

§ 2. Предел последовательности

2.1. Пусть даны последовательность x_n и число a . Договоримся о том, как математически выразить интуитивно ясное представление о том, что последовательность x_n неограниченно приближается к числу a , т. е. значения x_n при неограниченном увеличении n становятся всё ближе и ближе к a

Сначала обратимся к геометрической поддержке. Так как *последовательность* — это функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для ее геометрического представления можно использовать график как множество всех упорядоченных пар (n, x_n) на координатной плоскости. Правда, в этом случае сплошной линии, как у графиков обычных функций, не получится, а будет «пунктирное» множество, но это обстоятельство не должно нас смущать.

Изобразим координатную плоскость, на которой по оси абсцисс отметим натуральные $n = 1, 2, \dots$ и над каждой отмеченной точкой на высоте x_n поместим в виде точки значение x_n последовательности. На оси ординат отметим точку a (рис. 1).

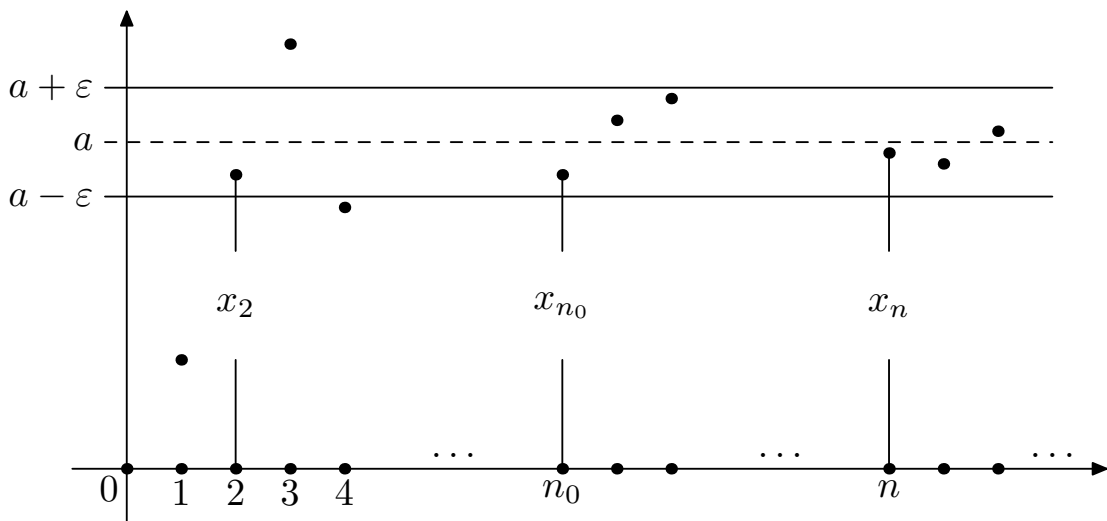


Рис. 1

Поскольку нас интересует неограниченное приближение x_n к a «в перспективе», при далеких номерах n , расположение последовательности при начальных номерах нас не интересует. Представим себе, что есть два участника договоренности: **Вы** и **Я**. Вы намерены убедить меня в том, что последовательность x_n неограниченно приближается к a , и если удастся это сделать, то мы вместе назовем это обстоятельство выражениями « a есть *предел* последовательности x_n »

или «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a » (последние выражения не следует понимать буквально, это термины, которые означают лишь то, что за ними кроется).

Так как Вы убеждаете меня в неограниченном приближении, Я, естественно, должен проверять, насколько значения x_n отличаются от величины a , для чего приготовлю число, которым буду измерять точность приближения, или, иначе говоря, степень отклонения x_n от a . Естественно, число должно быть положительным. Я буду обозначать его греческой буквой ε . Согласно договору приближение должно быть неограниченным, т. е. надо гарантировать невозможность вставить границу между значениями x_n с далекими номерами и числом a . Это можно гарантировать, например, такой процедурой. Я буду предлагать Вам какое-то, неизвестное Вам заранее значение $\varepsilon > 0$, а от Вас буду ожидать, что Вы обеспечите отклонение x_n от a в пределах заданной точности ε для всех далеких номеров n , т. е. сумеете найти такой номер n_0 , что для всех номеров $n \geq n_0$ отклонение x_n от a будет в пределах от $-\varepsilon$ до ε . Последнее можно выразить так: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, или так: $|x_n - a| < \varepsilon$. Обратившись к рис. 1, об этом можно сказать так: Вы обеспечите такой номер n_0 , что для всех n , лежащих правее от этого номера, отмеченные на высоте x_n точки, изображающие элементы последовательности, окажутся в полосе между горизонтальными линиями, проведенными на высотах $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. Если Вы не можете обеспечить отклонение x_n от a в пределах заданной мной точности $\varepsilon > 0$ для всех далеких номеров n , то Я не готов согласиться с тем, что x_n неограниченно приближается к a .

