, \\ (3) \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \, dx, \quad (4) \int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}} \frac{dx}{x^3}, \quad (5) \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \\ (6) \int \frac{x \, dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}, \quad (7) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}, \\ (8) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}, \quad (9) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}, \\ (10) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}, \quad (11) \int \frac{\sqrt[3]{x} \, dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}, \quad (12) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}. \end{aligned}$$

4. Найти интегралы от функций, рационально зависящих от тригонометрических:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x} \quad \text{при } 0 < \varepsilon < 1 \text{ и при } \varepsilon > 1, \\ (2) \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \, dx, \quad (3) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx, \quad (4) \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}, \\ (5) \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} \, dx, \quad (6) \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}, \end{aligned}$$

$$(7) \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}, \quad (8) \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

5. Вывести формулы понижения для интегралов

$$(a) \quad I_n = \int \sin^n x dx; \quad (б) \quad K_n = \int \cos^n x dx \quad (n > 2)$$

и с их помощью вычислить $\int \sin^6 x dx$ и $\int \cos^8 x dx$.

6. Вывести формулы понижения для интегралов

$$(a) \quad I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad (б) \quad K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2)$$

и с их помощью вычислить $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ и $\int \frac{dx}{\cos^7 x}$.

7. Найти интегралы

$$\begin{aligned} (1) \int x^2 e^{\sqrt{x}} dx, \quad (2) \int x e^x \sin x dx, \quad (3) \int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx, \\ (4) \int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) dx, \quad (5) \int \frac{e^{2x} dx}{1 + e^x}, \quad (6) \int \frac{x e^x dx}{(1 + e^x)^2}, \\ (7) \int x \operatorname{arctg}(x + 1) dx, \quad (8) \int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2} dx, \quad (9) \int \operatorname{sh} ax \sin bx dx, \\ (10) \int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x dx, \quad (11) \int \cos^5 x dx, \quad (12) \int \cos^3 x \sin^5 x dx, \\ (13) \int \operatorname{ctg}^6 x dx, \quad (14) \int \operatorname{tg}^5 x dx, \quad (15) \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx, \\ (16) \int \cos^2 ax \cos^2 bx dx, \quad (17) \int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{3 + 2x - x^2}}, \\ (18) \int x^4 \sqrt{4 - x^2} dx, \quad (19) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad (20) \int \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} dx, \\ (21) \int \frac{dx}{(2 + \sin x)^2}, \quad (22) \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}, \quad (23) \int |x| dx, \\ (24) \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}} dx, \quad (25) \int (x + |x|)^2 dx, \quad (26) \int e^{-|x|} dx, \\ (27) \int \max(1, x^2) dx. \end{aligned}$$

Добавление. Приведем небольшой список формул, которые могут пригодиться при нахождении первообразных:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad (8.24)$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (8.27)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (8.28)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \quad (8.29)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), \quad (8.30)$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad (8.31)$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad (8.32)$$

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (8.33)$$

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \quad -\infty < y \leq 0, \quad (8.34)$$

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \quad 0 \leq y < +\infty. \quad (8.35)$$

Ответы. 1. (1) $x - \operatorname{arctg} x$; (2) $(\cos x + \sin x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)$; (3) $x - \operatorname{th} x$; (4) $-x - \operatorname{ctg} x$; (5) $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x}\sqrt{3}}{\sqrt{2-x}\sqrt{3}} \right|$; (6) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 - 2}|/2$;

(7) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; (8) $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; (9) $-\sqrt{1-x^2}$; (10) $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; (11) $-\arcsin \frac{1}{|x|}$; (12) $2 \operatorname{sgn} x \cdot \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|})$; (13) $2 \arcsin \sqrt{x}$; (14) $\frac{2}{5} \sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3}$; (15) $-\ln |\cos x|$; (16) $\ln |\sin x|$; (17) $\ln |\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$; (18) $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{th} \frac{x}{2}|$; (19) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$; (20) $\frac{1}{2}(1-x)^2 + \ln |1+x|$; (21) $\frac{1}{2(1-x^2)}$; (22) $\ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$; (23) $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3} \ln |\frac{x+a}{x+b}|$; (24) $\frac{1}{a^2-b^2} (\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a})$; (25) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$; (26) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$; (27) $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$; (28) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$; (29) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$; (30) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; (31) $2(\frac{1}{11} \sin^4 x - \frac{2}{7} \sin^2 x + \frac{1}{3}) \sqrt{\sin^3 x}$; (32) $x - \ln(1+e^x)$; (33) $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln |x + \sqrt{x^2-2}|$; (34) $\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$; (35) $-\sqrt{a^2-x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}$; (36) $2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$; (37) $\frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$; (38) $\sqrt{x^2-a^2} - 2a \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a})$, если $x > a$; $-\sqrt{x^2-a^2} + 2a \ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a})$, если $x < -a$; (39) $2 \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})$, если $x+a > 0$ и $x+b > 0$; $-2 \ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b})$, если $x+a < 0$ и $x+b < 0$; (40) $\frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})$, если $x+a > 0$ и $x+b > 0$; (41) $-\frac{e^{-2x}}{2} (x^2 + x + \frac{1}{2})$; (42) $x \sin x + \cos x$; (43) $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$; (44) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; (45) $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln |\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}|$; (46) $x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$; (47) $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; (48) $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ ($a \neq 0$); (49) $\frac{x(2x^2+a^2)}{8} \sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$; (50) $\frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$; (51) $\frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} e^{ax}$; (52) $\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax}$.

