3. Ограниченность и точные границы

3.1. Ограниченные и неограниченные множества. Символом $\mathbb{R}$ обозначают множество вещественных чисел, а через $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенную числовую прямую, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; для краткости, если нет опасности недоразумений, вместо $+\infty$ будем писать просто ∞.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называют *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует такое число C, что для любого $x \in A$ выполнено неравенство $x \leqslant C$ (соответственно $x \geqslant C$).

Число $b \in \mathbb{R}$ называют *верхней* (*нижней*) *границей* множества $A \subset \mathbb{R}$, если $(\forall x \in A)$ $x \leqslant b$ (соответственно $(\forall x \in A)$ $x \geqslant b$ (рис. 1.3). С использованием кванторов ограниченность сверху (снизу) выражается так:

$$(\exists C \forall x \in A) \quad x \leqslant C \tag{1}$$

(соответственно

$$(\exists C \forall x \in A) \quad x \geqslant C. \tag{2}$$

Можно сказать, что множество ограничено сверху (снизу), если множество его верхних (нижних) границ непусто.

Множество в $\mathbb{R}$ называют *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу. Ограниченность множества $A \subset \mathbb{R}$ можно описать так:

$$(\exists C > 0 \forall x \in A) \quad |x| \leqslant C. \tag{3}$$

Если множество не обладает свойством ограниченности сверху или снизу, его называют неограниченным соответственно сверху или снизу. Обращаясь к отрицанию высказываний (1)–(3), можно описать неограниченность сверху, снизу и двустороннюю:

$$(\forall C \exists x \in A) \quad x > C,$$

$$(\forall C \exists x \in A) \quad x < C,$$

$$(\forall C \exists x \in A) \quad |x| > C.$$

Наименьшую из верхних границ множества A называют его *точной верхней границей* и обозначают через $\sup A$ (читается «супремум A»). Двойственным образом определяют точную нижнюю границу $\inf A$ множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ как наибольшую из его нижних границ (читается «инфимум A»).

Утверждение. *Каждое подмножество в $\overline{\mathbb{R}}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы. Если при этом $A \subset \mathbb{R}$ непусто и ограничено*

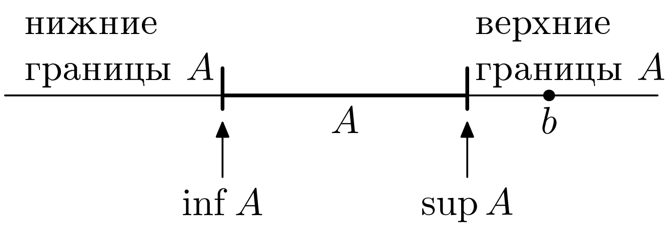

Рис. 1.3.

сверху (*снизу*) *(в* $\mathbb{R}$*), то* $\sup A \in \mathbb{R}$ ($\inf A \in \mathbb{R}$), *так что такое множество* A *имеет точную верхнюю* (*нижнюю*) *границу в* $\mathbb{R}$. Для неограниченного сверху (снизу) множества A будет $\sup A = +\infty$ (соответственно $\inf A = -\infty$).

Согласно определению точных границ для доказательства, например, равенства $\sup A = a$, в котором сообщается, что стоящее в правой его части число a является точной верхней границей множества A, надо проверить два свойства:

1) a — верхняя граница A, т. е.

$$(\forall x \in A) \quad x \leqslant a;$$

2) граница a наименьшая, иначе говоря, если b — какая-либо граница A, то a ее не больше, т. е.

$$\text{если } (\forall x \in A)\ x \leqslant b, \text{ то } a \leqslant b.$$

Аналогичное можно сказать и о равенстве $\inf A = a$.

