1.4. Предел функции

4.1. Нахождение предела функции с использованием замечательных пределов.

ТЕОРИЯ

Определение предельной точки. Точку $p \in \mathbb{R}$ называют *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) *множества* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, для любого $r > 0$ существует отличная от p точка $x \in X$ такая, что $|x-p| < r$. Говорят, что $+\infty$ (соответственно $-\infty$) является предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если для любого r найдется такое $x \in X$, что $x > r$ (соответственно $x < r$).

Говоря о пределе функции в конечной или бесконечной точке, всегда, не оговаривая каждый раз, будем предполагать, что эта точка предельная для области определения функции.

Пусть даны функция f и точка $a \in \mathbb{R}$, предельная точка области ее определения.

Определение конечного предела в предельной точке. Число $l \in \mathbb{R}$ называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $|x-a| < \delta$ и $x \neq a$, выполнено неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$. При этом используют такие обозначения: $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, и говорят также, что l есть *предел* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к* a, или что f *сходится к* l *при* x, *стремящемся к* a.

Используя кванторы, соотношение $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, \ |x-a| < \delta, \ x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

или так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in (a-\delta, a+\delta), \ x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Определение бесконечного предела в предельной точке. Говорят, что пределом функции f в точке $a \in \mathbb{R}$ является $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если для любого ε найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$, для которого $|x-a| < \delta$ и $x \neq a$, выполнено неравенство $f(x) > \varepsilon$ (соответственно $f(x) < \varepsilon$).

При этом используют такие обозначения: $+\infty = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (соответственно $-\infty = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$).

Определение бесконечной точки сгущения. Говорят, что $+\infty$ (соответственно $-\infty$, ∞) является (*бесконечной*) *точкой сгущения множества* $X \subset \mathbb{R}$, если для любого $r > 0$ существует такое $x \in X$, что $x > r$ (соответственно $x < -r$, $|x| > r$).

Определение предела функции в бесконечной точке сгущения. Число $l \in \mathbb{R}$ (соответственно $+\infty$, $-\infty$ ∞) называют *пределом функции* $f(x)$ *при* x*, стремящемся к* $+\infty$ ($-\infty$, ∞), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $x > \delta$ (соответственно $x < -\delta$, $|x| > \delta$), выполнено неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ (соответственно $f(x) > \varepsilon$, $f(x) < -\varepsilon$, $|f(x)| > \varepsilon$). При этом используют обозначения, аналогичные данным выше, с очевидными изменениями, и говорят также, что l (соответственно $+\infty$, $-\infty$) есть *предел* $f(x)$ *при* x*, стремящемся к* $+\infty$ (соответственно $-\infty$, ∞).

Определение односторонних пределов. Говорят, что $l \in \overline{\mathbb{R}}$ есть *предел* $f(x)$ *при* x*, стремящемся к* $a \in \mathbb{R}$ *слева* (*справа*), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D(f)$ таких, что $a - \delta x < a$ (соответственно $a < x < a + \delta$) выполнено соотношение $|f(x) - l| < \varepsilon$ (соответственно $f(x) > \varepsilon$, $f(x) < -\varepsilon$). При этом используют обозначения $l = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $l = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ соответственно. О пределах слева и справа говорят как об *односторонних пределах*.

Приведем формулировки теорем о пределах, которые будут использованы ниже при нахождении пределов конкретных функций.

Теорема (определение предела функции с использованием предела последовательности). *Пусть даны функция* f *и точка* a*, предельная точка области ее определения. Число* $l \in \mathbb{R}$ (*соответственно* $+\infty$, $-\infty$) *является пределом функции* f *в точке* a (*на* $+\infty$ *или* $-\infty$) *в том и только в том случае, если для любой последовательности* x_n *из* $D(f)$ *такой, что* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ (*соответственно* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \pm\infty$) *и* $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$*, имеет место равенство*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

(соответственно $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \pm\infty$).

