1.4. Предел функции

4.1. Нахождение предела функции с использованием замечательных пределов.

ТЕОРИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКИ. Точку $p \in \mathbb{R}$ называют *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, для любого $r > 0$ существует отличная от p точка $x \in X$ такая, что $|x - p| < r$. Говорят, что $+\infty$ (соответственно $-\infty$) является предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если для любого r найдется такое $x \in X$, что $x > r$ (соответственно $x < r$).

Говоря о пределе функции в конечной или бесконечной точке, всегда, не оговаривая каждый раз, будем предполагать, что эта точка предельная для области определения функции.

Пусть даны функция f и точка $a \in \mathbb{R}$, предельная точка области ее определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНОГО ПРЕДЕЛА В ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКЕ. Число $l \in \mathbb{R}$ называют *пределом функции $f(x)$ в точке a* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$, выполнено неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$. При этом используют такие обозначения: $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, и говорят также, что l есть *предел $f(x)$ при x , стремящемся к a* , или что f *сходится к l при x , стремящемся к a* .

Используя кванторы, соотношение $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, |x - a| < \delta, x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

или так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПРЕДЕЛА В ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКЕ. Говорят, что пределом функции f в точке $a \in \mathbb{R}$ является $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если для любого ε найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$, для которого $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$, выполнено неравенство $f(x) > \varepsilon$ (соответственно $f(x) < \varepsilon$).

При этом используют такие обозначения: $+\infty = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ (соответственно $-\infty = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ТОЧКИ СГУЩЕНИЯ. Говорят, что $+\infty$ (соответственно $-\infty, \infty$) является (*бесконечной*) *точкой сгущения* множества $X \subset \mathbb{R}$, если для любого $r > 0$ существует такое $x \in X$, что $x > r$ (соответственно $x < -r, |x| > r$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ТОЧКЕ СГУЩЕНИЯ. Число $l \in \mathbb{R}$ (соответственно $+\infty, -\infty, \infty$) называют *пределом функции* $f(x)$ при x , *стремящемся к* $+\infty$ ($-\infty, \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $x > \delta$ (соответственно $x < -\delta, |x| > \delta$), выполнено неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ (соответственно $f(x) > \varepsilon, f(x) < -\varepsilon, |f(x)| > \varepsilon$). При этом используют обозначения, аналогичные данным выше, с очевидными изменениями, и говорят также, что l (соответственно $+\infty, -\infty$) есть *предел* $f(x)$ при x , *стремящемся к* $+\infty$ (соответственно $-\infty, \infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОСТОРОННИХ ПРЕДЕЛОВ. Говорят, что $l \in \overline{\mathbb{R}}$ есть *предел* $f(x)$ при x , *стремящемся к* $a \in \mathbb{R}$ *слева* (*справа*), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D(f)$ таких, что $a - \delta < x < a$ (соответственно $a < x < a + \delta$) выполнено соотношение $|f(x) - l| < \varepsilon$ (соответственно $f(x) > \varepsilon, f(x) < -\varepsilon$). При этом используют обозначения $l = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x), l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ соответственно. О пределах слева и справа говорят как об *односторонних пределах*.

Приведем формулировки теорем о пределах, которые будут использованы ниже при нахождении пределов конкретных функций.

Теорема (определение предела функции с использованием предела последовательности). Пусть даны функция f и точка a , предельная точка области ее определения. Число $l \in \mathbb{R}$ (соответственно $+\infty, -\infty$) является пределом функции f в точке a (на $+\infty$ или $-\infty$) в том и только в том случае, если для любой последовательности x_n из $D(f)$ такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ (соответственно $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \pm\infty$) и $x_n \neq a, n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

(соответственно $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \pm\infty$).