Если A — непустое ограниченное сверху множество в $\mathbb{R}$, то равенство $\sup A = a$ равносильно тому, что

1) a — верхняя граница A;

2) любое число $b < a$ уже не является верхней границей множества A, т. е.

$$(\forall b < a \exists x \in A) \quad x > b.$$

Свойство 2 можно сформулировать в терминах отклонения числа b от границы a, и это выглядит так:

2$'$) для любого $\varepsilon > 0$ смещение от a вниз на ε не является верхней границей A, т. е.

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A) \quad x > a - \varepsilon.$$

Пример 1. Докажем, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ и для любого числа $\lambda \geq 0$ справедливо равенство

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A$$

(здесь $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$).

Если $\lambda = 0$, утверждение очевидно. Будем считать, что $\lambda \neq 0$.

Обозначим $a = \sup A$. Требуется доказать, что λa — точная верхняя граница множества λA. Как указано выше, для этого надо проверить, что λa — верхняя граница и что сдвиг вниз на произвольное $\varepsilon > 0$ уже не будет верхней границей. На чем основывать проверку? Разумеется, на данных в условии свойствах. Так как $a = \sup A$, число a — верхняя граница множества A, стало быть, $(\forall x \in A)\ x \leqslant a$. Умножив неравенство на положительное число, получаем, что $(\forall x \in A)\ \lambda x \leqslant \lambda a$, так что λa — верхняя граница.

Проверим второе свойство. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Надо подобрать такое $x \in A$, что $\lambda x > \lambda a - \varepsilon$. Запишем последнее неравенство, изолировав в нем x: $x > a - \frac{\varepsilon}{\lambda}$, и вновь воспользуемся условием, согласно которому для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $x \in A$, что $x > a - \varepsilon_1$. Взяв в качестве ε_1 число $\frac{\varepsilon}{\lambda}$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ есть такое $x \in A$, что $x > a - \frac{\varepsilon}{\lambda}$, это и требовалось.

Упражнения.

1. Доказать, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ и для любого числа $\lambda \geq 0$ справедливо равенство

$$\inf \lambda A = \lambda \inf A.$$

2. Доказать, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

3. Доказать, что для любых непустых ограниченных множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(здесь $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$).

4. Положим $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$. Показать, что

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = y + (x - y)^+ = x + (y - x)^+,$$

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = y - (x - y)^- = x - (y - x)^-,$$

где $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$ соответственно наибольшее и наименьшее из чисел x, y.

Определение. Говорят, что функция f *ограничена* (*сверху, снизу, с двух сторон*) *на множестве* X, если образ $f[X]$ является ограниченным сверху, снизу, с двух сторон.

Определение. Функцию, определенную на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, называют *последовательностью.*

Точной верхней (нижней) границей последовательности $\{x_n\}$ называют соответствующую точную границу множества ее элементов, т. е. множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Остановимся на исследовании и обосновании ограниченности или неограниченности функций или последовательностей. Приведем несколько рекомендаций по установлению указанных свойств.

Ограниченность. Будем вести речь об ограниченности сверху, для ограниченности снизу и с обеих сторон рассуждения аналогичны.

Для доказательства ограниченности сверху функции $f(x)$ на множестве X требуется обосновать существование такого числа C, что для любого $x \in X$ выполнено $f(x) \leqslant C$. Гарантию наличия верхней границы можно получить на основе свойств множества значений элементарных функций. Например, если $f(x) = h(g(x))$ и h ограничена сверху, то независимо от функции g композиция $h(g(x))$ ограничена сверху (на соответствующем множестве).

Можно прибегнуть к такому рассуждению. Попробуем ограничить сверху функцию $f(x)$ более простой функцией, для которой требуемую верхнюю границу можно получить из каких-то соображений. Если не удается это сделать сразу, то можно новую, ограничивающую сверху функцию, в свою очередь также ограничить сверху более простой функцией, для которой больше шансов подобрать границу, и так далее до тех пор, пока не появится реальная возможность установить верхнюю границу очередной функции. Если такая возможность появилась, верхняя граница последней функции будет верхней границей исходной.