2. (1) $\frac{1}{2} \ln |\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}|$; (2) $x + \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{9}{2} \ln |x-2| + \frac{28}{3} \ln |x-3|$; (3) $\frac{1}{12} \ln \frac{(x+1)^4 |x-2|^5}{(x-1)^4 |x+2|^5}$; (4) $-\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{8}{25} \operatorname{arctg}(x+1)$; (5) $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; (6) $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; (7) $\frac{1}{4} \ln |\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; (8) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$; (9) $\frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2} - \frac{3}{625} \ln |\frac{x-2}{x+3}|$; (10) $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln |\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}|$; (11) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)}$; (12) $\frac{1}{4} \ln |x^4 - 1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(x-1)}$.

3. (1) $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$; (2) $\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}|$; (3) $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}|$; (4) $\frac{5}{4} z^{4/5} - \frac{5}{9} z^{9/5}$, где $z = \frac{x+1}{x}$; (5) $\frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{|2z+1|^3}$, где $z = x + \sqrt{x^2+x+1}$; (6) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \ln |\frac{3x+1+2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}|$; (7) $\ln |\frac{z-1}{z}| - 2 \operatorname{arctg} z$, где $z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; (8) $\ln \frac{x+1}{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}$; (9) $\frac{1}{6} \ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} -$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, где $z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$; (10) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z$, где $z = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$;
(11) $\frac{6}{7}(1+x^{1/3})^{7/2} - \frac{18}{5}(1+x^{1/3})^{5/2} + 6x^{1/3}(1+x^{1/3})^{1/2}$; (12) $\frac{3}{5}z^5 - 2z^3 + 3z$,
где $z = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

4. (1) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$, если $0 < \varepsilon < 1$; $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \frac{\varepsilon + \cos x + \sqrt{\varepsilon^2-1} \sin x}{1 + \varepsilon \cos x}$,
если $\varepsilon > 1$; (2) $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x)$; (3) $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|$;
(4) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right)$; (5) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin^2 x)$; (6) $-\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right)$;
(7) $\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x \right)$; (8) $\operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 x$.

5. (a) $I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$; (б) $K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2}$;
 $I_6 = -\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \sin^3 x - \frac{5}{16} \cos x \sin x + \frac{5}{16} x$; $K_8 = \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x +$
 $\frac{7}{48} \sin x \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cos^3 x + \frac{35}{128} \sin x \cos x + \frac{35}{128} x$.

6. (a) $I_n = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$; (б) $\frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}$;
 $I_5 = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$; $K_7 = \frac{\sin x}{6 \cos^6 x} + \frac{5}{24} \frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{5}{16} \frac{\sin x}{\cos^2 x} +$
 $\frac{5}{16} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.

7. (1) $2e^t(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120)$, где $t = \sqrt{x}$; (2) $\frac{e^x}{2}(x(\sin x - \cos x) + \cos x)$; (3) $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin(e^{-x})$; (4) $x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) -$
 $2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x$; (5) $e^x - \ln(1+e^x)$; (6) $\frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$; (7) $-\frac{x}{2} +$
 $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x+1)$; (8) $\ln \frac{x^2}{1+4x^2} - \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$; (9) $\frac{a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx}{a^2 + b^2}$;
(10) $\frac{\operatorname{ch}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{ch}^5 x}{5}$; (11) $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$; (12) $\frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x$;
(13) $-x - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x$; (14) $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x|$; (15) $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} +$
 $\frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24}$; (16) $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}$; (17) $\frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{3+2x-x^2}}{|x-1|}$;
(18) $\left(\frac{x^5}{6} - \frac{x^3}{6} - x \right) \sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right)$; (19) $\frac{1}{15} (8 - 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1+x^2}$;
(20) $-\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin x$ ($|x| < 1$); (21) $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x/2 + 1}{\sqrt{3}}$;
(22) $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}$; (23) $\frac{x|x|}{2}$;
(24) $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; (25) $\frac{2x^2}{3}(x + |x|)$; (26) $e^x - 1$, ес-
ли $x < 0$, $1 - e^{-x}$, если $x \geq 0$; (27) x , если $|x| \leq 1$, $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x$, если
 $|x| > 1$.