§ 7.8. Векторные операции в криволинейных координатах

В физике довольно часто приходится записывать операции «ротор», «дивергенция», «градиент» в криволинейных координатах, по крайней мере сферических, полярных, цилиндрических. Поставим минимальную цель: научиться записывать указанные выше операции в перечисленных системах координат. Вопрос в известной мере непростой. Во всяком случае надо овладеть основными идеями и научиться пользоваться результатами.

Сначала напомним обозначения, связанные с заменой переменных.

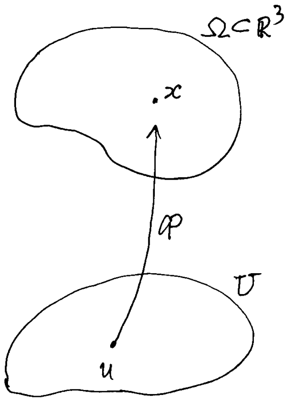

Рис. 1.

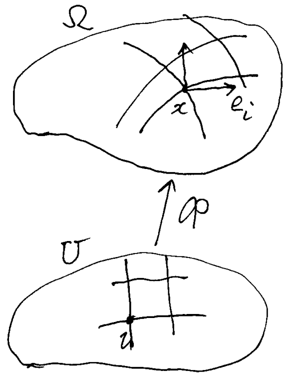

Рис. 2.

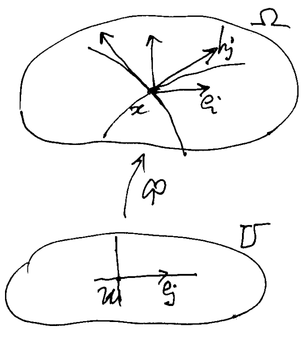

Рис.3.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Обратим внимание на то, что здесь не идет речь о многообразии, здесь нет поверхностей и кривых. Есть область в трехмерном пространстве, в которой все и происходит. Пусть x — некоторая точка в Ω. Предположим, что в этой области заданы другие координаты. Они задаются посредством какого-то диффеоморфизма, который, как обычно, обозначим через Φ. Область изменения параметров обозначим через U, и пусть u — прообраз точки x. Иначе говоря, u — это новые координаты точки x (рис. 1). В указанном контексте x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и диффеоморфизм $\Phi : U \to \Omega$ задает (новые, или криволинейные) координаты u^1, u^2, u^3 в Ω. Обратим внимание, что u^i — это координаты точки из Ω, а не точки из U. Можно это представлять себе как другие имена той же самой точки. Как только появляются новые координаты, в области U можно нарисовать прямоугольную (декартову) сетку и отобразить ее в Ω. Там возникают линии, вдоль каждой из которых меняется какая-то из новых координат, так называемые координатные линии (рис. 2). Известно, что замена координат вызывает искажение пространства и квадратики в новых координатах вовсе не выглядят так же в старых. В касательном пространстве к Ω в точке x есть стандартный базис, который будем обозначать через e_i. Тем самым $e_1, e_2, e_3 \in T_x\Omega$ — это векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$. При введении новых координат вместе с координатными линиями появляются касательные векторы к ним, будем обозначать эти векторы через h_j, т. е. $h_j = \Phi_*(e_j)$, $j = 1, 2, 3,$ — поднятые наверх векторы стандартного базиса в пространстве новых координат (там тоже есть свой стандартный базис). Или, более подробно, h_j суть векторы (рис. 3) $h_j = d\Phi(u)(e_j)$. Это векторы нового базиса в касательном пространстве $T_x\Omega$, прикрепленном к точке x.

Пусть $a(x)$ — скалярная функция на Ω, а $F(x)$ — векторное поле на Ω с декартовыми координатами F^1, F^2, F^3, т. е.

$$F(x) = F^1(x)e_1 + F^2(x)e_2 + F^3(x)e_3.$$

Когда мы переходим в векторных выражениях к новым координатам, происходит два явления. Во-первых, на месте x появляется u. т. е. все рассматриваемые функции записываются в терминах новых аргументов u. Но это всего-лишь полдела, это происходит и со скалярными функциями. Вместе с точками меняется и базис, по которому раскладывается векторное поле. Когда мы пишем F^1, F^2, F^3, имеем в виду координаты в старом (первичном) декартовом базисе. А при переходе к новым координатам поля будут раскладываться по новому базису h_1, h_2, h_3, потому что дифференцирование по новой координате будет выражаться как дифференцирование вдоль соответствующей этой координате кривой, т. е. нахождению скорости изменения разных величин вдоль кривой, и тогда надо брать касательный к этой кривой вектор и раскладывать надо с его участием. Итак, в векторных выражениях происходит два явления: переход к новым координатам во всех функциях и смена базиса, по которому раскладываются векторы. Если все это учесть, получится правильное выражение.