Сформулируем договоренность в математических терминах.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ будем называть *пределом последовательности* x_n , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, при этом будем использовать обозначение $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Часть обозначения вида $n \rightarrow \infty$ подчеркивает, что мы оцениваем близость x_n к a при неограниченном возрастании номеров n . Часто в этом случае говорят «при n , стремящемся к бесконечности». Заметим однако, что каждое число находится на своем месте и никуда не стремится, тем самым эту фразу не следует воспринимать буквально. Это всего лишь фрагмент термина, за которым скрывается определенное содержание. Поскольку ни при каких других обстоятельствах мы оценивать отклонение x_n от a не будем, в обозначениях часть $n \rightarrow \infty$ иногда (даже, скорее всего, всегда, если достаточно ясно, по какой

переменной происходит переход к пределу) будем опускать и писать просто $a = \lim x_n$.

Тот факт, что $a = \lim x_n$, выражают также словами «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a » и записывают $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ или, короче, $x_n \rightarrow a$.

Если последовательность имеет (конечный) предел, то ее называют *сходящейся*.

Обсудим, как доказывать тот факт, что $a = \lim x_n$, и выработаем признак конца доказательства. Поскольку конструкция предела последовательности похожа на конструкцию неограниченности функции, ясно, что и обсуждение будет аналогичным рассмотрению свойства неограниченности.

Поскольку здесь есть внешнее, от нас не зависящее требование $\forall \varepsilon > 0$, мы должны выработать **правило поиска** требуемого далее значения $n_0 \in \mathbb{N}$ в зависимости от какого-то нам неизвестного значения ε . Рассуждение, посвященное подбору n_0 , надо начинать, например, так: пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Этим мы подчеркиваем, что готовы к выработке правила. После этого надо пойти в конец и посмотреть, что от нас ожидают. А от нас ожидают, что мы для произвольного $n \geq n_0$ гарантируем оценку $|x_n - a| < \varepsilon$, где n_0 нам предстоит указать.

Для выбора номера n_0 , начиная с которого будет выполнена требуемая оценка, попробуем *ограничить сверху разность $|x_n - a|$ чем-то более простым, но все еще малым*. Иначе говоря, попробуем подобрать такую последовательность a_n , что $|x_n - a| \leq a_n$ и есть шанс подобрать по заданному $\varepsilon > 0$ номер n_0 для последовательности a_n так, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. Если ясно, как это сделать, то найденный номер n_0 подойдет и для разности $|x_n - a|$ — она ведь не больше чем a_n и тем более будет меньше чем ε . Если еще недостаточно видно, как подобрать номер для последовательности a_n , то, в свою очередь, можно попробовать ограничить ее другой последовательностью, более простой, но все еще малой. И так продолжать процесс до тех пор, пока не появится последовательность, для которой требуемый номер найти уже легко. Как только нам удастся выработать правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$, доказательство закончится.

Можно рассуждать несколько иначе. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Обратимся к тому, что от нас потребуется. Мы должны обеспечить выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех достаточно далеких номеров n . Поставим вопрос: откуда можно получить выполнение такого нера-

венства? Иначе говоря, из какого соотношения это неравенство вытекает? Если взять последовательность a_n такую, что $|x_n - a| \leq a_n$, и найти номер n_0 такой, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, то для этих же номеров n будет выполнено и требуемое неравенство. Если для последовательности a_n выбор номера затруднен, то процесс можно продолжить и вновь обратиться к вопросу: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Ответ на него может привести к другой последовательности, и так следует продолжать процесс до тех пор, пока не найдется такая последовательность, для которой выбор номера тривиален.

