

§ 9. Определенный интеграл

9.1. Вычисление определенных интегралов.

ТЕОРИЯ

Определенный интеграл от заданной на отрезке функции можно задать несколькими способами. Важно, что набор средств, доступных для вычисления интегралов, не зависит от способа задания. Приведем для определенности один из традиционных способов описания понятия определенного интеграла.

Пусть f — ограниченная функция, заданная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Разбиением отрезка $[a, b]$ называют такой набор точек $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \in [a, b]$, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Число $|\tau| = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$ называют *модулем разбиения* τ . В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, разбиения τ возьмем по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Сумму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ называют *интегральной суммой* (Римана), соответствующей разбиению τ промежутка $[a, b]$. Число I такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения τ , у которого $|\tau| < \delta$, и для любого выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon, \quad (9.1)$$

называют *определенным интегралом от функции f по промежутку $[a, b]$*

и обозначают символом $I = \int_a^b f(x) dx$. Левый конец a промежутка интегрирования называют *нижним пределом интегрирования*, правый конец b промежутка интегрирования называют *верхним пределом интегрирования* и говорят, что *берется (рассматривается) интеграл от функции f в пределах от a до b* . Функцию, у которой существует интеграл, называют *интегрируемой на $[a, b]$* . Отметим, что непрерывные функции и монотонные функции на $[a, b]$ интегрируемы на этом промежутке.

Допуская небольшую вольность речи, можно сказать, что определенный интеграл от функции f по промежутку $[a, b]$ — это предел, к которому

стремятся интегральные суммы при стремлении к нулю модуля разбиения.

Определение интеграла распространяют на тот случай, когда $a > b$, полагая

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad b < a. \quad (9.2)$$

Тем самым фактически интеграл может рассматриваться не по промежутку как подмножеству в $\mathbb{R}$, а по ориентированному промежутку, т. е. от «ориентированного множества».

Теорема (линейность интеграла). Если f, g интегрируемы от a до b , то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема от a до b и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Теорема (формула интегрирования по частям). Пусть функции f, g дифференцируемы на отрезке с концами a, b . Тогда если функция $f'(x)g(x)$ интегрируема от a до b , то этим свойством обладает и функция $f(x)g'(x)$ и имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx, \quad (9.3)$$

или, в иной форме записи,

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x). \quad (9.4)$$

Теорема (о подстановке и замене переменной). Пусть f — интегрируемая от a до b функция и φ — дифференцируемая функция, отображающая отрезок с концами α, β на отрезок с концами a, b , причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема от a до b и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (9.5)$$

Если при этом φ имеет дифференцируемую обратную, то из интегрируемости $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ от α до β следуют интегрируемость $f(x)$ от a до b и справедливость (9.5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда, пользуясь подстановкой или заменой переменной при нахождении интеграла от a до b , мы будем использовать такие функции $\varphi(t)$, которые отображают бесконечный промежуток, например $[\alpha, +\infty)$, на заданный ограниченный, но не замкнутый промежуток $[a, b)$. В таком случае полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx$$

и при замене следует воспользоваться формулой

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (9.5a)$$

Более подробно с интегралами по промежуткам, у которых по крайней мере один из концов не входит в промежуток (в частности, по неограниченным промежуткам), мы познакомимся позже.

Теорема (аддитивность интеграла как функции промежутка). Пусть точка c лежит между точками a и b . Тогда f интегрируема от a до b в том и только в том случае, если она интегрируема от a до c и от c до b , при этом

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (9.6)$$

Принимая во внимание равенство (9.2), распространяющее определение на случай, когда нижний предел интегрирования больше верхнего, можно заметить, что равенство (9.6) верно для любых трех точек a, b, c .