Начнем разбираться с тем, по каким правилам происходят преобразования.

Первое — это связь между e_i и h_j, т. е. векторами старого и нового базисов. Запишем матрицу Якоби:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi^n}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi^n}{\partial u^n} \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы Якоби суть наши векторы h_j. Точнее, элементы столбцов — это координаты вектора h_j в стандартном базисе. Иначе говоря, элемент $\dfrac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}$ — это i-я координата вектора h^j в базисе e^i. Тем самым

$$h_j = \sum_i \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} e_i. \qquad (1)$$

Заметим, что когда возникает много суммирований, индексы суммирования перестают писать и используют по умолчанию договоренность, состоящую в том, что по повторяющимся индексам, находящимся на разных уровнях, происходит суммирование (так называемое правило Эйнштейна).

Обратим внимание на то, что переход от старого базиса к новому, выраженный соотношением (1), происходит через умножение на транспонированную матрицу Якоби $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\right)$, поскольку суммирование идет по верхнему индексу. Мы представляем объекты h_j как расположенные в столбце и e_i тоже в столбце. Все, что преобразуется по этому правилу, по которому преобразуются базисные векторы, называют *ковариантными компонентами* в том смысле, что они меняются вместе с базисом.

Перейдем к установлению связи между координатами векторов. Пусть $\xi \in T_x\Omega$ — касательный вектор, прикрепленный к точке x с декартовыми координатами ξ^i, т. е.

$$\xi = \sum_i \xi^i e_i.$$

Этот же вектор можно разложить и по новому базису h_j:

$$\xi = \sum_j \tilde{\xi}^j h_j.$$

(Новые координаты касательных векторов будем обозначать при помощи тильды.) Установим связь между старыми и новыми координатами. Для этого приравняем полученные два выражения и подставим выражение (1) h_j через e_i:

$$\sum_i \xi^i e_i = \sum_j \tilde{\xi}^j h_j = \sum_j \sum_i \tilde{\xi}^j \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} e_i.$$

Поменяем порядок суммирования и заметим, что векторы равны тогда и только тогда, когда равны их координаты, т. е.

$$\xi^i = \sum_j \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} \tilde{\xi}^j. \tag{2}$$

По правилу (2), т. е. через умножение на саму матрицу Якоби (не на транспонированную), происходит переход от новых координат к старым. Это второе из двух правил, и все, что преобразуется по этому правилу, называется *контравариантным.* Естественно, у контравариантных компонент индекс пишется сверху. Тем самым при аккуратной записи получается, что если индекс нижний, то меняется как базис по правилу (1) (ковариантно), а если сверху, то это контравариантные компоненты и они меняются по правилу (2)

Установим связь между производными скалярной функции в переменных x и u. Мы это уже проделывали. Запись функции $a(x)$ в новых координатах определяется тождеством

$$\tilde{a}(u) = a(\Phi(u)),$$

в котором справа стоит композиция старой функции и отображения, выражающего новую систему координат. Продифференцируем его:

$$\frac{\partial \tilde{a}(u)}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a(x)}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi^i(u)}{\partial u^j}. \tag{3}$$

Получили связь между частными производными новой и старой функций. Здесь работает ковариантное правило: индекс записан на самом деле снизу, несмотря на то, что у координаты он записан сверху, но координата оказалась в знаменателе и индекс стал нижним. Кроме того, умножение происходит на транспонированную матрицу Якоби: суммирование берется по верхнему индексу и реализуется переход от старых производных к новым, так что производные меняются по ковариантному правилу.