Эти рассуждения относятся, скорее, к доказательству равенства $a = \lim x_n$ для конкретной последовательности x_n . Отчасти их можно применять и тогда, когда речь идет о доказательстве утверждений с участием предела. Однако если для конкретной последовательности выбор номера обеспечивается ограничением сверху какими-то также конкретными последовательностями, то в утверждениях выбор требуемого номера, как правило, обеспечивается ограничениями сверху, исходящими из предельных свойств, данных в условии.

Пример 1. Докажем, что

$$\lim \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} = 0. \quad (2.7)$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Пойдем в конец определения предела последовательности и посмотрим, что от нас будут ожидать. От нас требуется обеспечить выполнение неравенства

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| < \varepsilon$$

для всех далеких номеров. Попробуем ограничить левую часть последнего неравенства сверху чем-то более простым, но все еще малым. Заметив, что $|\sin n^2| \leq 1$, имеем

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^4 + 1}.$$

Легко ли подобрать требуемый номер, исходя из новой последовательности, т. е. насколько легко выразить n через ε из неравенства

$$\frac{n}{n^4 + 1} < \varepsilon?$$

По-видимому, не столь легко, сколь хотелось бы. Поэтому попробуем ограничить выражение $\frac{n}{n^4 + 1}$ сверху сверху чем-то более простым, но все еще малым. Уменьшив знаменатель, мы увеличим дробь, поэтому

$$\frac{n}{n^4 + 1} \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Легко ли выразить n через ε из неравенства $\frac{1}{n^3} < \varepsilon$? Легко. Можно выразить, а можно еще облегчить выражение, если заметить, что $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n}$, а из неравенства $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выразить n через ε совсем легко.

Последнее неравенство равносильно тому, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и в качестве требуемого номера n_0 можно взять любое натуральное число, большее чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Например, можно взять $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, где взятие целой части (символизируют квадратные скобки) «обнатурализует» дробь $\frac{1}{\varepsilon}$, при этом, возможно, немного уменьшая ее, а добавление единицы делает результат бóльшим, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Если $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, то для любого $n \geq n_0$ тем более $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а тогда, пользуясь логикой предыдущих рассуждений, можно гарантировать, что для таких номеров также

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4 + 1} \right| < \varepsilon.$$

Правило выбора требуемого номера n_0 по заданному ε сформировано, значит, соотношение (2.7) доказано.

Покажем, как происходит выбор номера в доказательствах утверждений, связанных с пределом. Для этого сформулируем и докажем теорему о пределе произведения двух сходящихся последовательностей.

Пример 2. Теорема о произведении двух сходящихся последовательностей. Пусть последовательности x_n и y_n сходятся и

$$a = \lim x_n, \quad b = \lim y_n.$$

Тогда последовательность $x_n y_n$, представляющая собой произведение данных последовательностей, также сходится и при этом

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Коротко об утверждении этой теоремы говорят так: *предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов.*

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность $|x_n y_n - ab|$ с целью выработать такое правило выбора номера n_0 , зависящего, разумеется, от ε , что для всех следующих за ним номеров n будет $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$.

Ясно, что без использования условия нам не обойтись. Что же нам дано в условии? Распишем по определению данные в условии предельные соотношения:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists n_1 \forall n \geq n_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon_1, \quad (2.8)$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists n_2 \forall n \geq n_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon_2. \quad (2.9)$$

Обратим внимание на то, что утверждения (2.8) и (2.9) нам даны по условию, поэтому величины ε_1 и ε_2 мы можем выбирать по нашему усмотрению и использовать гарантируемые числа n_1, n_2 в наших целях.

Для использования утверждений (2.8), (2.9) надо оценить сверху разность $|x_n y_n - ab|$ так, чтобы участвовали разности $|x_n - a|$ и $|y_n - b|$. Затем, беря ε_1 и ε_2 в зависимости от данного $\varepsilon > 0$, с учетом проводимых оценок получим сначала номера n_1 и n_2 , а затем на их основе обеспечим требуемый номер n_0 для разности $|x_n y_n - ab|$.

