Приложение к введению.

А1. Высказывания. В математике мы часто встречаемся с высказываниями. Под высказыванием понимают повествовательное предложение, в котором что-то утверждается о каком-то объекте, и при этом можно судить, верно это утверждение или нет. Для высказывания вместо слова «верно» говорят также «истинно» «справедливо», «выполнено», «имеет место» и т. п., для не верного высказывания используют также термин «ложно».

Есть несколько способов получения новых высказываний на основе имеющихся. Ясно, что для каждого из них мы должны указать, в каких случаях новое высказывание будет истинным в зависимости от истинности имевшихся высказываний.

Можно получить новое высказывание, имея в распоряжении всего одно высказывание, а именно можно взять *отрицание* данного высказывания, т. е. если высказывание обозначить одной буквой, например P, то новое высказывание будет (не P). Символически высказывание (не P) или (неверно P) обозначают через $\neg P$.

Рассмотрим два высказывания, обозначим одно из них буквой P, а другое — буквой Q. Путем их соединения одним из союзов «и», «или» можно получить новые высказывания: (P и Q) и (P или Q) (в последнем вместо союза «или» используют иногда союз «либо»). Высказывание (P и Q) называют *конъюнкцией высказываний P и Q* и обозначают через $P \wedge Q$ или $P \& Q$. Высказывание (P или Q) называют *дизъюнкцией высказываний P и Q* и обозначают через $P \vee Q$.

Высказывание (P и Q) истинно, если оба высказывания P, Q истинны, и ложно при других раскладах. Высказывание (P или Q) истинно, если хотя бы одно из высказываний P, Q истинно, и ложно в одном случае — когда оба высказывания P, Q ложны.

Еще один способ получения нового высказывания из P, Q — это составление условного утверждения, а именно высказывания

$$\text{из } P \text{ следует } Q$$

или, иначе говоря,

$$\text{если (выполнено) } P, \text{ то (выполнено) } Q.$$

Это высказывание кратко обозначают так:

$$P \Rightarrow Q,$$

и называют *импликацией.*

Если $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, то высказывания P и Q называют *равносильными* или *эквивалентными* и используют при этом обозначение $P \Longleftrightarrow Q$. Два высказывания равносильны в том и только в том случае, если они оба либо истинны, либо ложны.

Импликацию $P \Rightarrow Q$ можно переформулировать иным способом, привлекая рассуждение «от противного»: предположим, что Q не верно, если при этом P также оказывается ложным, то считается, что верно высказывание $P \Rightarrow Q$. Иначе говоря, высказывание $P \Rightarrow Q$ равносильно высказыванию (не Q) $\Rightarrow$ (не P).

Импликация $P \Rightarrow Q$ ложна только в одном случае, когда P истинно, а Q ложно, в остальных случаях она истинна. Считать $P \Rightarrow Q$ ложной, если P истинно, а Q ложно, достаточно естественно — вряд ли мы согласимся, что из истинного утверждения, рассуждая корректно, можно получить ложное. Также естественно считать ее истинной, если P и Q оба истинны. Некоторую настороженность могут вызвать случаи, когда P ложно. Попробуем договориться так. Если Q истинно, то нам все равно, откуда оно могло бы следовать, так что импликацию $P \Rightarrow Q$ в этом случае будем считать истинной, даже если P ложно.

Осталась ситуация, когда P, Q оба ложны. Однако ввиду того, что импликация $P \Rightarrow Q$ равносильна импликации (не Q) $\Rightarrow$ (не P), в случае, когда оба P и Q ложны, их отрицания (не P) и (не Q) истинны. В таком случае импликацию (не Q) $\Rightarrow$ (не P) истинна, а вместе с ней истинной считаем и импликацию $P \Rightarrow Q$.

Информацию об истинности высказываний, составленных с использованием конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности, в зависимости от истинности их составляющих удобно представить в виде таблицы, в которой 1 означает, что высказывание истинно, а 0 — что оно ложно:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

О равносильности составных высказываний можно судить по их таблицам истинности. А именно отличительной особенностью равносильных высказываний служит совпадение их таблиц истинности. Стало быть, если оказалось, что таблицы совпали, то такие высказывания равносильны.