Есть еще один объект, который тоже преобразуется, это скалярное произведение т. е. метрический тензор. Пусть $\xi, \eta \in T_x\Omega$ — два вектора, прикрепленные к точке x. Каждый из них раскладывается по базису e_i:

$$\xi = \sum_i \xi^i e_i, \quad \eta = \sum_k \eta^k e_k.$$

Будем придерживаться такого принципа в обозначениях. Составим пары из букв i, j, из k, l и из p, q. Первые буквы из этих пар будем использовать в качестве индексов для обозначения в старой (исходной, декартовой) системе координат, а вторые — для обозначения в новой системе координат. Тем самым по тому, что за буква используется, можно установить, к какой системе координат выражение относится.

Запишем скалярное произведение и преобразуем, воспользовавшись линейностью по каждому из аргументов:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \Big\langle \sum_i \xi^i e_i, \sum_k \eta^k e_k \Big\rangle = \sum_i \sum_k \xi^i \eta^k \langle e_i, e_k \rangle.$$

Базис у нас стандартный, так что получается либо единица, либо нуль, т. е. $\langle e_i, e_k \rangle$ — в точности символ Кронекера:

$$\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Тем самым двойная сумма в последнем равенстве преобразуется в одну:

$$\sum_i \sum_k \xi^i \eta^k \langle e_i, e_k \rangle = \sum_i \xi^i \eta^i.$$

В последнем суммировании проявляется некоторая непоследовательность использовании расположения индексов в определении скалярного произведения — когда мы его определяли, ставили верхние индексы при суммировании. Однако если все правильно записано, то индексы, по которым суммируется, должны располагаться на разных уровнях. Предыдущие равенства эту непоследовательность объясняют. Здесь на самом деле есть еще объекты с нижними индексами, так что оказываются два верхних индекса и два нижних и проводится двойное суммирование. Просто в стандартном базисе эта матрица очень простая и не выписывается явно.

Разложим те же векторы по новому базису:

$$\xi = \sum_j \tilde{\xi}^j h_j, \quad \eta = \sum_l \tilde{\eta}^l h_l$$

и проделаем ту же операцию, т. е. посмотрим, как то же скалярное произведение выражается через новые координаты. Подставляя и пользуясь линейностью, получаем двойную сумму

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_j \sum_l \xi^j \eta^l \langle h_j, h_l \rangle.$$

Введем обозначение $\langle h_j, h_l \rangle = g_{jl}$. Матрицу с элементами g_{jl} называют *матрицей Грама*, а сами g_{jl} — (*ковариантными*) *компонентами* *метрического тензора.* Конечно, оригинально получилось — сказано о компонентах метрического тензора, но не было определено, что это такое. Однако будет специальный курс, где это будет подробно рассмотрено. Вообще тензором называют объект, который зависит от одного или нескольких аргументов и линеен по каждому из них при фиксированных остальных. В частности, скалярное произведение — это тензор, линейный функционал тоже тензор, дифференциальные формы тоже тензоры, только кососимметрические, потому что в них при перестановке аргументов меняется знак. У тензоров есть компоненты, и появившиеся у нас — это компоненты соответствующего тензора.

Установим связь между компонентами g_{jl} метрического тензора в новых координатах и компонентами δ_{ik} тензора в старых. Оказывается, что там дважды применяется ковариантное правило. По определению

$$g_{jl} = \langle h_j, h_l \rangle = \left\langle \sum_i \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} e_i, \sum_k \frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} \frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} \delta_{ik}. \qquad (4)$$

Здесь умножаем на транспонированную матрицу с суммированием по верхнему индексу и делаем это дважды, т. е. два раза применяется ковариантное правило. По этой причине компоненты g_{jl} называют *ковариантными.*

Поскольку e_i и h_j образуют базисы, матрицы Грама невырожденные и у них есть обратные. Элементы обратной к матрице g_{jl} обозначают через g^{lq} и называют *контравариантными компонентами метрического тензора.* Можно понять, что g^{lq} связаны с δ^{lq} через двойственное (контравариантное) правило, т. е. можно взять тождество (4), перейти к обратным, получится умножение на обратные и транспонированные. Отметим тождество

$$\sum_l g_{jl} g^{lq} = \delta_j^q = \begin{cases} 1, & j = q, \\ 0, & j \neq q. \end{cases}$$

Это также символ Кронекера. Можно заметить, что есть несколько символов Кронекера, различающихся местами расстановки индексов.

Ортогональные системы координат.

Бывает так, что базисные векторы новой системы координат попарно ортогональны (хотя, возможно, не нормированы, т. е. имеют неединичную длину). Так происходит, например, в часто используемых полярной, цилиндрической и сферической системах координат.