Теорема (о связи предела с арифметическими операциями). Пусть даны функции f, g , заданные на множестве X , и точка a , предельная точка множества X . Предположим, что существуют конечные пределы

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Тогда существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$, а если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, то и предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x)$, при этом

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Теорема (о пределе композиции или о замене переменной). Предположим, что существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = b$ в расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Предположим, что, кроме того, выполняется по крайней мере одно из условий

- (1) для x из некоторой окрестности точки a , $x \neq a$, будет $f(x) \neq l$,
- (2) точка l входит в область определения функции g и $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = g(l)$

(т. е. g непрерывна в точке l).

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = b$.

В случае выполнения условия (2) теоремы ее результат можно записать в виде $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$, т. е. знак предела можно внести внутрь функции g .

Теорема (о пределе монотонной функции). Пусть функция f возрастает на множестве $(a - r, a) \cap D(f)$ или на множестве $(a, a + r) \cap D(f)$ при некотором $r > 0$. Тогда существуют соответственно

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D(f), x \in (a - r, a)\},$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D(f), x \in (a, a + r)\}.$$

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для убывающей вблизи точки a функции.

Теорема (о пределе произведения бесконечно малой на ограниченную). Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, а функция g ограничена в некоторой окрестности точки a . Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции в точке) Пусть даны функция f и точка a , предельная точка области ее определения. Для существования конечного предела функции f в

точке a необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такую окрестность V точки a , что для любых $x', x'' \in V$ таких, что $x' \neq a$, $x'' \neq a$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

ТЕХНОЛОГИИ

При нахождении пределов будем использовать небольшой набор пределов, называемых обычно *замечательными пределами*. В нем собраны пределы, отражающие предельные свойства основных элементарных функций:

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{1/z} = e, \quad (4.1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \quad (4.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{a^z - 1}{z} = \ln a, \quad (4.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + z)}{z} = 1, \quad (4.4)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + z)^\mu - 1}{z} = \mu. \quad (4.5)$$

Кроме выписанных будем также использовать равенство, отражающее сравнительный рост показательной и степенной функций:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{a^z}{z^\alpha} = +\infty \quad \text{для любых } a > 1, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Начинать нахождение предела функции надо с постановки вопроса «как устроена функция?». Устройство функции определяется последней операцией, совершаемой при нахождении ее значений. Это может быть сумма, произведение, отношение или композиции, и если выполнены условия соответствующих теорем, то надо этими теоремами воспользоваться. Если выполнения условий нет, например, рассматривается такое отношение функций, в котором предел знаменателя равен нулю. Тогда либо проводят тождественные преобразования, устраняющие эту особенность, либо стараются выделить в функции некоторую конфигурацию, которая после замены и использования теоремы о пределе композиции позволит воспользоваться каким-то известным пределом, как правило, одним из замечательных пределов (4.1)–(4.5).

Отметим особенности применения теоремы о пределе композиции (замене переменной). Обычно это происходит следующим образом. Допустим, нам надо найти предел функции $h(x)$ при $x \rightarrow a$. Допустим, нам удалось так преобразовать данную функцию, что в ней оказался выделенным какой-то блок, который могли бы обозначить новой буквой, т. е. нам удастся представить функцию $h(x)$ в виде композиции $h(x) = g(f(x))$. Если теперь положим $y = f(x)$ и найдем, что выполнены условия теоремы о пределе композиции, т. е. существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, существует $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = b$, а также выполнены условия пунктов (1) или (2) теоремы, то результат ее гарантирует существование предела $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$, равного b . Иначе говоря, нахождение предела сложной функции эта теорема позволяет сводить к нахождению пределов более простых функций, ее составляющих.