Можно записать требуемое неравенство $f(x) \leqslant C$ и, намечая действовать по определению, озаботиться тем, есть ли такие C, при которых это неравенство выполнено для всех x из данного множества X.

Есть и другие средства изучения ограниченности, но они связаны с техникой, которую предстоит освоить в дальнейшем, поэтому здесь на применении такой техники останавливаться не будем.

Неограниченность. Здесь ситуация совсем иная по сравнению с ограниченностью. Судя по тому, что первым в определении неограниченности стоит квантор общности, при обосновании неограниченности (сверху) нам предстоит, ориентируясь на неизвестное нам число C, пытаться сформировать правило поиска элемента $x \in X$ такого, что $f(x) > C$. Здесь полезно ограничивать $f(x)$ снизу чем-то более простым, но все еще большим, т. е. таким выражением, для которого есть надежда подобрать требуемое число x. Разумеется, при этом надо использовать всю имеющуюся информацию о неограниченности элементарных функций.

Пример 1. Докажем ограниченность сверху функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

на множестве $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$.

Начнем рассуждать, например, так. Чтобы ограничить дробь сверху (числитель по условию неотрицателен), можно ограничить знаменатель снизу и взять такую функцию, где числитель остается прежним, а в знаменателе стоит оценка исходного знаменателя снизу. Ясно, что $x^2+1 \geqslant 1$, поэтому

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant x, \quad x \geqslant 0.$$

Мы ограничили сверху нашу функцию другой функцией, ясно проще зависящей от x. Теперь бы ограничить полученную функцию сверху, но, судя по ее виду, нам это сделать не удастся — мы можем брать сколь угодно большие значения x, так что подобрать постоянную не удастся. Можно ли сделать вывод о том, что и наша функция не ограниченная? Нет, можно лишь сделать вывод о том, что предложенный нами путь не привел к успеху. Выходит, рассуждения были слишком простыми, а предложенная оценка слишком грубой.

Посмотрим, в каком месте числовой прямой могут возникнуть проблемы с ограниченностью и по какой причине? Ясно, что проблемы могут быть в связи с возрастанием числителя. Однако и знаменатель при этом также будет возрастать, причем более быстрыми темпами. Уберем эффект возрастания числителя, считая $x > 0$ (это не отразится на доказательстве ограниченности сверху — ведь при $x = 0$ вся дробь равна нулю). Для этого разделим числитель и знаменатель на x:

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1/x}.$$

Теперь числитель ограничен (более того, там стоит постоянная). Можно ли ограничить знаменатель снизу и чем? Воспользуемся известной оценкой

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

для $x > 0$. Заменяя знаменатель меньшей величиной, можно утверждать, что

$$\frac{1}{x + 1/x} \leqslant \frac{1}{2} \text{ для любого } x > 0,$$

и доказательство ограниченности закончено — мы нашли постоянную, обеспечивающую оценку из определения ограниченности сверху для любого $x \geqslant 0$.

Можно рассудить иначе. Заметим, что если $x \in [0, 1]$, то, последовательно ограничивая числитель сверху, а знаменатель снизу, имеем

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1.$$

Если же $x > 1$, то, ограничивая знаменатель снизу, мы ограничиваем всю дробь сверху, т. е. удаление единицы в знаменателе дает оценку

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

что не больше единицы при рассматриваемых x. Таким образом, при любом $x \geqslant 0$ имеем $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant 1$.