Если векторы h_j попарно ортогональны, то составленную из них систему координат называют *ортогональной* (или *триортогональной*).

Что можно сказать о матрице Грама, т. е. о метрическом тензоре, в этом случае? Оказывается, что для ортогональной системы координат g_{ik} представляет собой диагональную матрицу, в которой на диагонали стоят квадраты длин векторов:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle h_1, h_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle h_2, h_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle h_3, h_3 \rangle \end{pmatrix}.$$

Для этих величин есть специальные обозначения и название. Эти величины обозначают так: $\langle h_1, h_1 \rangle = E_1$, $\langle h_2, h_2 \rangle = E_2$, $\langle h_3, h_3 \rangle = E_3$, они равны квадратам длин базисных векторов. Используют также корни из этих величин, т. е. собственно сами длины. Их обозначают так: $H_j = \sqrt{E_j} = |h_j|$, и называют *коэффициентами Ламе.*

Коли уж оказалось так, что векторы нового базиса попарно ортогональны, можно довести дело до конца и их нормировать т. е. работать с векторами

$$\hat{h}_j = \frac{h_j}{H_j}.$$

С именем Ламе связывают коэффициенты и параметры. Последние возникают в механике и описывают, как тело сжимается при деформации. Желательно не путать их с коэффициентами.

После нормировки возникает еще один базис, ортонормированный, и по нему тоже можно раскладывать. Коэффициенты в разложении по нормированным векторам будем обозначать через $\hat{\xi}^j$, т. е. добавлять сверху крышку, так что

$$\hat{\xi} = \sum_j \hat{\xi}^j \hat{h}_j = \sum_j \tilde{\xi}^j h_j = \sum_i \xi^i e_i.$$

Тем самым есть три набора координат: исходные декартовы, в новом базисе и в ортонормированном базисе. В физике встречается именно разложение по ортонормированному базису, поэтому при переходе к новым координатам новый базис снова нормируют.

Базис удобно нормировать потому, что в таком случае абсолютная величина поля будет находиться по тому же удобному правилу, что и для старых координат, а именно для длины вектора имеем

$$|\xi^2| = \sum_j (\hat{\xi}^j)^2 = \sum_i (\xi^i)^2.$$

Например, в электродинамике важно знать модули напряженности поля, ибо они отражают плотность энергии поля и т. п.

Посчитаем коэффициенты Ламе классических систем координат.

(1) Полярная система координат. Все предыдущие записи были сделаны для случая $\mathbb{R}^3$, в $\mathbb{R}^2$ все остается таким же, только исчезает последняя координата. В этой системе координат матрица Якоби такова:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Первый столбец дает один из базисных векторов, длина его равна 1, второй столбец — другой базисный вектор, его длина равна r. Здесь коэффициенты Ламе естественно обозначать не цифрами, а названиями переменных. Тем самым $H_r = 1$, $H_\varphi = r$. Это те же величины, которые стояли при дифференциалах в замене переменных, когда мы выписывали элементы площади и объема в различных системах координат — dr было само по себе, а $d\varphi$ сопровождалось коэффициентом r.

(2) Цилиндрическая система координат. Коэффициенты Ламе таковы:

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1.$$

(3) Сферическая система координат. Коэффициенты Ламе таковы:

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta.$$

Запись $\operatorname{grad} f$ $\operatorname{rot} f$ $\operatorname{div} f$ **в криволинейных системах координат.**

Пусть даны скалярная функция $f(x)$ и новые координаты u, задаваемые диффеоморфизмом Φ, т. е. $x = \Phi(u)$.

Выясним, как преобразуются частные производные f. Запишем f в новых координатах: $\tilde{f}(u) = f(\Phi(u))$, и продифференцируем. Получим (см. (3))

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u^j}(u) = \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\frac{\partial\Phi^i}{\partial u^j}. \tag{5}$$

Вспомним, как определяется $\operatorname{grad} f$, и поймем, как координаты $(\operatorname{grad} f)^i$ этого векторного поля связаны с частными производными $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. По определению градиент — это такой вектор, который дает нам действие дифференциала и выражает его через скалярное произведение:

$$\langle \operatorname{grad} f, \xi\rangle = df(x)(\xi). \tag{6}$$

В стандартных координатах дифференциал действует так:

$$df(x)(\xi) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\xi^i, \tag{7}$$