Воспользуемся мощным методом доказательства, заключающемся в прибавлении нуля. Это безопасная операция, так как она ничего не изменяет. Конечно, нуль прибавлять будем не просто так, а в виде добавления к разности $x_n y_n - ab$ какого-то выражения и одновременного его вычитания. Успех применения метода зависит от подбора добавляемого и вычитаемого выражения. Нам хотелось связать нашу разность с теми разностями, о которых говорится в условии, т. е. с разностями $x_n - a$ и $y_n - b$. Поэтому неудивительно, что мы добавим к разности $x_n y_n - ab$ и отнимем от нее, например, выражение ay_n (или bx_n). Производя нехитрые действия и пользуясь неравенством треугольника, получим

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \\ &\leq |x_n y_n - ay_n| + |ay_n - ab| \\ &= |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Итак, мы ограничили нашу разность сверху чем-то более связанным с условием, чем сама разность. Займемся правой частью неравенства. Чтобы сумму сделать меньшей чем ε , достаточно сделать каждое из слагаемых, например, меньшим чем $\varepsilon/2$.

Первое слагаемое представляет собой произведение $|x_n - a||y_n|$, из множителей которого первый можно сделать сколь угодно малым. Проведем процедуру, показывающую, как учесть наличие второго множителя. Так как $\lim y_n = b$, имеет место высказывание (2.9), взяв в котором в качестве ε_2 , например, число 1 (мы можем это сделать, ибо (2.9) нам дано по условию), получим существование такого номера n' , что $|y_n - b| < 1$ для любого $n \geq n'$, откуда, вновь используя прибавление нуля, получаем, что

$$|y_n| = |y_n - b + b| \leq |y_n - b| + |b| < 1 + |b|$$

для любого $n \geq n'$.

Мы подготовились к выработке правила выбора номера, начиная с которого первое слагаемое будет меньше чем $\varepsilon/2$. Поскольку высказывание (2.8) нам дано по условию, мы вправе выбрать в нем в качестве ε_1 любое положительное число. Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}$. Тогда согласно (2.8) существует номер n_1 такой, что $n_1 \geq n'$ и для любого $n \geq n_1$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}. \quad (2.11)$$

Перейдем ко второму слагаемому. С ним дело обстоит проще, чем с первым, так как в нем множитель при модуле разности постоянен. Если $a = 0$, то второе слагаемое равно нулю и заведомо меньше чем $\varepsilon/2$ при любом n . Пусть $a \neq 0$. Высказывание (2.9), в котором в качестве ε_2 возьмем величину $\frac{\varepsilon}{2|a|}$, гарантирует наличие номера n_2 такого, что для любого $n \geq n_2$ будет

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}. \quad (2.12)$$

Если в качестве номера n_0 взять наибольший из номеров n_1, n_2 , т. е. положить $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то для $n \geq n_0$ выполнены одновременно соотношения (2.11) и (2.12). Следовательно, для любого $n \geq n_0$ (считая $a \neq 0$, для $a = 0$ ситуация только упрощается) имеем

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &\leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b| \\ &\leq |y_n| \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)} + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$ выработано, значит, утверждение доказано.

2.3. Задачи.

1. Доказать равенства

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} &= 1, & (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} &= 0, \\ (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin n!}{(n+1)^3} &= 0, & (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} &= 1. \end{aligned}$$

2. Доказать равенства

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} &= 0, & (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} &= 0, \\ (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} &= 0, \quad a > 1, & (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} &= 0, \quad a > 1, \quad k \in \mathbb{R}, \\ (5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1, \quad a > 0, & (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n &= 0, \quad |q| < 1, \\ (7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1, & (8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} &= 0, & (9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} &= 0. \end{aligned}$$

3*. Доказать, что если последовательность x_n сходится, то последовательность средних арифметических $a_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ также сходится, при этом $\lim a_n = \lim x_n$. Обратное неверно.

2.4. Говорят, что предел последовательности x_n равен $+\infty$ или $-\infty$, или ∞ и пишут соответственно $\lim x_n = +\infty$, $\lim x_n = -\infty$, $\lim x_n = \infty$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad x_n > \varepsilon \quad (\text{соответственно } x_n < -\varepsilon, \quad |x_n| > \varepsilon).$$

О последовательности с бесконечным пределом говорят, что она *бесконечно большая*. Если последовательность имеет конечный предел, ее называют *сходящейся*. Если $\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, то говорят, что последовательность *имеет предел* (в $\overline{\mathbb{R}}$).

2.5. Задачи.

1. Доказать, что последовательность $x_n = n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$ неограниченная, но не является бесконечно большой.