Теорема (формула Ньютона — Лейбница). Пусть функция f непрерывна на отрезке с концами a, b , и пусть F — ее первообразная на этом промежутке (которая заведомо существует для непрерывной функции). Тогда имеет место формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (9.7)$$

которая с использованием для приращения $F(b) - F(a)$ обозначения $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ может быть записана в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b. \quad (9.8)$$

ТЕХНОЛОГИИ

Нахождение определенного интеграла осуществляется обычно с использованием теоремы Ньютона — Лейбница. А именно, находят первообразную от заданной функции на заданном промежутке и берут ее приращение, т. е. разность значений первообразной на верхнем и нижнем концах промежутка интегрирования. Поскольку нахождение первообразной нередко связано с выполнением замены переменной, необходимо тщательно следить за соблюдением всех условий соответствующей теоремы и в первую очередь за монотонностью функции, с помощью которой выполняется замена, и за согласованием концов промежутков.

Пример. В интеграле $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$ выполним замену $\sin x = t$.

При выполнении указанной замены мы должны совершить такие действия, чтобы сохранилось равенство $\sin x = t$ на отрезке $[0, 2\pi]$ изменения переменной x . Выразить однозначно x через t , когда $x \in [0, 2\pi]$, невозможно, поэтому разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на такие части, где синус будет обратимым (строго монотонным), воспользуемся аддитивностью интеграла и выполним замену в интегралах по каждому из участков монотонности синуса. Ясно, что в качестве точек, разбивающих $[0, 2\pi]$ на участки монотонности синуса, можно выбрать $\pi/2$ и $3\pi/2$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{\pi/2} f(x) \cos x dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \cos x dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x) \cos x dx.$$

Рассмотрим каждый интеграл по отдельности. На $[0, \pi/2]$ равенство $\sin x = t$ равносильно такому: $x = \arcsin t$, $0 \leq t \leq 1$. Если x меняется от $\pi/2$ до $3\pi/2$, то равенство $\sin x = t$ равносильно равенству $x = \pi - \arcsin t$,

где t меняется от 1 до -1 . Наконец, если $x \in [3\pi/2, 2\pi]$, то равенство $\sin x = t$ равносильно такому: $x = 2\pi + \arcsin t$, где t меняется от -1 до 0. Учитывая, что $\cos x \, dx = d \sin x$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx &= \int_0^1 f(\arcsin t) \, dt \\ &+ \int_1^{-1} f(\pi - \arcsin t) \, dt + \int_{-1}^0 f(2\pi + \arcsin t) \, dt. \end{aligned}$$

ПРАКТИКА

1. Найти интегралы

- (1) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$, (2) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, (3) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x}$, $0 \leq \varepsilon < 1$,
- (4) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$, $0 < \alpha < \pi$, (5) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$,
- (6) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$, $ab \neq 0$, (7) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx$,
- (8) $\int_0^1 \arccos x \, dx$, (9) $\int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{5-4x}}$, (10) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$,
- (11) $\int_0^{3/4} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$, (12) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx$ (13) $\int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{x^2 + x + 1}$,
- (14) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, (15) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$,
- (16) $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 \, dx$, (17) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$, (18) $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x \, dx$.

2. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$, полагая $x - 1/x = t$.

3. Вычислить интеграл

$$\int_{1/2}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+1/x} dx,$$

введя новую переменную $t = x + 1/x$.

4. Доказать, что если функция f интегрируема от 0 до 1, то

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx,$$
$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

5. Доказать, что для интегрируемой на $[-l, l]$ функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx,$$

если f четная, и

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0,$$

если f нечетная.

6. Доказать, что если f — непрерывная периодическая на $\mathbb{R}$ функция с периодом T , то

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

при любом $a \in \mathbb{R}$.

7. С помощью рекуррентных формул вычислить интегралы

$$(1) I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \quad (2) J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx, \quad (3) K_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx.$$

9.2. Определенный интеграл как функция пределов интегрирования.