а скалярное произведение в свете того, что мы о нем недавно узнали, запишется так:

$$\langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle = \sum_i \sum_k (\operatorname{grad} f)^k \xi^i \delta_{ki}, \tag{8}$$

и ввиду произвольности вектора ξ должно быть

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_k (\operatorname{grad} f)^k \delta_{ki} = (\operatorname{grad} f)^i. \tag{9}$$

Надо обратить внимание на то, что в (9) равны величины с разновысотными индексами, и это происходит только в декартовой системе координат за счет специфического метрического тензора δ_{ki}.

Как связаны координаты векторных полей в базисах e_i и h_j? Вернемся немного назад и заметим, что они меняются контравариантно, т. е. происходит переход от новых к старым путем умножения на матрицу Якоби. Тем самым должно быть так:

$$(\operatorname{grad} f)^k = \sum_l \frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} (\operatorname{grad} \tilde{f})^l. \tag{10}$$

Это контравариантное правило, связывающее компоненты векторов.

Подставим на соответствующее место в равенстве (5) выражения для $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^i}$ из (9), а затем на место $(\operatorname{grad} f)^k$ подставим выражение для него из (10). Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j} &= \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} = \sum_i \sum_k (\operatorname{grad} f)^k \delta_{ki} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} \\ &= \sum_i \sum_k \sum_l \frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} (\operatorname{grad} \tilde{f})^l \delta_{ki} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}.\end{aligned}$$

Вынесем сумму по l наружу, а в суммировании по i и k, участвуют соответствующие компоненты касательных векторов в стандартном базисе, а именно

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} = h_l^k, \quad \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} = h_j^i,$$

и мы их сворачиваем с метрическим тензором. Координаты в стандартном базисе, и в стандартном же базисе берется скалярное произведение. Это скалярное произведение векторов h_l и h_j. Получаем матрицу Грама. В итоге получается так:

$$\frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j} = \sum_l (\mathrm{grad}\, \tilde{f})^l g_{lj}. \tag{11}$$

Мы хотим выразить $(\mathrm{grad}\, \tilde{f})^l$ через $\dfrac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j}$. Для этого надо умножить на матрицу, обратную к метрическому тензору, иначе говоря, свернуть с контравариантными компонентами. Применяя обратную матрицу g^{lj}, получаем

$$(\mathrm{grad}\, \tilde{f})^l = \sum_j g^{lj} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j}. \tag{12}$$

Это правило годится для любой, не обязательно ортогональной, системы координат.

В случае ортогональной системы координат желательно выписать не просто компоненты в новом базисе, а в нормированном базисе. Для этого надо разделить на коэффициенты Ламе. Поскольку при нормировке мы делили вектор на коэффициенты Ламе, для компенсации этого действия координаты (коэффициенты) должны умножить на эти коэффициенты. Если система ортогональна, то ее матрица Грама диагональна, обратная к ней тоже диагональна и на диагонали у нее будут стоять квадраты коэффициентов Ламе в минус первой степени. Исходя из сказанного, имеем

$$(\mathrm{grad}\, \hat{f})^l = H_l \frac{1}{H_l^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^l} = \frac{1}{H_l} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^l}. \tag{13}$$

Здесь

$$(g^{lj}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{H_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_2^2} & 0 \\ 9 & 0 & \frac{1}{H_3^2} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Тем самым в (12) умножение на матрицу сводится к умножению на диагональные элементы и суммирование по j уходит. Стало быть, в новой ортонормированной системе координат

$$(\mathrm{grad}\, \hat{f})^l = \frac{1}{H_l} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^l}. \tag{15}$$

Из (15) видно, что в общем случае градиент не является вектором, составленным из частных производных, требуется еще разделить на коэффициенты Ламе.

В частности, в двумерном случае для полярных координат

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r}\hat{e}_\varphi \tag{16}$$

(крышка над вектором показывает, что он нормирован), в трехмерном для сферических

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\frac{1}{r}\hat{e}_\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\frac{1}{r\sin\varphi}\hat{e}_\varphi. \tag{17}$$

Для цилиндрической системы надо взять полярную и приписать последний вектор.