A2. Отрицание составных высказываний. Рассмотрим высказывание

$$\text{не } (P \text{ и } Q).$$

В нем говорится о том, что не выполнены утверждения P и Q одновременно, а это указывает на то, что по крайней мере одно из них не выполнено, т. е. не (P и Q) равносильно высказыванию ((не P) или (не Q)). Символически можно это записать так:

$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Рассмотрим высказывание

$$\text{не } (P \text{ или } Q).$$

В нем говорится: не верно, что выполнено P или выполнено Q, т. е. оба высказывания P и Q не верны. Таким образом, не (P или Q) равносильно тому, что ((не P) и (не Q)). Символически:

$$\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Прежде чем заняться отрицанием импликации $P \Rightarrow Q$ сформируем равносильное ей высказывание с использованием дизъюнкции и отрицания и запишем отрицание импликации как отрицание такого высказывания. Когда мы считаем высказывание «если P, то Q» истинным? В случае, когда P не выполнено, нам безразлична справедливость Q, но если P верно, то Q должно быть также верным. Это можно сказать так: или P не верно, или Q верно, т. е. записать в виде дизъюнкции $\neg P \vee Q$. Легко убедиться в справедливости равносильности этой дизъюнкции и импликации $P \Longleftrightarrow Q$, написав таблицу истинности:

P	Q	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Теперь легко сформировать отрицание (не верно $P \Rightarrow Q$). Заменив $P \Rightarrow Q$ ему равносильным $\neg P \vee Q$ и взяв его отрицание, получим высказывание $P \wedge \neg Q$. Словесно его можно оформить так: неверно, что из P следует Q, означает, что P выполнено, а при этом Q — нет.

А3. Высказывания с переменными. Кванторы. Высказывания могут быть такими, что их истинность зависит от выбора какого-то объекта (или нескольких объектов) из заданной совокупности объектов. В таком случае высказывание включает в себя некоторую букву (или несколько букв), на место которой (которых) можно подставлять разные объекты из данной совокупности, и тогда говорят, что рассматривается высказывание с переменной (переменными). При этом в результате подстановки каждого конкретного объекта мы должны получать высказывание без переменной, т. е. каждый раз должны иметь возможность судить, истинно высказывание для конкретного объекта или ложно.

С высказываниями с переменными связан важный способ образования новых высказываний (без переменных). Пусть дано высказывание $P(x)$, истинность которого зависит от объектов, обозначенных здесь буквой x и выбираемых из некоторого множества X. Из этого высказывания с переменной можно сделать новые высказывания, сообщив, при каких обстоятельствах относительно x будем рассматривать данное высказывание.

Одно из этих обстоятельств выражается фразами «для любого», «для каждого», «для всех» и приводит к новому высказыванию вида «(для любого $x \in X$) $P(x)$», которое читается обычно так: для любого (для каждого, для всех) x из X выполнено $P(x)$. Ясно, что словами эти фразы писать не всегда удобно, поэтому для их обозначения используют символ $\forall$, называемый *квантором общности*. О высказывании $(\forall x \in X)$ $P(x)$ говорят, что переменная $x \in X$ в нем *связана квантором общности*.

Второе обстоятельство выражается словами «найдется», «существует», «можно подобрать» и т. п. и приводит к высказыванию вида «(существует $x \in X$) $P(x)$», читается так: существует x из X, для которого выполнено $P(x)$. Для обозначения слов «найдется», «существует» и т. п. используется символ $\exists$, который называют *квантором существования*. О высказывании $(\forall x \in X)$ $P(x)$ говорят, что переменная $x \in X$ в нем *связывается квантором существования*.

А4. Отрицание высказывания с кванторами. Разберемся в том, как брать отрицание высказываний с кванторами, Рассмотрим утверждение вида

$$(\exists x \in X)\ P(x).$$

Его отрицание, т. е. утверждение

$$\text{не верно } ((\exists x \in X)\ P(x)),$$

можно проговорить так: не верно, что существует $x \in X$, для которого выполнено $P(x)$. Но если не существует такого $x \in X$, для которого выполнено $P(x)$, то для любого $x \in X$ должно выполняться отрицание высказывания $P(x)$, т. е. должно быть

$$(\text{для любого } x \in X) \quad \text{не верно } P(x)$$

или, символически,

$$(\text{не } (\exists x \in X)\ P(x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in X) \text{ не } P(x).$$

Что произошло? Квантор существования сменился квантором общности, а отрицание проникло вглубь утверждения и разместилось за квантором.