Теорема (о связи предела с арифметическими операциями). *Пусть даны функции* f, g*, заданные на множестве* X*, и точка* a*, предельная точка множества* X*. Предположим, что существуют конечные пределы*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. *Тогда существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$, $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)$, *а если* $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, *то и предел* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x)$, *при этом*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x),\quad \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Теорема (о пределе композиции или о замене переменной). *Предположим, что существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, $\lim\limits_{y\to l} g(y)=b$ *в расширенной числовой прямой* $\overline{\mathbb{R}}$. *Предположим, что, кроме того, выполняется по крайней мере одно из условий*

(1) *для* x *из некоторой окрестности точки* a, $x\neq a$, *будет* $f(x)\neq l$,

(2) *точка* l *входит в область определения функции* g *и* $\lim\limits_{y\to l} g(y)=g(l)$ (т. е. g непрерывна в точке l).

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=b$.

В случае выполнения условия (2) теоремы ее результат можно записать в виде $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=g(\lim\limits_{x\to a} f(x))$, т. е. знак предела можно внести внутрь функции g.

Теорема (о пределе монотонной функции). *Пусть функция* f *возрастает на множестве* $(a-r,a)\cap D(f)$ *или на множестве* $(a,a+r)\cap D(f)$ *при некотором* $r>0$. *Тогда существуют соответственно*

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\sup\{f(x): x\in D(f),\ x\in(a-r,a)\},$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\inf\{f(x): x\in D(f),\ x\in(a,a+r)\}.$$

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для убывающей вблизи точки a функции.

Теорема (о пределе произведения бесконечно малой на ограниченную). *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, *а функция* g *ограничена в некоторой окрестности точки* a. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции в точке) *Пусть даны функция* f *и точка* a, *предельная точка области ее определения. Для существования конечного предела функции* f *в* *точке a необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такую окрестность V точки a, что для любых $x', x'' \in V$ таких, что $x' \neq a$, $x'' \neq a$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

ТЕХНОЛОГИИ

При нахождении пределов будем использовать небольшой набор пределов, называемых обычно *замечательными пределами.* В нем собраны пределы, отражающие предельные свойства основных элементарных функций:

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = e, \tag{4.1}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1, \tag{4.2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{a^z - 1}{z} = \ln a, \tag{4.3}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z} = 1, \tag{4.4}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^\mu - 1}{z} = \mu. \tag{4.5}$$

Кроме выписанных будем также использовать равенство, отражающее сравнительный рост показательной и степенной функций:

$$\lim_{z\to +\infty}\frac{a^z}{z^\alpha} = +\infty \quad \text{для любых } a > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Начинать нахождение предела функции надо с постановки вопроса «как устроена функция?». Устройство функции определяется последней операцией, совершаемой при нахождении ее значений. Это может быть сумма, произведение, отношение или композиции, и если выполнены условия соответствующих теорем, то надо этими теоремами воспользоваться. Если выполнения условий нет, например, рассматривается такое отношение функций, в котором предел знаменателя равен нулю. Тогда либо проводят тождественные преобразования, устраняющие эту особенность, либо стараются выделить в функции некоторую конфигурацию, которая после замены и использования теоремы о пределе композиции позволит воспользоваться каким-то известным пределом, как правило, одним из замечательных пределов (4.1)–(4.5).

Отметим особенности применения теоремы о пределе композиции (замене переменной). Обычно это происходит следующим образом. Допустим, нам надо найти предел функции $h(x)$ при $x \to a$. Допустим, нам удалось так преобразовать данную функцию, что в ней оказался выделенным какой-то блок, который могли бы обозначить новой буквой, т. е. нам удается представить функцию $h(x)$ в виде композиции $h(x) = g(f(x))$. Если теперь положим $y = f(x)$ и найдем, что выполнены условия теоремы о пределе композиции, т. е. существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, существует $\lim\limits_{y\to l} g(y) = b$, а также выполнены условия пунктов (1) или (2) теоремы, то результат ее гарантирует существование предела $\lim\limits_{x\to a} h(x)$, равного b. Иначе говоря, нахождение предела сложной функции эта теорема позволяет сводить к нахождению пределов более простых функций, ее составляющих.