ТЕОРИЯ

Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \subset \mathbb{R}$, и пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — дифференцируемые функции такие, что $\varphi(x), \psi(x) \in [a, b]$. Тогда согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) \, dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x)), \quad (9.9)$$

где F — первообразная функции f на $[a, b]$. Дифференцируя (9.9) по x , получим *формулу дифференцирования определенного интеграла как функции от пределов интегрирования*:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) \, dt \right) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad (9.10)$$

где символ $\frac{d}{dx}$ указывает на операцию дифференцирования по переменной x .

ТЕХНОЛОГИИ

При рассмотрении интеграла как функции пределов интегрирования ограничиваются выписанной выше формулой. Здесь надо внимательно следить за информацией о переменной, по которой выполняется дифференцирование. Полезно помнить, что переменная интегрирования внутренняя для данного интеграла и ее нельзя воспринимать как переменную для совершения каких-либо внешних действий с интегралом.

ПРАКТИКА

1. Найти

$$(1) \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad (2) \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad (3) \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx.$$

2. Найти

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt, \quad (2) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

3. Найти

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

4. Доказать, что $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ **при** $x \rightarrow +\infty$.

5. Пусть $f(x)$ **— непрерывная положительная функция. Доказать, что функция**

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

возрастает при $x > 0$.

9.3. Свойства интеграла. Теоремы о среднем.

ТЕОРИЯ

Теорема (монотонность интеграла). *Если $a \leq b$ и f, g — интегрируемые на $[a, b]$ функции такие, что $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (9.11)$$

Теорема (1-я теорема о среднем). Пусть f — непрерывная, а g — интегрируемая на $[a, b]$ функции, причем g знакопостоянная на $[a, b]$. Тогда найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (9.12)$$

Теорема (2-я теорема о среднем). Пусть f — монотонная, а g — интегрируемая на $[a, b]$ функции. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx. \quad (9.13)$$

Если, кроме того, f убывает и неотрицательна, то

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx, \quad (9.14)$$

а если f возрастает и неположительна, то

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx \quad (9.15)$$

для некоторого $\xi \in [a, b]$.

ТЕХНОЛОГИИ

Теоремы о среднем часто используют для оценивания значения интеграла от данной функции. Самый простой результат, а именно первая теорема о среднем, обычно дает грубую оценку, и это происходит из-за того, что разность между наибольшим и наименьшим значениями функции (так называемое колебание функции) может оказаться ощутимой. Для улучшения оценки можно, например, попробовать разбить промежуток интегрирования на несколько частей, особенно если та часть промежутка, где колебание функции большое, имеет малую длину, а на большей части промежутка колебание функции малое.

При использовании второй теоремы о среднем необходимо представление подынтегральной функции в виде произведения двух функций. Если монотонный сомножитель можно выбрать не одним способом, то можно при выборе руководствоваться тем соображением, чтобы интеграл от оставшейся под интегралом функции был малым.

В любом случае предварительное интегрирование по частям (при наличии такой возможности) улучшает оценку.

ПРИМЕР. Оценим интеграл
$$I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Можно попробовать найти первообразную, но мы по некоторой причине от этого шага воздержимся. Воспользуемся первой теоремой о среднем, в формулировке которой возьмем $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x$ (выбор мотивирован тем, что $g(x)$ знакопостоянна). Тогда

$$|I| \leq \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Получили оценку, по-видимому, довольно грубую, т. е. далекую от значения интеграла. Дело в том, что в интеграле синус, меняя знак, доставляет подынтегральной функции сопоставимые между собой участки положительности и участки отрицательности. Наша оценка этот эффект никак не учитывает.

Оценим этот же интеграл с помощью второй теоремы о среднем, воспользовавшись частью ее формулировки, в которой одна из функций убывает и неотрицательна. Имеем

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x \, dx + \frac{1}{200\pi} \int_{\xi}^{200\pi} \sin x \, dx \right| \\ &= \left| \frac{1 - \cos \xi}{100\pi} + \frac{\cos \xi - 1}{200\pi} \right| = \frac{1 - \cos \xi}{200\pi} \leq \frac{1}{100\pi}, \end{aligned}$$

что значительно точнее оценки, полученной выше.