Применение теоремы о связи предела с алгебраическими операциями в случае выполнения их условий не вызывает затруднений. Определенную трудность вызывают ситуации, когда не выполнены условия утверждения, которое следовало бы применить. Так бывает, например, когда рассматривается предел отношения, но пределы знаменателя и числителя равны нулю или бесконечны. В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность соответствующего вида, например, вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, и при нахождении предела такую неопределенность надо «раскрыть», т. е. провести такие преобразования, которые ее исключили бы. Кроме указанных встречаются также неопределенности вида 0^0 , $0 \cdot \infty$, 1^∞ — это значит, что рассматриваются соответственно пределы

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)} \quad (f(x) > 0), \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot h(x), \quad \lim_{x \rightarrow p} l(x)^{h(x)},$$

где

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p} h(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow p} l(x) = 1.$$

Для раскрытия первых двух полезно иметь в виду соотношения

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad f(x)h(x) = \frac{f(x)}{1/h(x)} = \frac{h(x)}{1/f(x)}.$$

В случае неопределенности вида 1^∞ можно обратиться к замечательному пределу (1) либо использовать равенство $a^b = e^{b \ln a}$.

При нахождении пределов будем использовать следующее легко устанавливаемое равенство:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow p} g(x) \ln f(x)},$$

если только $\lim_{x \rightarrow p} g(x) \ln f(x)$ существует (хотя бы бесконечный). В частности, если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = a^b. \quad (4.7)$$

Для доказательства отсутствия какого-либо предела у функции f в точке a полезен критерий, основанный на связи предела функции с пределом последовательности (определение предела функции с использованием предела последовательности): достаточно найти две последовательности x'_n, x''_n , удовлетворяющие указанным в теореме требованиям и такие, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x''_n)$.

ПРИМЕР 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

Заметим, что имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как предел числителя и предел знаменателя равны бесконечности. Преобразуем знаменатель, выделив отдельно стремящуюся к бесконечности переменную: $(2x-1)^4 = x^4(2-1/x)^4$. Совершая аналогичное преобразование в числителе и применяя теорему о пределе отношения, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{x^4(2-1/x)^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{(2-1/x)^4} = \frac{49}{16}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1})$.

Здесь имеем дело с неопределенностью вида $\infty - \infty$ (ранее в тексте не отмеченной, ибо такие неопределенности проще раскрывать с помощью преобразований конкретных выражений). Умножив и разделив на сумму корней, а затем применив теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} = 0,$$

ибо знаменатель стремится к ∞ .

Найдем этот предел иначе. Вынося из-под корня переменную x , получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - 1/x^2} - \sqrt{1 + 1/x^2}}{1/|x|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 + y^2}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - y^2)^{1/2} - 1 + (1 - (1 + y^2)^{1/2})}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - y^2)^{1/2} - 1}{-y^2} \cdot (-y) + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + y^2)^{1/2}}{y^2} \cdot y = 0, \end{aligned}$$

где сделана замена $y = 1/|x|$ и использованы соответствующие теоремы.

ПРИМЕР 3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$.

Легко заметить, что здесь имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. В числителе стоят кубические корни, т. е. степенные функции, и нам желательно узнать, можно ли будет применить замечательный предел, связанный со степенной функцией. Для этого надо, чтобы предел подкоренного выражения был равен единице (поскольку в соответствующем пределе (4.5) участвует выражение вида $(1 + x)^\mu$, где $x \rightarrow 0$). У нас требуемое свойство выполняется, ибо $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x = 1$. Для того чтобы использовать замечательный предел, надо подкоренное выражение представить в виде $1 + t$, где $t \rightarrow 0$. Это сделать легко, прибавив и отняв под корнем единицу: $\cos 4x = 1 + (\cos 4x - 1)$, $\cos 5x = 1 + (\cos 5x - 1)$. Теперь проведем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + (\cos 4x - 1)} - \sqrt[3]{1 + (\cos 5x - 1)}}{1 - \cos 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1) - ((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{1 - \cos 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1) - ((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} - \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} = L. \end{aligned}$$

Для возможности использования замечательного предела умножим и разделим соответствующие дроби на стремящиеся к нулю выражения $\cos 4x - 1$, $\cos 5x - 1$, сделаем подходящую группировку и займемся возникшими дробями:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 4x - 1} \cdot \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} - \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 5x - 1} \cdot \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)}$$

Используя теорему о замене переменной и предел (4.5), имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 4x - 1} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 5x - 1} = \frac{1}{3}.$$

Займемся пределами

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(4x/2)}{2 \sin^2(3x/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(4x/2)}{(4x/2)^2} \cdot \frac{(4x/2)^2}{(3x/2)^2} \cdot \frac{(3x/2)^2}{\sin^2(3x/2)} = -\frac{16}{9}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} = -\frac{25}{9}.$$

Собирая полученные результаты, имеем

$$L = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{25}{9}\right) = \frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2}$.