Применение теоремы о связи предела с алгебраическими операциями в случае выполнения их условий не вызывает затруднений. Определенную трудность вызывают ситуации, когда не выполнены условия утверждения, которое следовало бы применить. Так бывает, например, когда рассматривается предел отношения, но пределы знаменателя и числителя равны нулю или бесконечны. В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность соответствующего вида, например, вида $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, и при нахождении предела такую неопределенность надо «раскрыть», т. е. провести такие преобразования, которые ее исключили бы. Кроме указанных встречаются также неопределенности вида 0^0, $0\cdot\infty$, 1^∞ — это значит, что рассматриваются соответственно пределы

$$\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)}\ (f(x)>0),\quad \lim_{x\to p} f(x)\cdot h(x),\quad \lim_{x\to p} l(x)^{h(x)},$$

где

$$\lim_{x\to p} f(x)=0,\ \lim_{x\to p} g(x)=0,\ \lim_{x\to p} h(x)=\infty,\ \lim_{x\to p} l(x)=1.$$

Для раскрытия первых двух полезно иметь в виду соотношения

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)},\quad f(x)h(x) = \frac{f(x)}{1/h(x)} = \frac{h(x)}{1/f(x)}.$$

В случае неопределенности вида 1^∞ можно обратить к замечательному пределу (1) либо использовать равенство $a^b = e^{b\ln a}$.

При нахождении пределов будем использовать следующее легко устанавливаемое равенство:

$$\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to p} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to p} g(x)\ln f(x)},$$

если только $\lim\limits_{x\to p} g(x)\ln f(x)$ существует (хотя бы бесконечный). В частности, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = a^b. \tag{4.7}$$

Для доказательства отсутствия какого-либо предела у функции f в точке a полезен критерий, основанный на связи предела функции с пределом последовательности (определение предела функции с использованием предела последовательности): достаточно найти две последовательности x'_n, x''_n, удовлетворяющие указанным в теореме требованиям и такие, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_n)$.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

Заметим, что имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, так как предел числителя и предел знаменателя равны бесконечности. Преобразуем знаменатель, выделив отдельно стремящуюся к бесконечности переменную: $(2x-1)^4 = x^4(2-1/x)^4$. Совершая аналогичное преобразование в числителе и применяя теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{x^4(2-1/x)^4}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{(2-1/x)^4} = \frac{49}{16}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1})$.

Здесь имеем дело с неопределенностью вида $\infty - \infty$ (ранее в тексте не отмеченной, ибо такие неопределенности проще раскрывать с помощью преобразований конкретных выражений). Умножив и разделив на сумму корней, а затем применив теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} = 0,$$

ибо знаменатель стремится к ∞.

Найдем этот предел иначе. Вынося из-под корня переменную x, получим

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}) &= \lim_{x\to\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x^2}-\sqrt{1+1/x^2}}{1/|x|} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1+y^2}}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{(1-y^2)^{1/2}-1+(1-(1+y^2)^{1/2})}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{(1-y^2)^{1/2}-1}{-y^2}\cdot(-y)+\lim_{y\to 0}\frac{1-(1+y^2)^{1/2}}{y^2}\cdot y = 0,\end{aligned}$$

где сделана замена $y = 1/|x|$ и использованы соответствующие теоремы.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$.

Легко заметить, что здесь имеем дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$. В числителе стоят кубические корни, т. е. степенные функции, и нам желательно узнать, можно ли будет применить замечательный предел, связанный со степенной функцией. Для этого надо, чтобы предел подкоренного выражения был равен единице (поскольку в соответствующем пределе (4.5) участвует выражение вида $(1+x)^\mu$, где $x\to 0$). У нас требуемое свойство выполняется, ибо $\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x = 1$. Для того чтобы использовать замечательный предел, надо подкоренное выражение представить в виде $1+t$, где $t\to 0$. Это сделать легко, прибавив и отняв под корнем единицу: $\cos 4x = 1+(\cos 4x-1)$, $\cos 5x = 1+(\cos 5x-1)$. Теперь проведем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+(\cos 4x-1)}-\sqrt[3]{1+(\cos 5x-1)}}{1-\cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)-((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{1-\cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)-((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)}-\frac{((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)} = L.\end{aligned}$$