Теперь рассмотрим утверждение вида

$$(\forall x \in X)\ Q(x).$$

Его отрицание, т. е. утверждение

$$\text{не верно } ((\forall x \in X)\ Q(x)),$$

можно проговорить так: не верно, что для любого $x \in X$ выполнено $Q(x)$, т. е. не для любого $x \in X$ выполнено $Q(x)$, т. е. существует такое $x \in X$, для которого не выполнено $Q(x)$. Символически:

$$\text{не } ((\forall x \in X)\ Q(x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in X) \text{ не } Q(x).$$

Здесь квантор общности сменился квантором существования, а отрицание стало после квантора.

Последовательно применяя эти простейшие шаги к более сложным высказываниям с кванторами, можно легко получать их отрицания. Так, например,

$$\begin{aligned}
&\text{не } ((\exists C\ \forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \forall C \text{ не } ((\forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow (\forall C\ \exists x \in X) \text{ не верно } f(x) \leqslant C \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow (\forall C\ \exists x \in X)\ f(x) > C,
\end{aligned}$$

или, опуская промежуточные шаги,

$$\text{не } ((\exists C\ \forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow (\forall C\ \exists x \in X)\ f(x) > C.$$

Знатоки могут отметить, что мы сначала указали свойство ограниченности сверху функции f на множестве X и в виде отрицания получили свойство неограниченности сверху функции f на множестве X.

А5. Восприятие кванторов в зависимости от ситуаций с их использованием. Поскольку встречаться с кванторами приходится на протяжении всего времени общения с математикой, важно хорошо понимать, как работать с утверждениями, содержащими кванторы.

Отношение к кванторам общности и существования неоднозначно и зависит от статуса утверждения с их участием, а именно от того, надо ли такое утверждение доказывать или оно уже дано и его можно использовать.

Ситуация 1. Квантор общности участвует в утверждении, которое надо доказывать. Тогда квантор «для любого» можно представлять себе как внешнее требование, не зависящее от нас, которое мы должны удовлетворить. Если в утверждении есть слова «для любого», представьте себе, что кто-то будет предлагать вам какие-то значения величины, сопровождаемой словами «для любого», а вам предстоит при этом выполнить все действия, которые следуют за этими словами. Пусть для определенности величина, к которой относятся слова «для любого», обозначается буквой ε, и для еще большей определенности (так чаще всего бывает) добавим требование: $\varepsilon > 0$. Тогда выражение «для любого $\varepsilon > 0$» надо понимать так: кто-то будет давать какие-то положительные числа в качестве ε. Мы, в свою очередь, должны будем обеспечить справедливость какого-то утверждения (обозначим его через $P(\varepsilon)$), связанного с выбранным ε. С чего начать обеспечение требуемого утверждения? Во-первых, надо посмотреть, что от нас потребуется в утверждении $P(\varepsilon)$, и задаться вопросом: *откуда можно получить выполнение* $P(\varepsilon)$? Иначе говоря, пойти с конца, пытаясь понять, какие действия надо предпринять для обеспечения $P(\varepsilon)$. Значение ε нам неизвестно, поэтому надо заботиться о том, чтобы выработать **правило** обеспечения справедливости $P(\varepsilon)$, зависящее, естественно, от ε. Если такое правило выработать удается, то можно гарантировать, что мы обеспечим выполнение утверждения

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad P(\varepsilon).$$

Ситуация 2. Квантор общности встретился в утверждении, которое дано, и мы имеем право это утверждение использовать. Тогда выбор той величины, к которой относится этот квантор, в наших руках, мы вправе придать ей то значение, которое нам требуется, и использовать с этим значением всё, что сообщается в утверждении.

Очень важно не смешивать эти две ситуации!

Иначе следует относиться к квантору существования.

Ситуация 3. Квантор существования стоит в утверждении, которое мы доказываем, то это наши возможности, мы можем подбирать величину, о существовании которой говорится, исходя из всех имеющихся ресурсов. Это наш регулятор, которым мы управляем. Конечно, в каждом конкретном случае гарантия существования осуществляется по-разному, однако в некоторых ситуациях есть наблюдения, носящие рекомендательный характер.

Ситуация 4. Квантор существования находится в утверждении, которое известно, нам дано, и мы можем его использовать. В этом случае квантор существования — это пришедшая извне (из имеющегося утверждения) информация, которую мы можем использовать в наших целях.