2. Доказать, что

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\log_a n)^p &= +\infty, \quad a > 1, \quad p \geq 1; \\ (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n}) &= +\infty; \\ (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (4\sqrt{n} - n) &= -\infty; & (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \sqrt[n]{n}} &= -\infty. \end{aligned}$$

2.8. Как можно заметить, в определении предела участвует само значение предела. Однако бывает важно всего лишь знать, сходится последовательность или нет. Сформулированный ниже критерий дает принципиальную возможность судить о сходимости числовой последовательности, не прибегая к значению ее предела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность x_n называют *фундаментальной*, или *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall m > n_0 \forall n > n_0) \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Условие фундаментальности иногда удобно использовать в следующем виде:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n > n_0 \forall p \geq 0) \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Критерий Коши. Для существования конечного предела числовой последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

2.9. Задачи.

1. Используя критерий Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n, \quad |a_k| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, \quad |q| < 1; \quad (1)$$

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}; \quad (2)$$

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}; \quad (3)$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}. \quad (4)$$

2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

2.10. Пусть x_n — последовательность, а n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т. е. $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Последовательность $y_k = x_{n_k}$, т. е. композицию данной последовательности и строго возрастающей последовательности номеров, называют *подпоследовательностью последовательности* x_n .

Если какая-то подпоследовательность последовательности имеет предел, его называют *частичным пределом* данной последовательности.

Теорема. Из всякой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую предел (в $\overline{\mathbb{R}}$). Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Среди всех частичных пределов последовательности x_n есть наибольший и наименьший (возможно, бесконечные). Их называют соответственно *верхним* и *нижним пределами* последовательности x_n и обозначают соответственно через $\overline{\lim} x_n$ (или $\limsup x_n$) и $\underline{\lim} x_n$ (или $\liminf x_n$).

2.11. Задачи.

1. Найти частичные пределы, а также верхний и нижний пределы последовательностей

$$(1) x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}, \quad (2) x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right),$$

$$(3) x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}, \quad (4) x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}.$$

2. Построить последовательность, имеющую частичными пределами данные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$.

3. Построить последовательность, имеющую частичными пределами данные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

§ 3. Предел функции

3.1. Возьмем точку p в расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ и определим понятие окрестности такой точки. Если $p \in \mathbb{R}$, т. е. точка p конечна, то окрестностью ее будем считать любой промежуток вида $(p-r, p+r)$, где $r > 0$. Если же $p = +\infty$, то окрестностью будет считать любой промежуток $(r, +\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, для $p = -\infty$ — промежуток $[-\infty, r)$, $r \in \mathbb{R}$, и окрестностями «беззнаковой» бесконечности будем считать множества $\{x \in \mathbb{R} : |x| > r\}$, $r > 0$.

Точку p называют *предельной точкой* множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если в любой ее окрестности есть точка множества X , отличная от p . Говоря о пределе функции в точке, мы всегда, не оговаривая каждый раз, будем предполагать, что эта точка предельная для области определения функции.

Пусть даны функция f и точка a , предельная точка области ее определения.

Определение. Число $l \in \overline{\mathbb{R}}$ называют *пределом функции* $f(x)$ в точке a , если для любой окрестности U точки l найдется окрестность V точки a такая, что для любого $x \in V \cap D(f)$, $x \neq a$, выполнено включение $f(x) \in U$. При этом используют такие обозначения: $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, и говорят, что l есть *предел* $f(x)$ при x , стремящемся к a , или что f *сходится* к l при x , стремящемся к a .

Используя определение окрестности конечной или бесконечной точки из $\overline{\mathbb{R}}$, можно дать символическое описание факта сходимости. Так, если $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, то соотношение $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

или

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, |x - a| < \delta, x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Теорема (определение предела функции с использованием предела последовательности). Пусть даны функция f и точка a , предельная точка области ее определения. Число $l \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке a в том и только в том случае, если для любой последовательности x_n из $D(f)$ такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l.$$

Сформулированный критерий бывает полезен при доказательстве отсутствия какого-либо предела у функции f в точке a : достаточно найти две последовательности x'_n, x''_n , удовлетворяющие указанным в теореме требованиям и такие, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x''_n)$.

3.2. Задача. Записать в терминах $\varepsilon - \delta$ следующие соотношения, в которых предполагается, что $a, l \in \mathbb{R}$:

- | | |
|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l,$ | (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l,$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$ | (4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty,$ | (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty,$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty,$ | (8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$ |

3.3. Говорят, что l есть *предел* $f(x)$ в точке a слева (или при x , стремящемся к a слева (справа), если для любой окрестности U

точки l можно указать такую окрестность V точки a , что для всех $x \in V$ таких, что $x < a$ (соответственно $x > a$) выполнено соотношение $f(x) \in U$. При этом используют обозначения $l = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, $l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ соответственно. О пределах слева и справа говорят как об *односторонних пределах*.