Для возможности использования замечательного предела умножим и разделим соответствующие дроби на стремящиеся к нулю выражения $\cos 4x - 1$, $\cos 5x - 1$, сделаем подходящую группировку и займемся возникшими дробями:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)}{\cos 4x - 1} \cdot \frac{\cos 4x - 1}{2\sin^2(3x/2)} - \frac{((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{\cos 5x - 1} \cdot \frac{\cos 5x - 1}{2\sin^2(3x/2)}$$

Используя теорему о замене переменной и предел (4.5), имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)}{\cos 4x - 1} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{\cos 5x - 1} = \frac{1}{3}.$$

Займемся пределами

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{2\sin^2(3x/2)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x - 1}{2\sin^2(3x/2)}.$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{2\sin^2(3x/2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2(4x/2)}{2\sin^2(3x/2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2(4x/2)}{(4x/2)^2} \cdot \frac{(4x/2)^2}{(3x/2)^2} \cdot \frac{(3x/2)^2}{\sin^2(3x/2)} = -\frac{16}{9}.$$

Аналогично

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x - 1}{2\sin^2(3x/2)} = -\frac{25}{9}.$$

Собирая полученные результаты, имеем

$$L = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{25}{9}\right) = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{-1/x^2}$.

Заметим, что в этом примере имеем дело с неопределенностью вида 1^∞, которая связана с пределом (4.1). Чтобы воспользоваться указанным пределом, надо в основании степени выделить слагаемое вида $1+\alpha$, где α — бесконечно малая. Для этого в основании прибавим и отнимем единицу, а затем умножим и разделим показатель степени на получившуюся бесконечно малую величину:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{-x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left((1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{-x^2}}.$$

Ориентируясь на использование равенства (4.6), займемся отдельно пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{-x^2}$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(x/2)}{-x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Согласно равенству (4.6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2} = e^{1/2}$.

ПРАКТИКА

1. Найти пределы

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n\in\mathbb{N}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in\mathbb{N}$, **(8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$,

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, **(10)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$, **(12)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$,

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$,

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$,

(15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$, **(16)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$,

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$,

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$,

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$, **(20)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$,

(21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$, **(22)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}$,

(23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$, **(24)** $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$,

(25) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$, **(26)** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$,

(27) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)$, **(28)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$,

(29) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$, **(30)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, $a>0$,

(31) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$, $x>0$, **(32)** $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n(\pi/4+1/n)$,

(33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$, **(34)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$,

(35) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2}$, **(36)** $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg}x}$,

(37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$, **(38)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$,

(39) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$, $a>0$, $b>0$,

(40) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$, $a>0$, $b>0$.

(41) $\lim\limits_{x\to +0}x\ln x$, **(42)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$.

Ответы. (1) 10; (2) 1; (3) $\frac{mn(n-m)}{2}$; (4) $\frac{m}{n}$; (5) $\frac{n(n+1)}{2}$; (6) $\frac{n(n+1)}{2}$; (7) $\frac{m-n}{2}$; (8) 1; (9) 3; (10) $\frac{3}{2}$; (11) $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$; (12) $\frac{n}{m}$; (13) $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$; (14) $\frac{a+b}{2}$; (15) $\cos a$; (16) $\frac{1}{2}$; (17) $-\sin a$; (18) $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$, $a\neq(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$; (19) $-\frac{1}{12}$; (20) 0; (21) 0; (22) 0; (23) e^{2a}; (24) e^{-1}; (25) $e^{\operatorname{ctg} a}$, $a\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; (26) 1; (27) 0; (28) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; (29) $a^a\ln\frac{a}{e}$; (30) $a^a\ln ae$; (31) $\ln x$; (32) e^2; (33) 2; (34) 2; (35) $\frac{e}{\pi}$; (36) $e^{1/e}$; (37) 2; (38) $\sqrt{2}$; (39) $\sqrt{ab}$; (40) $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$; (41) 0; (42) $\frac{1}{2}$.