Формирование корректного отношения к кванторам — процесс длительный, и он эффективно реализуется на простейших высказываний с кванторами, заложенных в определениях базовых понятий, связанных с функциями. Целесообразно располагать появление таких понятий в порядке возрастания трудности восприятия кванторов. Самые простые понятия связаны с одним квантором существования, это область определения и множество значений, затем можно перейти к понятиям, основанным на одном кванторе общности, это четность и нечетность. Следующий шаг — два квантора общности, это монотонность. Затем можно перейти к определениям, основанным на двух кванторах, сначала существования, потом общности, это периодичность и ограниченность, и сначала общности, потом существования, это неограниченность и точные границы. Следующий по трудности восприятия шаг — определение предела последовательности. На восприятии кванторов именно в этой конфигурации, а именно $\forall\exists\forall$, мы и остановимся ввиду традиционного наличия трудностей в изучении понятия предела последовательности, отсылая читателя к [2] для знакомства с указанными выше схемами. При этом будет использован стиль изложения, направленный на вовлечение слушателей в процесс формирования понятия.

А6. Аксиомы. Утверждения. Необходимые и достаточные условия. Математика состоит из высказываний, истинность которых декларируется, и такие высказывания называют *аксиомами*, и высказываний, доказываемых на основе аксиом и уже доказанных высказываний с помощью логических рассуждений. Доказываемые высказывания называют *утверждениями*, и в зависимости от дополнительных обстоятельств используют другие слова для обозначения утверждений. Например, утверждение, носящее вспомогательный для данного контекста характер, называют леммой, а утверждение, в данном контексте фундаментальное, важное — теоремой, и т. д.

В математических утверждениях не встречается свободных, не связанных кванторами объектов. При этом есть договоренность, что если не указано явно, каким из кванторов связывается переменная, то считается, что она связана квантором общности.

Формулировки условных утверждений организуют обычно так. Сначала сообщают обстановку, в рамках которой будет происходить действие, т. е. указывают, какие объекты и при каких обстоятельствах рассматриваются. Затем дают условие, начиная фразу, например, словом «если». После того как условие записано, сообщают результат (вывод). Эта часть утверждения начинается, например, словом «то». Описание обстановки можно вынести за рамки утверждения, однако при изучении и использовании данного утверждения всегда надо иметь в виду обстановку, в которой оно формулируется. Такая организация в явном виде встречается не всегда, есть и другие способы выражения условного утверждения, но эта наиболее прозрачна и требует минимума усилий при раскодировании содержания утверждения.

Поговорим о том, как в русском (математическом) языке оформляется импликация $P \Rightarrow Q$. Два варианта такого оформления мы уже встретили при ее определении:

из P следует Q

и

если (выполнено) P, то (выполнено) Q.

Но этим языковое богатство для импликации не исчерпывается. Оставшиеся три способа, которые мы обсудим, не столь прозрачные, и мы остановимся на них подробнее, ибо они поначалу вызывают определенные трудности.

Один из способов связан со словами о необходимых и достаточных условиях. А именно, о высказывании (если P, то Q) говорят:

для (выполнения) P необходимо (выполнение) Q,

и в этом контексте утверждение Q называют *необходимым условием* выполнения P.

Почему импликацию «из P следует Q» выражают таким словосочетанием? Это несколько непривычное выражение можно легко понять, если заметить, что слово «необходимо» здесь означает «не обходимо», т. е. «нельзя обойти», т. е. «обязательно будет выполнено», т. е. если выполнено утверждение P, то нельзя обойти выполнение утверждения Q, оно также будет выполнено, т. е. из P следует Q.

То же самое утверждение «из P следует Q» выражают и так: «для выполнения Q достаточно выполнения P», и высказывание P называют *достаточным условием* для Q.

Еще один способ выразить утверждение (если P, то Q) таков: Q выполнено тогда, когда выполнено P, и это словосочетание довольно естественно. Менее естественно, к чему просто надо привыкнуть, такое словосочетание: P выполнено только тогда, когда выполнено Q.

Наконец, (если P, то Q) выражают так: Q выполнено в том случае, если (или когда) выполнено P, и двойственным образом: P выполнено только в том случае, если (или когда) выполнено Q.

Важно понимать суть и значение необходимых условий. Допустим, что мы интересуемся утверждением P и хотим узнать, справедливо ли оно, но пока располагаем лишь утверждением типа «из P следует Q». Можно ли исходя из этого утверждения выяснить, выполнено ли P? Конечно, нет. Дело в том, что в утверждении «из P следует Q» интересующее нас утверждение P стоит в условии, на месте предположения, а не в результате, не на месте вывода, т. е. нам известно, что **в предположении справедливости** P будет выполнено какое-то заключение, обозначенное нами символом Q. Исходя из этого невозможно сделать какое-либо заключение о справедливости P.