То же самое можно проделать с ротором и дивергенцией. В чем особенности соответствующих действий? Вспомним, что при выражении градиента мы брали функцию, получали векторное поле и потом его преобразовывали. А когда будем считать дивергенцию в новых координатах, сначала должны будем получить компоненты векторного поля в новых координатах, вернуть их в старые, там провести дифференцирование и сложить. Но поскольку сначала надо перейти к старым координатам и затем дифференцировать, там матрицы Якоби, которые у нас сложились замечательно и дали метрический тензор, стоят по разные стороны от производных и складываются с некоторым трудом. А с ротором дело совсем плохо — он берет векторное поле и возвращает тоже векторное поле, т. е. получаете компоненты вектора в новой системе координат, возвращаете их в старую, там считаете эту длинную конструкцию, а затем возвращаете ее в новые координаты. Получается очень громоздкий переход. Есть способ сделать это удобно и красиво, а именно через дифференциальные формы, поскольку градиент, ротор и дивергенция представляют собой дифференциал дифференциальной формы в конкретных случаях. Но это тоже не очень прозрачно, и мы этого делать не будем. На эту тему можно прочесть либо у В. И. Арнольда в книге «Математические методы классической механики» либо в учебнике В. А. Зорича «Математический анализ».

Ограничимся записью соответствующих формул.

Ротор в ортогональных координатах. Пусть F — векторное поле с координатами $\widehat{F}^j$ в новой системе координат, т. е.

$$F = \sum_j \widehat{F}^j \hat{h}_j. \tag{18}$$

Тогда

$$\operatorname{rot} F = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \hat{h}_1 & \dfrac{\partial}{\partial u^1} & H_1 \widehat{F}^1 \\ H_2 \hat{h}_2 & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & H_2 \widehat{F}^2 \\ H_3 \hat{h}_3 & \dfrac{\partial}{\partial u^3} & H_3 \widehat{F}^3 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Наблюдения такие. У градиента в результате преобразований внизу оказалась первая степень коэффициента Ламе. И здесь должно произойти то же самое. Видим, что перед определителем находится третья степень внизу и в самом определителе дважды первая степень вверху, и в итоге появится первая степень коэффициента Ламе внизу.

Дивергенция в ортогональных координатах. В указанных выше обозначениях

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} (H_2 H_3 \widehat{F}^1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (H_3 H_1 \widehat{F}^2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (H_1 H_2 \widehat{F}^3) \right) \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_j} \widehat{F}^j \right). \end{aligned} \tag{20}$$

В каждом конкретном случае берете коэффициенты Ламе в данной системе координат, подставляете и записываете.

Запишем дивергенцию в сферической системе координат. Имеем

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\theta \widehat{F}^1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin\theta \widehat{F}^2) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \widehat{F}^3) \right). \tag{21}$$

В формуле (21) можно провести небольшие упрощения, но это можно проделать по желанию. Как видно, получилось довольно громоздкое выражение, так что использовать дивергенцию в сферической системе имеет смысл в случае, когда поле в ней выглядит как-то удачно, например когда у поля есть только радиальная компонента, а остальные нулевые, тогда выражение существенно упрощается.

Оператор Лапласа в ортогональной системе координат. Имеем

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Каждую из операций div и grad можно записать в криволинейных координатах, и если мы проделаем это, то получим запись оператора

Лапласа в криволинейных координатах:

$$\Delta\tilde{f}(u) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_j}\frac{1}{H_j}\frac{\partial\tilde{f}(u)}{\partial u^j}\right)$$
$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_j^2}\frac{\partial}{\partial u^j}\tilde{f}(u)\right). \qquad (22)$$

Заметим, что здесь нет смешанных частных производных. Первые производные будут, ибо кое-где берутся производные от произведения, а вот смешанных не будет, потому что система координат ортогональна и рассматривается оператор Лапласа, не содержащий смешанных производных. Такого уже не будет, если система координат не ортогональна или если считаем не оператор Лапласа, а какую-то комбинацию вторых частных производных, тогда обязательно появятся смешанные производные.

В качестве примера запишем оператор Лапласа в полярных координатах. В них коэффициенты Ламе $H_1 = 1$, $H_r = r$. Имеем

$$\Delta\tilde{f}(r,\varphi) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\tilde{f}\right)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\tilde{f}. \qquad (23)$$

Получили то же выражение, которое получали ранее другим путем.