Для эксперимента проведем в рассматриваемом интеграле интегри-

рование по частям:

$$\begin{aligned} \left| \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{d(1 - \cos x)}{x} \right| = \left| \frac{1 - \cos x}{x} \right|_{100\pi}^{200\pi} + \left| \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq 2 \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{100\pi}, \end{aligned}$$

и получили оценку того же качества, что в ранее.

ПРАКТИКА

1. Определить знаки следующих интегралов:

$$(1) \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx, \quad (2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

2. Какой из интегралов больше:

$$(1) \int_0^1 e^{-x} \, dx \text{ или } \int_0^1 e^{-x^2} \, dx?$$

$$(2) \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x \, dx \text{ или } \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x \, dx?$$

3. Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интегралы

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x}, \quad (2) \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \, dx, \quad (3) \int_0^1 e^{-x^n} \, dx, \, n > 1.$$

4. Доказать равенства

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = 0, \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = 0.$$

5. Найти пределы

$$(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1}, \quad (2) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x},$$

где $a > 0$, $b > 0$ и f непрерывна на $[0, 1]$.

6. Пользуясь второй теоремой о среднем, оценить интегралы

$$(1) \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x \, dx, \quad \alpha \geq 0, \quad 0 < a < b,$$

$$(2) \int_a^b \sin x^2 \, dx, \quad 0 < a < b.$$

9.4. Приложения определенного интеграла.

ТЕОРИЯ

Остановимся на двух геометрических приложениях определенного интеграла — нахождении площадей плоских фигур и длин плоских или пространственных кривых.

ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две функции, определенные на $[a, b]$, такие, что $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$. Тогда площадь S криволинейной трапеции, ограниченной слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, а снизу и сверху — графиками функций $f(x)$, $g(x)$ соответственно, равна

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx. \quad (9.16)$$

ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ. Положение точки (x, y) на координатной плоскости может быть полностью определено не только ее декартовыми координатами, т. е. значениями x и y , но и другими числовыми характеристиками. В качестве таких характеристик можно взять, например, угол φ , на который надо сместиться относительно положительного направления оси абсцисс, чтобы попасть в данную точку, и расстояние r от начала координат до данной точки. В таком случае декартовы координаты можно выразить через r, φ так:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Величины r, φ в указанном контексте называют *полярными координатами* точки (x, y) .

Если задана зависимость $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — дифференцируемая функция аргумента φ , то этим задается некоторая кривая в полярных координатах на декартовой плоскости, и можно либо находить площади фигур, в формировании которых участвует данная кривая, либо искать ее длину. Укажем формулы для обоих указанных возможностей. Площадь S фигуры, ограниченной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi, \quad (9.17)$$

Длина кривой в декартовых координатах. Рассмотрим две функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, заданные на промежутке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и такие, что в каждой точке этого промежутка их производные не обращаются в нуль одновременно. Определяемое этими функциями отображение $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ отрезка $[\alpha, \beta]$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ называют *гладким (параметризованным) путем на плоскости $\mathbb{R}^2$* . Если отображение $\Phi(t)$ взаимно однозначно на интервале (α, β) , будем говорить о нем как о (*простой параметризованной*) *гладкой кривой* на плоскости. Образ $\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ при отображении Φ называют *носителем* пути (кривой).