Для $a, l \in \mathbb{R}$ в терминах $\varepsilon - \delta$ понятия пределов слева и справа записываются соответственно так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, a - \delta < x < a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, a < x < a + \delta) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

3.4. Задача. В терминах $\varepsilon - \delta$ выписать следующие утверждения:

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, & (2) \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \\ (3) \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty, & (4) \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty. \end{array}$$

3.5. Приведем формулировки теорем о пределах, которые будут использованы ниже при нахождении пределов конкретных функций.

Теорема (о связи предела с арифметическими операциями). Пусть даны функции f, g , заданные на множестве X , и точка a , предельная точка множества X . Предположим, что существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Тогда существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$, а если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, то и предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x)$, при этом

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Теорема (о пределе композиции, или о замене переменной). Предположим, что существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = b$ в расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Предположим, что, кроме того, выполняется по крайней мере одно из условий

- (1) для x из некоторой окрестности точки a , $x \neq a$, будет $f(x) \neq l$,
- (2) точка l входит в область определения функции g и $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = g(l)$ (т. е. g непрерывна в точке l).

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = b$.

В случае выполнения условия (2) теоремы ее результат можно записать в виде $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$, т. е. знак предела можно внести внутрь функции g .

Применение теоремы о замене переменной обычно происходит следующим образом. Допустим, нам надо найти предел функции $h(x)$ при $x \rightarrow a$. Допустим, нам удалось так преобразовать данную функцию, что в ней оказался выделенным какой-то блок, который мы могли бы обозначить новой буквой, т. е. нам удастся представить функцию $h(x)$ в виде композиции $h(x) = g(f(x))$. Если мы теперь положим $y = f(x)$ и найдем, что выполнены условия теоремы о пределе композиции, т. е. существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, существует $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = b$, а также выполнены условия пунктов (1) или (2) теоремы, то результат ее гарантирует существование предела $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$, равного b . Иначе говоря, нахождение предела сложной функции эта теорема позволяет сводить к нахождению пределов более простых функций, ее составляющих.

Теорема (о пределе монотонной функции). Пусть функция f возрастает на множестве $(a - r, a) \cap D(f)$ или на множестве $(a, a + r) \cap D(f)$ при некотором $r > 0$. Тогда существуют соответственно

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D(f), x \in (a - r, a)\},$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D(f), x \in (a, a + r)\}.$$

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для убывающей вблизи точки a функции.

Теорема (о пределе произведения бесконечно малой на ограниченную). Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, а функция g ограничена в некоторой окрестности точки a . Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции в точке) Пусть даны функция f и точка a , предельная точка области ее определения. Для существования конечного предела функции f в точке a необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такую окрестность V точки a , что для любых $x', x'' \in V$ таких, что $x' \neq a$, $x'' \neq a$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3.6. При нахождении пределов мы будем использовать небольшой набор пределов, называемых обычно *замечательными пределами*. В

нем собраны пределы, отражающие предельные свойства основных элементарных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e, \quad (3.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (3.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (3.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \quad (3.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Кроме выписанных мы будем также использовать равенство, отражающее сравнительный рост показательной и степенной функций:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{для любых } a > 1, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Приступая к нахождению предела конкретной функции, в первую очередь надо поставить вопрос: как устроена функция? Если она получается из других функций как результат арифметических операций, т. е., например, это сумма или произведение конечного числа функций или частное двух функций, то надо обратиться к теоремам о связи предела и арифметических операций и проанализировать, выполнены ли их условия. Если это сложная функция, то надо посмотреть, выполнены ли условия теоремы о пределе композиции.