4.2. Асимптотические сравнения.

ТЕОРИЯ

Опишем терминологию, связанную с асимптотическим сравнением функций, т. е. сравнением их в пределе при стремлении аргумента к какой-то точке. Нам надо будет договориться о сравнении одной функции относительно другой. Для этого естественно рассматривать их отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, однако при этом надо делать оговорки, связанные с возможностью знаменателя обращаться в нуль. Чтобы не иметь таких неудобств, можно для указанного выше отношения ввести свое обозначение и тем самым рассматривать представление одной из сравниваемых функций, например $f(x)$, через другую в виде произведения $f(x)=g(x)\varphi(x)$, где в качестве $\varphi(x)$ может выступать отношение $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в тех точках, где $g(x)\neq 0$.

Две функции асимптотически сравниваются как правило в тех случаях, когда они обе либо бесконечно малые, либо бесконечно большие. Используемые при этом обозначения одинаковы в соответствующих ситуациях, а терминология немного отличается.

Итак, обращаясь к сравнению функций f и g, предположим, что f представлена в виде $f(x)=g(x)\varphi(x)$. Пусть a — предельная точка того множества, на котором эти функции рассматриваются. Если имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, то говорят, что f есть *о-малое относительно* g при x, стремящемся к a, и используют обозначение $f(x)=o(g(x))$. Если при этом $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, то говорят, что f — *бесконечно малая более высокого порядка, чем* g, или что *порядок малости функции* f *выше, чем у* g, или что f *стремится к нулю быстрее, чем* g. Если же $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, то говорят, что f *растет медленнее, чем* g, или что g *растет быстрее, чем* f.

Предположим теперь, что в представлении $f(x) = g(x)\varphi(x)$ функция φ обладает следующим свойством: существует такая окрестность точки a, на которой φ ограничена. В этом случае говорят, что f — *O-большое по сравнению с g* при x, стремящемся к a, и используют обозначение $f(x) = O(g(x))$. Если при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая порядка не ниже, чем g*, или что *порядок малости функции f не ниже, чем у g*. Если же $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет не быстрее, чем g*.

Если одновременно $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, то говорят, что *функции f и g одного порядка* (*малости или роста*) при $x \to a$, используя при этом обозначение $f \asymp g$.

Если при $x \to a$ функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то говорят, что $g(x)$ — *главная часть функции* $f(x)$. Полагая $o(g(x)) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, тот факт, что g есть главная часть f, можно записать в виде $f(x) = g(x)(1 + \alpha(x))$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Если при этом в некоторой окрестности точки a функция g отлична от нуля, то последнее соотношение можно записать в виде $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$, $x \to a$, или $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Если $g(x)$ — главная часть $f(x)$ при $x \to a$, то говорят также, что *функции f и g эквивалентны при* $x \to a$ и используют обозначение $f(x) \sim g(x)$.

Чаще всего в качестве бесконечно малых или бесконечно больших, с которыми сравнивают данные функции, берут функции вида $(x - a)^\alpha$, $a \in \mathbb{R}$. Если $f(x) = o(x - a)^\alpha$ при $x \to a$ и $\alpha > 0$, то говорят, что f — *величина более высокого порядка* (*малости*), *чем* α, или что у f *порядок малости более высокий, чем* α. Если же $f(x) \sim (x - a)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то говорят, что f *имеет порядок* α (малости или роста, в зависимости от знака α). Аналогичную терминологию можно описать и в том случае, если сравнивают с функцией вида x^α при $x \to +\infty$.