Длина l определяемого функциями φ, ψ гладкого пути может быть найдена по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (9.18)$$

Если добавить к двум функциям φ, ψ еще одну, т. е. рассмотреть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \eta(t)$ с сохранением налагаемых условий, то полученное отображение $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t), \eta(t))$ называют *путем (кривой) в пространстве $\mathbb{R}^3$* , длина в этом случае находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (9.19)$$

Если кривая на плоскости задается как график явно заданной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то ее длина может быть найдена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (9.20)$$

Длина кривой в полярных координатах. Длина l пути $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, в полярных координатах находится по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (9.21)$$

ТЕХНОЛОГИИ

Для решения задач, в которых надо что-то найти согласно указанным формулам, надлежит просто воспользоваться этими формулами. Разумеется, надо обращать внимание на выполнение условий применимости формул, таких как взаимная однозначность (для кривой), сравнение функций (одна меньше другой) для площади, иногда не заданы пределы изменения аргумента и их приходится находить на основе каких-то внешних обстоятельств типа положительности чего-либо и т. д.

ПРАКТИКА

1. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах:

- (1) $ax = y^2$, $ay = x^2$, $a > 0$, (2) $y = \sin^2 x$, $y = x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$,
 (3) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$,

2. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

- (1) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, (2) $r = a(1 + \cos \varphi)$, (3) $r = a \sin 3\varphi$.
 (4) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

3. Найти длины кривых:

- (1) $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$, $y \geq 0$,

- (2) $x = \sin^4 t, y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi/2$,
 (3) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq t_0$,
 (4) $x = e^t, y = e^{-t}, z = \sqrt{2}t, 0 \leq t \leq t_0$.

4. Найти длины кривых, заданных в полярных координатах:

- (1) $r = a \sin \varphi$, (2) $r = a(1 - \cos \varphi)$,
 (3) $r = a(1 - \sin \varphi), -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6$, (4) $r = a\varphi^2, 0 \leq \varphi \leq 4$.

9.5. Ответы. К п. 9.1. 1. (1) 2; (2) $\frac{\pi}{3}$; (3) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$; (4) $\frac{\pi}{2 \sin \alpha}$; (5) π ;
 (6) $\frac{\pi}{2|ab|}$; (7) 4π ; (8) 1; (9) $\frac{1}{6}$; (10) $\frac{\pi a^4}{16}$; (11) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$; (12) $\frac{\pi^2}{4}$; (13) $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; (14) $-\frac{\pi}{3}$; (15) $2\pi(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}})$; (16) $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$; (17) $2\pi\sqrt{2}$; (18) $\frac{3}{5}(e^\pi - 1)$.
 2. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 3. $\frac{3}{2}e^{5/2}$. 7. (1) $I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, если $n = 2k$; $I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, если $n = 2k+1$; (2) $J_n = I_n$, см. (1); (3) $(-1)^n(\frac{\pi}{4} - (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}))$.

К п. 9.2. 1. (1) 0; (2) $-\sin a^2$; (3) $\sin b^2$. 2. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$; (2) $(\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x)$. 3. (1) 1; (2) $\frac{\pi^2}{4}$; (3) 0.

К п. 9.3. 1. (1) $-$; (2) $+$. 2. (1) Второй; (2) первый. 3. (1) $\frac{8\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3}\theta$ ($0 < \theta < 1$); (2) между $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{10}$; (3) между $1 - \frac{1}{n+1}$ и 1. 5. (1) 1; (2) $f(0) \ln \frac{b}{a}$. 6. (1) $\frac{2}{a}\theta$ ($|\theta| < 1$); (2) $\frac{\theta}{a}$ ($|\theta| < 1$).

К п. 9.4. 1. (1) $\frac{a^2}{3}$; (2) $\frac{\pi}{2}$; (3) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$; (4) $\sqrt{2} - 1$. 2. (1) a^2 ; (2) $\frac{3\pi a^2}{2}$; (3) $\frac{\pi a^2}{4}$. 3. (1) $48a$; (2) $\frac{1}{4}(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}))$; (3) $\sqrt{a^2 + b^2}t_0$; (4) $2 \operatorname{sh} t_0$.
 4. (1) πa ; (2) $8a$; (3) $2a$; (4) $\frac{8}{3}a(5\sqrt{5} - 1)$.