Тем не менее утверждение типа «из P следует Q», или «для выполнения P необходимо выполнение Q», какую-то информацию об утверждении P сообщает. Действительно, перепишем его в виде «если не выполнено Q, то не выполнено P» и заметим, что мы тем самым получаем возможность выяснить, когда же P **не выполнено**, т. е. при каких обстоятельствах не надо интересоваться справедливостью P — это произойдет в том случае, если не выполнено Q. Отсюда можно сделать вывод о том, что ожидать выполнения P можно лишь среди объектов, для которых выполнено Q.

Те объекты, на которых Q не выполняется, можно не рассматривать, ибо на них P заведомо не выполняется.

В отличие от необходимых, достаточные условия гарантируют выполнение интересующего нас свойства — их и называют достаточными потому, что их проверки вполне хватает для выполнения требуемого свойства. Однако прежде чем применить достаточные условия, сначала следует учесть необходимые условия с тем, чтобы достаточные применять только там, где выполнены условия необходимые.

Рассмотрим пример. Допустим, мы интересуемся, будет ли точка x из интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$ точкой экстремума дифференцируемой на (a,b) функции f. Если никакой информации о возможности экстремума в данной точке нет, то задача неподъемная — не исследовать же все точки из (a,b), их слишком много, времени не хватит. Помогает необходимое условие: для того чтобы точка x была точкой экстремума функции f, необходимо, чтобы ее производная в этой точке обращалась в нуль, т. е. чтобы было выполнено равенство $f'(x) = 0$. Иначе это можно сформулировать так: если x — точка экстремума функции f на (a,b), то $f'(x) = 0$. Это утверждение, сформулированное в виде: если $f'(x) \neq 0$, то x — не точка экстремума, подсказывает нам, что если $f'(x) \neq 0$, то на предмет наличия экстремума такую точку исследовать не надо — в ней экстремума нет! Следовательно, исследованию подлежат только те точки, где $f'(x) = 0$, а их, как правило, не очень много, и задача становится обозримой. Какими средствами изучать те точки, где $f'(x) = 0$, это уже другой вопрос, как правило, к ним применяют достаточное условие экстремума.

А7. Свойство, признак, критерий. Прямое и обратное утверждения. Для условного утверждения «если выполнено P, то выполнено Q» в зависимости от ситуации употребляются следующие названия. Допустим, что мы интересуемся справедливостью утверждения Q, тогда P называют *признаком* выполнения Q. Если же у нас есть P и мы интересуемся, что из этого можно получить, то высказывание Q называют *свойством* P. Например, в утверждении «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны» высказывание Q=«углы при основании равны» является свойством высказывания P=«данный треугольник равнобедренный». Если же мы интересуемся высказыванием Q=«данный треугольник равнобедренный» и имеем в распоряжении высказывание P=«два угла треугольника равны между собой», то оно служит признаком равнобедренности, так как имеет место утверждение «если два угла треугольника равны между собой, то треугольник равнобедренный»,

Если у нас есть некое высказывание P и мы установили эквивалентность «P равносильно Q», то Q называют *критерием* P. Например, если посмотреть на приведенный пример с точки зрения такой формулировки: «равнобедренность треугольника равносильна тому, что два его угла равны между собой», то равенство углов оказывается критерием равнобедренности треугольника.

Пусть даны утверждения P и Q. Из них можно составить два условных утверждения, а именно «если верно P, то верно Q» и «если верно Q, то верно P» или, иными словами, «из P следует Q» и «из Q следует P». Считая одно из них данным, говорят «прямым», другое называют к нему *обратным.* Например, если утверждение

$$\text{из } P \text{ следует } Q$$

данное (прямое), то утверждение

$$\text{из } Q \text{ следует } P$$

к нему обратное.

Обратим внимание на то, как оформляется в доказательстве равносильности каких-то утверждений переход к доказательству обратного утверждения. Это в некоторой мере зависит от того, в какой манере дана формулировка. Так, если в утверждении написано, что для выполнения P необходимо и достаточно выполнения Q, и доказана необходимость, т. е. «если выполнено P, то выполнено Q», далее говорят: «докажем достаточность», имея в виду, что теперь будет доказываться импликация «из Q следует P».

Если утверждение сформулировано так: «высказывание P выполняется тогда и только тогда, когда выполнено Q», и доказано прямое (в данном контексте) утверждение, т. е. что из P следует Q, и теперь переходим к доказательству обратного утверждения, то этот момент оформляется так: «обратно, пусть выполнено Q, докажем выполнение P». Используемое в этой ситуации слово «обратно» как признак начала доказательства обратного утверждения иногда заменяют словом «наоборот», здесь совершенно неуместным: слово «обратно» указывает на начало доказательства обратного, а не «наоборотного» утверждения.