Заметим, что в этом примере имеем дело с неопределенностью вида 1^∞ , которая связана с пределом (4.1). Чтобы воспользоваться указанным

пределом, надо в основании степени выделить слагаемое вида $1 + \alpha$, где α — бесконечно малая. Для этого в основании прибавим и отнимем единицу, а затем умножим и разделим показатель степени на получившуюся бесконечно малую величину:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{-x^2}}. \end{aligned}$$

Ориентируясь на использование равенства (4.6), займемся отдельно пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-x^2}$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(x/2)}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Согласно равенству (4.6) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2} = e^{1/2}$.

ПРАКТИКА

1. Найти пределы

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$, (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, $m, n \in \mathbb{N}$, (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, $m, n \in \mathbb{N}$,
- (5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$, (6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$,
- (7) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$, $m, n \in \mathbb{N}$, (8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$,
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$, (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$,
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, $m, n \in \mathbb{N}$, (12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$, $m, n \in \mathbb{N}$,
- (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$, $m, n \in \mathbb{N}$,
- (14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$,

$$\begin{aligned}
(15) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}, & (16) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}, \\
(17) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + 2x) - 2 \sin(a + x) + \sin a}{x^2}, \\
(18) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a + x) \operatorname{tg}(a - x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}, \\
(19) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}, & (20) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x}), \\
(21) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{2x - 1} \right)^{x^2}, & (22) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n + 1}, \\
(23) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x, & (24) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}, \\
(25) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}, & (26) \quad & \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \\
(27) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \ln(x + 1) - \sin \ln x), & (28) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}, \\
(29) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \quad a > 0, & (30) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, \quad a > 0, \\
(31) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), \quad x > 0, & (32) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n (\pi/4 + 1/n), \\
(33) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1 + 2x)}, & (34) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}, \\
(35) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{1/x^2}, & (36) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e + x))^{\operatorname{ctg} x}, \\
(37) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x}, & (38) \quad & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arccos(1 - x)}{\sqrt{x}}, \\
(39) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}, \quad a > 0, \quad b > 0, \\
(40) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a + b} \right)^{1/x}, \quad a > 0, \quad b > 0. \\
(41) \quad & \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x, & (42) \quad & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - x \cos \sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Ответы. (1) 10; (2) 1; (3) $\frac{mn(n-m)}{2}$; (4) $\frac{m}{n}$; (5) $\frac{n(n+1)}{2}$; (6) $\frac{n(n+1)}{2}$; (7) $\frac{m-n}{2}$; (8) 1; (9) 3; (10) $\frac{3}{2}$; (11) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$; (12) $\frac{n}{m}$; (13) $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$; (14) $\frac{a+b}{2}$; (15) $\cos a$; (16) $\frac{1}{2}$; (17) $-\sin a$; (18) $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$, $a \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$; (19) $-\frac{1}{12}$; (20) 0; (21) 0; (22) 0; (23) e^{2a} ; (24) e^{-1} ; (25) $e^{\operatorname{ctg} a}$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; (26) 1; (27) 0; (28) $(\frac{a}{b})^2$; (29) $a^a \ln \frac{a}{e}$; (30) $a^a \ln ae$; (31) $\ln x$; (32) e^2 ; (33) 2; (34) 2; (35) $\frac{e}{\pi}$; (36) $e^{1/e}$; (37) 2; (38) $\sqrt{2}$; (39) $\sqrt{ab}$; (40) $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$; (41) 0; (42) $\frac{1}{2}$.