Пример 2. Докажем ограниченность функции $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

Рассудим, например, так. Надо подобрать такое C, что

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant C$$

для любого $x \in \mathbb{R}$ (заметим, что функция определена всюду). Начнем выражать x через C, т. е. решать неравенство с параметром C, и анализировать, есть ли такие C, при которых множество решений этого неравенства совпадает с $\mathbb{R}$. Имеем

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant C \Longleftrightarrow x^2+x+1 \leqslant C(x^2+1) \Longleftrightarrow (C-1)x^2 - x + C - 1 \geqslant 0.$$

Для выполнения этого неравенства при любом x надо, во-первых, взять $C > 1$, а во-вторых, обеспечить отрицательность дискриминанта квадратичной функции в левой части неравенства, т. е. неравенство $4(C-1)^2 > 1$, что имеет место например при $C = 2$. Таким образом, гарантируется, что $f(x) \leqslant 2$, тем самым функция ограничена сверху. Ограниченность снизу очевидна хотя бы потому, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Обоснование ограниченности функции f можно свести к ограниченности функции из примера 1, если представить функцию в виде

$$f(x) = 1 + \frac{x}{x^2+1}.$$

Пример 3. Докажем ограниченность функции $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ на множестве $[1, +\infty)$.

Воспользуемся мелкой хитростью, а именно умножим и одновременно разделим выражение $x - \sqrt{x^2-1}$ на $x + \sqrt{x^2-1}$:

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Уменьшим знаменатель, удалив из него неотрицательное слагаемое $\sqrt{x^2-1}$. Этим действием мы увеличим дробь, т. е.

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$$

на заданном множестве $[1, +\infty)$. Остается заметить, что $f(x) \geqslant 0$, так что f ограничена снизу.

Пример 4. Докажем неограниченность функции $f(x) = x\cos x$.

Будем доказывать неограниченность сверху. Начнем с традиционного «пусть дано произвольное C». Теперь посмотрим на функцию и задумаемся, за счет какого ее фрагмента и в какой части области определения есть шанс найти требуемое x? Ясно, что множитель $\cos x$ ограничен, так что от него лучше бы избавиться, а вот множитель x может дать желаемое значение x. Ограничить снизу все произведение затруднительно — функция $\cos x$ устроена так, что она периодически возвращается к значению 0. Поэтому надо брать такие значения x, на которых $\cos x \neq 0$, лучше всего такие значения, на которых $\cos x = 1$. Это числа вида $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если брать только такие x, то тогда

$$f(x) = f(2\pi n) = 2\pi n,$$

и вопрос встал такой: для произвольного C подобрать $n \in \mathbb{Z}$ такое, что
$$2\pi n > C.$$
Решая это неравенство относительно n, находим, что можно взять любое целое n, удовлетворяющее неравенству
$$n > \frac{C}{2\pi}.$$
Например, можно взять $n = [C/(2\pi)]+1$, где квадратные скобки означают целую часть (взятие целой части дает натуральное число, которое может быть меньше чем n, но ненамного, и добавление 1 приведет уже к целому числу, обладающему требуемым свойством).

Правило выбора требуемого x по заданному C сформировано, и этим неограниченность функции f доказана.

Мы доказали неограниченность функции $x \cos x$ сверху, ясно, что она будет и неограниченной снизу.

Пример 5. Докажем ограниченность последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Запишем сумму подробно, без применения символа суммирования:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)},$$
и обратим внимание на легко проверяемое равенство $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Применим его к каждому из слагаемых в сумме:
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$$
Ограниченность сверху доказана, ограниченность снизу очевидна, так как все члены последовательности положительны.

Пример 6. Докажем ограниченность последовательности
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Обратим внимание на то, что

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

стало быть,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k},$$

и остается воспользоваться результатом предыдущего примера.

Упражнения.

1. Доказать ограниченность следующих функций:

(1) $x - \sqrt[3]{x^3 - 1}$, (2) $\dfrac{x^2 + \sin(x+1)}{1 + x^2}$, (3) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

2. Выяснить, ограничены ли следующие функции:

(1) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x + 1}$, (2) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 1}$.

3. Доказать ограниченность последовательностей

(1) $\dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$, (2) $\dfrac{n + (-1)^n}{2n - 1}$, (3) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}$, (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

4. Доказать неограниченность функций и последовательностей

(1) $x \sin x$, (2) $1/\cos x$, (3) $\dfrac{2^n}{n^2}$, (4) $\dfrac{a^n}{n}$, $a > 1$.