ТЕХНОЛОГИИ

Важно понимать, что символами типа $O(f(x))$, $o(f(x))$, если они не используются в конкретных равенствах, обозначают не одну функцию, а **класс функций, обладающих отмеченным в символе свойством**, так что если говорят «возьмем функцию $O(f(x))$ или $o(f(x))$ при $x \to a$», то имеют в виду, что рассматривается **некоторая** функция, обладающая указанным свойством, т. е. некоторая функция $h(x)$ такая, что $h(x) = \varphi(x)f(x)$, где $\varphi(x)$ ограничена вблизи a или $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$. В следующих ниже примерах и задачах познакомимся с некоторыми правилами обращения с асимптотическими равенствами.

Пример 1. Доказать, что $o(o(f(x))) = o(f(x))$ при $x \to a$.

Написанное равенство означает, что любая функция, обладающая указанным в левой части равенства свойством, будет бесконечно малой по сравнению с f. Пусть $h(x)$ — какая-либо функция, обладающая тем свойством, что $h(x) = o(o(f(x)))$, и надо показать, что $h(x) = o(f(x))$. Согласно условию существует такая бесконечно малая при $x \to a$ функция $\theta(x)$, что $h(x) = \theta(x)g(x)$, где $g(x) = o(f(x))$. Последнее означает, что $g(x) = \eta(x)f(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}\eta(x) = 0$. Собирая, получим $h(x) = \theta(x)\eta(x)f(x)$, а так как $\lim\limits_{x\to a}\theta(x)\eta(x) = 0$, по определению $h(x) = o(f(x))$. Требуемое равенство установлено.

Пример 2. Доказать, что $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$ при $x \to a$.

Действительно, это соотношение означает, что функция, обладающая свойством, указанным в левой части, будет обладать также свойством, указанным в правой. Свойство, указанное в левой части, означает, что рассматривается сумма двух функций $h(x) + g(x)$, где $h(x) = \varphi(x)f(x)$, $g(x) = \psi(x)f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 0$. Тогда $h(x) + g(x) = (\varphi(x) + \psi(x))f(x)$, а поскольку $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x) + \psi(x)) = 0$, то $h(x) + g(x) = o(f(x))$, что и требовалось.

Асимптотические равенства удобно использовать при нахождении пределов — они позволяют свести процесс нахождения предела к простым преобразованиям многочленов, раскрытию скобок, приведению подобных членов и выделению главной части. Конечно, для этого надо иметь набор конкретных асимптотических равенств. Поскольку все примеры по нахождению пределов связаны с элементарными функциями, заметим, что основные замечательные пределы можно переписать в виде асимптотических равенств, в которых $x \to 0$:

$$\sin x = x + o(x), \tag{4.8}$$

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x), \tag{4.9}$$

$$\ln(1 + x) = x + o(x), \tag{4.10}$$

$$(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + o(x). \tag{4.11}$$

Во всех этих равенствах бесконечно малые $o(x)$ можно конкретизировать, т. е. записать более точные приближения функций многочленами. Такие равенства будут обоснованы позже, мы же будем сейчас их использовать при нахождении пределов в случае необходимости. Итак, для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства, в которых $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \tag{4.12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \tag{4.13}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{4.14}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \dots \\ \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Учитывая теорему о замене переменной, можно гарантировать, что эти равенства останутся верными, если в них на месте переменной x будет стоять какая-либо функция $x = \varphi(t)$ такая, что $\lim\limits_{t\to a} \varphi(t) = 0$, и ищется предел соответствующего выражения при $t \to a$.

Примеры.

1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Воспользовавшись равенствами (4.12), (4.15), (4.9), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} &= \frac{1 + x\cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1 + x(1 - x^2/2 + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) + o(x)}{x + o(x) - x} \\ &= \frac{1 + x - x^3/2 + o(x^3) - 1 - x + o(x)}{o(x)} = \frac{o(x)}{o(x)},\end{aligned}$$