4.2. Асимптотические сравнения.

ТЕОРИЯ

Опишем терминологию, связанную с асимптотическим сравнением функций, т. е. сравнением их в пределе при стремлении аргумента к какой-то точке. Нам надо будет договориться о сравнении одной функции относительно другой. Для этого естественно рассматривать их отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$, однако при этом надо делать оговорки, связанные с возможностью знаменателя обращаться в нуль. Чтобы не иметь таких неудобств, можно для указанного выше отношения ввести свое обозначение и тем самым рассматривать представление одной из сравниваемых функций, например $f(x)$, через другую в виде произведения $f(x) = g(x)\varphi(x)$, где в качестве $\varphi(x)$ может выступать отношение $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ в тех точках, где $g(x) \neq 0$.

Две функции асимптотически сравниваются как правило в тех случаях, когда они обе либо бесконечно малые, либо бесконечно большие. Используемые при этом обозначения одинаковы в соответствующих ситуациях, а терминология немного отличается.

Итак, обращаясь к сравнению функций f и g , предположим, что f представлена в виде $f(x) = g(x)\varphi(x)$. Пусть a — предельная точка того множества, на котором эти функции рассматриваются. Если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, то говорят, что f есть *о-малое относительно g* при x , стремящемся к a , и используют обозначение $f(x) = o(g(x))$. Если при этом $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая более высокого порядка, чем g* , или что *порядок малости функции f выше, чем у g* , или что f *стремится к нулю быстрее, чем g* . Если же $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет медленнее, чем g* , или что g *растет быстрее, чем f* .

Предположим теперь, что в представлении $f(x) = g(x)\varphi(x)$ функция φ обладает следующим свойством: существует такая окрестность точки a , на которой φ ограничена. В этом случае говорят, что f — *O -большое по сравнению с g* при x , стремящемся к a , и используют обозначение $f(x) = O(g(x))$. Если при этом $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая порядка не ниже, чем g* , или что *порядок малости функции f не ниже, чем у g* . Если же $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет не быстрее, чем g* .

Если одновременно $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, то говорят, что *функции f и g одного порядка (малости или роста) при $x \rightarrow a$* , используя при этом обозначение $f \asymp g$.

Если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то говорят, что $g(x)$ — *главная часть функции $f(x)$* . Полагая $o(g(x)) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, тот факт, что g есть главная часть f , можно записать в виде $f(x) = g(x)(1 + \alpha(x))$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Если при этом в некоторой окрестности точки a функция g отлична от нуля, то последнее соотношение можно записать в виде $\frac{f(x)}{g(x)} =$

$1 + \alpha(x)$, $\alpha(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$, или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Если $g(x)$ — главная часть $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то говорят также, что *функции f и g эквивалентны при $x \rightarrow a$* и используют обозначение $f(x) \sim g(x)$.

Чаще всего в качестве бесконечно малых или бесконечно больших, с которыми сравнивают данные функции, берут функции вида $(x - a)^\alpha$, $a \in \mathbb{R}$. Если $f(x) = o(x - a)^\alpha$ при $x \rightarrow a$ и $\alpha > 0$, то говорят, что f — *величина более высокого порядка (малости), чем α* , или что у f *порядок малости более высокий, чем α* . Если же $f(x) \sim (x - a)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то говорят, что f *имеет порядок α* (малости или роста, в зависимости от знака α). Аналогичную терминологию можно описать и в том случае, если сравнивают с функцией вида x^α при $x \rightarrow +\infty$.

ТЕХНОЛОГИИ

Важно понимать, что символами типа $O(f(x))$, $o(f(x))$, если они не используются в конкретных равенствах, обозначают не одну функцию, а **класс функций, обладающих отмеченным в символе свойством**, так что если говорят «возьмем функцию $O(f(x))$ или $o(f(x))$ при $x \rightarrow a$ », то имеют в виду, что рассматривается **некоторая** функция, обладаю-

щая указанным свойством, т. е. некоторая функция $h(x)$ такая, что $h(x) = \varphi(x)f(x)$, где $\varphi(x)$ ограничена вблизи a или $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$. В следующих ниже примерах и задачах познакомимся с некоторыми правилами обращения с асимптотическими равенствами.