Если условия теорем выполнены, то надо воспользоваться их результатами и получить значение предела. Хуже, если какие-то условия этих теорем не выполнены. Так бывает, например, когда рассматривается предел отношения, но пределы знаменателя и числителя равны нулю или бесконечны. В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность соответствующего вида, например, вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, и при нахождении предела такую неопределенность надо «раскрыть», т. е. провести такие преобразования, которые привели бы к выполнению условий соответствующих теорем. Кроме указанных встречаются также неопределенности вида 0^0 , $0 \cdot \infty$, 1^∞ — это значит, что рассматриваются соответственно пределы $\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)}$ ($f(x) > 0$), $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot h(x)$, $\lim_{x \rightarrow p} l(x)^{h(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow p} h(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow p} l(x) = 1$. Для раскрытия первых двух полезно иметь в виду соотношение

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad f(x)h(x) = \frac{f(x)}{1/h(x)} = \frac{h(x)}{1/f(x)}.$$

В случае неопределенности вида 1^∞ можно обратиться к замечательному пределу (1) либо использовать равенство $a^b = e^{b \ln a}$.

Когда мы говорим о неопределенности какого-то вида, например, вида 1^∞ , не надо эту запись понимать буквально, как будто мы единицу возводим в бесконечную степень! Это всего лишь символическое (вводимое для удобства) обозначение того факта, что рассматривается предел вида $\lim_{x \rightarrow a} l(x)^{h(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow a} l(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \infty$.

При нахождении пределов мы будем использовать следующее легко устанавливаемое равенство:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow p} g(x) \ln f(x)},$$

если только $\lim_{x \rightarrow p} g(x) \ln f(x)$ существует (хотя бы бесконечный). В частности, если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = a^b. \quad (3.6)$$

Опишем технологию нахождения пределов с использованием замечательных пределов (3.1)–(3.5) и предела (*), дающего сравнение скорости роста (или убывания) степенной и показательной функций.

Сначала надо понять, каким из замечательных пределов, скорее всего, можно воспользоваться. Для этого отметим основные отличительные их особенности. Во-первых, во всех них предел рассматривается в нуле. Во-вторых, если есть тригонометрическая функция в рассматриваемом пределе, то может участвовать предел (3.2). Если есть степень, в которой переменная в основании и в показателе степени, то надо обратиться к пределу (3.1). Если есть степень, в которой основание постоянно, — посмотреть на предел (3.3). Если переменная в основании, а в показателе степени константа, то идем к (3.5). Наконец, наличие логарифма говорит об обращении к пределу (3.4).

Следующий шаг — анализ необходимых условий использования этих пределов. Первое необходимое условие уже было отмечено — все эти пределы рассматриваются в нуле. Перечислим другие необходимые условия для каждого из пределов (3.1)–(3.5).

Начнем с (3.1). Как отмечено выше, к этому пределу мы обращаемся, когда есть степень, в основании и в показателе которой находится переменная, т. е. когда функция, предел которой надо найти, имеет вид

$$\varphi(x)^{\psi(x)}$$

и рассматривается предел, допустим, в некоторой точке a . Первое, чем мы интересуемся, верно ли, что $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$, и если нет, то повода обратиться к пределу (3.1) нет. Допустим, что да. В таком случае выделяем в основании единицу. Это иногда делается вынесением множителя за скобки, но чаще всего прибавлением нуля в основании, т. е. прибавлением к $\varphi(x)$ единицы и ее вычитанием. При этом прибавленная единица остается отдельно, а вычтенная группируется с $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = 1 + (\varphi(x) - 1).$$

Теперь уже

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 0,$$

и мы частично подготовились к виду (3.1). Для использования (3.1) не хватает в показателе степени величины, обратной к $\varphi(x) - 1$. Обеспечим ее, разделив показатель степени и умножив его на $\varphi(x) - 1$. При этом выражение, ушедшее в знаменатель, учтем в замечательном пределе, а выражение, поступившее в числитель, рассмотрим вместе с бывшим показателем степени. Запишем формально эту серию преобразований:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)^{\psi(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} (1 + (\varphi(x) - 1))^{\psi(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (1 + (\varphi(x) - 1))^{\frac{1}{\varphi(x)-1} \cdot (\varphi(x)-1) \cdot \psi(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} ((1 + (\varphi(x) - 1))^{\frac{1}{\varphi(x)-1}})^{(\varphi(x)-1) \cdot \psi(x)}. \end{aligned}$$

Основание степени в последнем выражении имеет пределом число e согласно (3.1), поэтому можно сосредоточиться на нахождении предела функции, стоящей в показателе степени, и если он есть, допустим, $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x) = b$, то

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = e^b.$$

К пределу вида (3.2) надо обращаться, когда функция устроена так, что в ней есть синус от функции, имеющей пределом 0, т. е. когда рассматривается предел типа

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \sin \varphi(x).$$

Первое, чем мы интересуемся, будет ли $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, и если нет, то повода использовать предел (3.2) нет. Допустим, что $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$. В таком случае для использования (3.2) на хватает величины $\varphi(x)$ в знаменателе. Обеспечим ее, разделив и умножив все выражение на $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \sin \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \varphi(x) \cdot \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)},$$

после чего можно сосредоточиться на пределе $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \varphi(x)$, и если он есть, то можно воспользоваться пределом (3.2) и теоремой о пределе произведения.