и никакой пользы проделанные выкладки не несут, ибо мы в итоге пришли к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Это означает, что нами использована недостаточно глубокая информация об асимптотике имеющихся функций. Простое наблюдение:

$$\ln(1+x) - x = x - x^2/2 + o(x^2) - x = -x^2/2 + o(x^2)$$

показывает, что в знаменателе — величина второго порядка, а тогда и в числителе надо использовать асимптотические равенства, обеспечивающие выделение главного члена второго порядка:

$$\begin{aligned}
&\frac{1 + x\cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\
&\quad = \frac{1 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) - \frac{(1/2)\cdot(-1/2)}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\
&\quad = \frac{1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 - x + \frac{4x^2}{8} + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\
&\quad = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(x^2)/x^2}{-1/2 + o(x^2)/x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $x^3/2 = o(x^2)$ и что $o(x^2) + o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.

При нахождении пределов бывает удобно комбинировать использование замечательных пределов и асимптотических равенств.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

Имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = \left(\frac{1 - x^2/2 + o(x^2)}{1 - (2x)^2/2 + o(x^2)}\right)^{1/x^2} \\
&= \left(1 + \frac{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 - o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)}\right)^{1/x^2} = \left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)}\right)^{1/x^2} \\
&\qquad = \left(\left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)}\right)^{\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}}\right)^{\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1+o(1)}\cdot\frac{1}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \dfrac{3}{2}$, согласно (4.6) имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = e^{3/2}.$$

Решим этот же пример другим способом. Воспользуемся равенством $a^b = e^{b \ln a}$, $a > 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}}.$$

Рассмотрим выражение в показателе степени:

$$\frac{\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}}{x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1-x^2/2+o(x^2)}{1-4x^2/2+o(x^2)}\right)}{x^2}$$
$$= \frac{\ln(1-x^2/2+o(x^2)) - \ln(1-2x^2+o(x^2))}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2/2+2x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \to \frac{3}{2}.$$

Следовательно, искомый предел равен $e^{3/2}$.

ПРАКТИКА

1. Доказать соотношения при $x \to a$:

(1) $O(o(f(x))) = o(f(x))$, **(2)** $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

2. Пусть $x \to 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\alpha)$, **(2)** $o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$.

3. Пусть $x \to 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\alpha)$, **(2)** $O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta})$.

4. Пусть $x \to \infty$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\beta)$, **(2)** $O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta})$.

5. Используя асимптотические равенства, найти пределы

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$, **(2)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$, **(4)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$,

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, **(6)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{x+\sin x}\right)^{1/(1-\cos x)}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$, **(8)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^3}$,

(9) $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{3-x}+\ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)}$,

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{7/4}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})$,

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\sin x}-(1/2)\ln(1+x^2)-x}{\operatorname{tg}^3 x}$,

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$,

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-\sin x}$, **(14)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sh}2x}-\cos x-x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}\sin x}$,

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+x^2/2)}{e^{-x^2/2}-\cos x}$, **(16)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-xe^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}-\operatorname{tg}x}$,

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{e^x-1-x^2/2}\right)^{1/x^2}$, **(18)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\operatorname{sh}x}{\ln(1+x^2)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$,

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x}-(1/2)\operatorname{sh}x}\right)^{1/\arcsin x^2}$,

(20) $\lim\limits_{x\to 0}(x-\ln(1+x)+\cos(xe^{-x}))^{1/x^3}$.

6. Найти пределы

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$,

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, $n\in\mathbb{N}$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$, $n\in\mathbb{N}$.

Ответы. 5. (1) 3; (2) -2; (3) $\frac{2}{3}$; (4) $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$; (5) 1; (6) e; (7) $\frac{1}{2}$; (8) -2; (9) $e^{-1/4}$; (10) $-\frac{3}{16}$; (11) $-\frac{1}{8}$; (12) $-\frac{1}{2}$; (13) -1; (14) $\frac{7}{5}$; (15) $\frac{1}{2}$; (16) 1; (17) $e^{-1/2}$; (18) $e^{2/3}$; (19) $e^{-1/8}$; (20) $e^{2/3}$. **6.** (1) $\frac{1}{1+x^2}$; (2) $\sqrt{2}$; (3) 0; (4) 1.