ПРИМЕР 1. Доказать, что $o(o(f(x))) = o(f(x))$ при $x \rightarrow a$.

Написанное равенство означает, что любая функция, обладающая указанным в левой части равенства свойством, будет бесконечно малой по сравнению с f . Пусть $h(x)$ — какая-либо функция, обладающая тем свойством, что $h(x) = o(o(f(x)))$, и надо показать, что $h(x) = o(f(x))$. Согласно условию существует такая бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция $\theta(x)$, что $h(x) = \theta(x)g(x)$, где $g(x) = o(f(x))$. Последнее означает, что $g(x) = \eta(x)f(x)$, где $\lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0$. Собирая, получим $h(x) = \theta(x)\eta(x)f(x)$, а так как $\lim_{x \rightarrow a} \theta(x)\eta(x) = 0$, по определению $h(x) = o(f(x))$. Требуемое равенство установлено.

ПРИМЕР 2. Доказать, что $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$ при $x \rightarrow a$.

Действительно, это соотношение означает, что функция, обладающая свойством, указанным в левой части, будет обладать также свойством, указанным в правой. Свойство, указанное в левой части, означает, что рассматривается сумма двух функций $h(x) + g(x)$, где $h(x) = \varphi(x)f(x)$, $g(x) = \psi(x)f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$. Тогда $h(x) + g(x) = (\varphi(x) + \psi(x))f(x)$, а поскольку $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) + \psi(x)) = 0$, то $h(x) + g(x) = o(f(x))$, что и требовалось.

Асимптотические равенства удобно использовать при нахождении пределов — они позволяют свести процесс нахождения предела к простым преобразованиям многочленов, раскрытию скобок, приведению подобных членов и выделению главной части. Конечно, для этого надо иметь набор конкретных асимптотических равенств. Поскольку все примеры по нахождению пределов связаны с элементарными функциями, заметим, что основные замечательные пределы можно переписать в виде асимптотических равенств, в которых $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x + o(x), \quad (4.8)$$

$$a^x = 1 + x \ln a + o(x), \quad (4.9)$$

$$\ln(1 + x) = x + o(x), \quad (4.10)$$

$$(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + o(x). \quad (4.11)$$

Во всех этих равенствах бесконечно малые $o(x)$ можно конкретизировать, т. е. записать более точные приближения функций многочленами. Такие равенства будут обоснованы позже, мы же будем сейчас их использовать при нахождении пределов в случае необходимости. Итак, для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства, в которых $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad (4.12)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (4.13)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad (4.14)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad (4.15)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^2 + \dots \\ \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

Учитывая теорему о замене переменной, можно гарантировать, что эти равенства останутся верными, если в них на месте переменной x будет стоять какая-либо функция $x = \varphi(t)$ такая, что $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = 0$, и ищется предел соответствующего выражения при $t \rightarrow a$.

Примеры.

1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Воспользовавшись равенствами (4.12), (4.15), (4.9), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} &= \frac{1 + x \cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1 + x(1 - x^2/2 + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) + o(x)}{x + o(x) - x} \\ &= \frac{1 + x - x^3/2 + o(x^3) - 1 - x + o(x)}{o(x)} = \frac{o(x)}{o(x)}, \end{aligned}$$

и никакой пользы проделанные выкладки не несут, ибо мы в итоге пришли к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Это означает, что нами использована недостаточно глубокая информация об асимптотике имеющихся функций. Простое наблюдение:

$$\ln(1+x) - x = x - x^2/2 + o(x^2) - x = -x^2/2 + o(x^2)$$

показывает, что в знаменателе — величина второго порядка, а тогда и в числителе надо использовать асимптотические равенства, обеспечивающие выделение главного члена второго порядка:

$$\begin{aligned} & \frac{1 + x \cos x - (1 + 2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) - \frac{(1/2) \cdot (-1/2)}{2} (2x)^2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 - x + \frac{4x^2}{8} + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(x^2)/x^2}{-1/2 + o(x^2)/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $x^3/2 = o(x^2)$ и что $o(x^2) + o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.