Может возникнуть вопрос: как связаны между собой прямое и обратное утверждения в плане их справедливости? Ответ простой: никак. Поэтому если вместо требуемого утверждения предлагают обратное к нему, это грубая ошибка, встречающаяся, в частности, при формулировке теоремы о необходимых условиях экстремума, особенно в стиле, использующем именно слово «необходимо».

A8. Краткие обозначения для суммы и произведения. Познакомимся с простыми обозначениями, с которыми будем часто встречаться в дальнейшем.

Рассмотрим конечный набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, занумерованных последовательными натуральными числами от 1 до n. Для суммы $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ используют обозначение $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, в котором букву k называют *индексом суммирования.* Она является внутренней переменной в том смысле, что ее использование ограничивается данным выражением и за его пределами можно снова использовать эту же букву. Важно не то, какой буквой обозначен индекс суммирования, а то, в каких конфигурациях эта буква участвует. Иначе говоря, выражение $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ представляет собой краткую форму записи следующей процедуры: на то место, где встречается индекс k в выражении x_k, подставляются последовательно числа $1, 2, \dots, n$ и полученные значения суммируются. Например,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(2k-1)^2} &= 1 + \frac{1}{(2 \cdot 2 - 1)^2} + \frac{1}{(2 \cdot 3 - 1)^2} + \dots \frac{1}{(2 \cdot m - 1)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{(2m-1)^2}.\end{aligned}$$

Аналогичное обозначение используют для обозначения произведения конечной последовательности x_k, $k = 1, \dots, n$:

$$\prod_{k=1}^{n} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ первых n натуральных чисел обозначают символом $n!$ называемым *факториалом числа n.* Для удобства по определению полагают $0! = 1$.

Полезно иметь в виду свойство сочетаемости сумм, состоящее в следующем. Рассмотрим конечный набор чисел, занумерованный посредством двух натуральных чисел, например x_{ij}, где i может принимать значения от 1 до m, а j — от 1 до n, т. е. набор чисел

$$x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots x_{2n}, \dots x_{m1}, \dots, x_{mn}.$$

Ясно, что сумма всех этих чисел не зависит от того, в каким порядке их складывают. Например, при каждом фиксированном $j = 1, \dots, n$ можно взять сумму по всем индексам $i = 1, \dots, m$, а затем все результаты просуммировать, и это в кратком виде запишется так: $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}$, а можно поступить наоборот, т. е. сначала просуммировать по j при каждом фиксированном i, а затем собрать результаты. Это простое наблюдение выразится таким равенством:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

A9. Метод математической индукции. Строение множества натуральных чисел порождает метод математической индукции доказательства утверждений, истинность которых зависит от натуральных чисел. Он состоит в следующем.

Предположим, что некоторое утверждение $P(n)$, справедливость которого зависит от натурального n, верно для первого натурального числа $n = 1$ и из того, что верно $P(n)$, следует, что верно $P(n + 1)$. Принцип математической индукции гласит, что в таком случае утверждение $P(n)$ верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Для использования метода математической индукции с целью доказательства некоторого утверждения $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, надо проверить $P(1)$, т. е. справедливость утверждения для первого натурального числа, а затем обосновать условное утверждение, так называемый индуктивный переход. А именно, предполагая справедливость утверждения для некоторого натурального числа n, доказать его выполнение для следующего натурального числа $n + 1$. Разумеется, в процессе доказательства надо активно использовать индуктивное предположение, т. е. допущение справедливости $P(n)$. Если утверждение $P(n)$ надо доказывать не для всех натуральных n, а только начиная с некоторого натурального n_0, то в качестве базы индукции проверяется утверждение $P(n_0)$ и индуктивный переход обосновывается для $n \geqslant n_0$.

Пример 1. Доказать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Действительно, если $n = 1$, то сумма слева превращается в одно число 1, и справа имеем $1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)/6 = 1$, так что при $n = 1$ требуемое равенство верно. Предположим, что оно выполнено при некотором натуральном n, и докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Используя предположение, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Следовательно, согласно принципу математической индукции требуемое равенство будет верным при любом натуральном n.

Упражнения.

1. Доказать равенства

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}. \tag{3}$$

2. Доказать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \ 0! = 1.$$

3. Доказать неравенства

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \geq 2. \tag{2}$$