При нахождении пределов бывает удобно комбинировать использование замечательных пределов и асимптотических равенств.

2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} &= \left(\frac{1 - x^2/2 + o(x^2)}{1 - (2x)^2/2 + o(x^2)} \right)^{1/x^2} \\ &= \left(1 + \frac{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 - o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)} \right)^{1/x^2} = \left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)} \right)^{1/x^2} \\ &= \left(\left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)} \right)^{\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}} \right)^{\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1+o(1)} \cdot \frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{2}$, согласно (4.6) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} = e^{3/2}.$$

Решим этот же пример другим способом. Воспользуемся равенством $a^b = e^{b \ln a}$, $a > 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}.$$

Рассмотрим выражение в показателе степени:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}{x^2} &= \frac{\ln \left(\frac{1-x^2/2+o(x^2)}{1-4x^2/2+o(x^2)} \right)}{x^2} \\ &= \frac{\ln(1-x^2/2+o(x^2)) - \ln(1-2x^2+o(x^2))}{x^2} \\ &= \frac{-x^2/2 + 2x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый предел равен $e^{3/2}$.

ПРАКТИКА

1. Доказать соотношения при $x \rightarrow a$:

$$(1) \quad O(o(f(x))) = o(f(x)), \quad (2) \quad O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)).$$

2. Пусть $x \rightarrow 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

$$(1) \quad o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\alpha), \quad (2) \quad o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta}).$$

3. Пусть $x \rightarrow 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

$$(1) \quad O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\alpha), \quad (2) \quad O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta}).$$

4. Пусть $x \rightarrow \infty$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

$$(1) \quad O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\beta), \quad (2) \quad O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta}).$$

5. Используя асимптотические равенства, найти пределы

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}, \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}.$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{1/x^2}, \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x \cos \alpha x}{1+\sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x},$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{x + \sin x} \right)^{1/(1-\cos x)},$$

- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$, (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$,
 (9) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{3-x} + \ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)}$,
 (10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{7/4} (\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x})$,
 (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+\sin x} - (1/2)\ln(1+x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x}$,
 (12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}$,
 (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{\arcsin x - \sin x}$, (14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh} 2x} - \cos x - x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} \sin x}$,
 (15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x^2/2)}{e^{-x^2/2} - \cos x}$, (16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - xe^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{tg} x}$,
 (17) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1 - x^2/2} \right)^{1/x^2}$, (18) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \operatorname{sh} x}{\ln(1+x^2)} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$,
 (19) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x} - (1/2)\operatorname{sh} x} \right)^{1/\arcsin x^2}$,
 (20) $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln(1+x) + \cos(xe^{-x}))^{1/x^3}$.

6. Найти пределы

- (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}$, (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x^2}{x^2+1} \right)$,
 (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, $n \in \mathbb{N}$, (4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$, $n \in \mathbb{N}$.

Ответы. 5. (1) 3; (2) -2; (3) $\frac{2}{3}$; (4) $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$; (5) 1; (6) e ; (7) $\frac{1}{2}$; (8) -2;
 (9) $e^{-1/4}$; (10) $-\frac{3}{16}$; (11) $-\frac{1}{8}$; (12) $-\frac{1}{2}$; (13) -1; (14) $\frac{7}{5}$; (15) $\frac{1}{2}$; (16) 1;
 (17) $e^{-1/2}$; (18) $e^{2/3}$; (19) $e^{-1/8}$; (20) $e^{2/3}$. **6.** (1) $\frac{1}{1+x^2}$; (2) $\sqrt{2}$; (3) 0; (4) 1.