К пределу вида (3.3) надо обращаться в том случае, если мы заметим степень, в основании которой стоит константа, т. е. рассматривается предел вида

$$\lim_{x \rightarrow a} c^{\varphi(x)} \cdot \psi(x).$$

Первое, чем надо поинтересоваться, верно ли, что $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, и если нет, то предел (3.3) здесь не используется. Если да, то идем дальше и смотрим, вычитается ли единица от $c^{\varphi(x)}$. Если нет, то стараемся организовать ее путем либо вынесения множителя за скобки (что редко) либо вычитанием и прибавлением единицы (что значительно чаще), например так:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} c^{\varphi(x)} \cdot \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c^{\varphi(x)} - 1 + 1) \cdot \psi(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} ((c^{\varphi(x)} - 1) \cdot \psi(x) + \psi(x)). \end{aligned}$$

Нахождение предела $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$ — отдельная задача, допустим, что он есть. Тогда сосредоточимся на пределе

$$\lim_{x \rightarrow a} (c^{\varphi(x)} - 1) \cdot \psi(x).$$

Видим, что для использования (3.3) не хватает знаменателя. Организуем его путем умножения на единицу:

$$\lim_{x \rightarrow a} (c^{\varphi(x)} - 1) \cdot \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c^{\varphi(x)} - 1}{\varphi(x)} \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

и теперь если есть предел $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \cdot \psi(x)$, то можем воспользоваться пределом (3.3) и теоремой о пределе произведения.

К пределу (3.4) обращаемся, когда в нашем выражении нашелся натуральный логарифм, т. е. когда ищется предел вида

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \ln \varphi(x).$$

Первое условие применимости (3.4) — это равенство $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$, и если это так, то выделяем внутри логарифма единицу путем прибавления нуля:

$$\varphi(x) = 1 + (\varphi(x) - 1),$$

и переходим дальше. Умножим и разделим все выражение на $\varphi(x) - 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \ln \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \cdot \ln(1 + (\varphi(x) - 1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1 + (\varphi(x) - 1))}{\varphi(x) - 1} \cdot (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x), \end{aligned}$$

и если есть предел $(\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x)$, то используем теорему о пределе произведения и (3.4).

Наконец, к формуле (3.5) обращаемся в том случае, если у нас есть степень, в показателе которой стоит константа, т. е. рассматривается предел вида

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x))^\alpha \cdot \psi(x).$$

Сначала смотрим, будет ли $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$, и если да, то начинаем процедуру приведения к виду (3.5): к основанию степени добавляем единицу и вычитаем ее, выделяя добавленную единицу отдельно:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x))^\alpha \cdot \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} (1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha \cdot \psi(x).$$

Мы получили фрагмент вида $(1 + z)^\alpha$. Не хватает вычитаемой из него единицы. Обеспечим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha \cdot \psi(x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow a} ((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1 + 1) \cdot \psi(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1) \cdot \psi(x) + \psi(x)). \end{aligned}$$

Допустим, что есть конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$. Тогда займемся первым слагаемым. Подстроим так, чтобы в знаменателе стояла та величина, которая прибавляется к 1 в основании степени в числителе. Разделим на нее и умножим. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} ((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1) \cdot \psi(x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1}{\varphi(x) - 1} \cdot (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x), \end{aligned}$$

и если существует предел $(\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x)$, то можно воспользоваться теоремой о пределе произведения и соотношением (3.5).

Возможно, что в некоторых моментах описанные процедуры показались вам громоздкими. Постарайтесь вычленив содержание выполняемых шагов и применять именно эту информацию, в конкретных случаях все будет значительно проще.

3.7. Примеры.

1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

Заметим, что мы имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как предел числителя и предел знаменателя равны бесконечности. Преобразуем знаменатель, выделив отдельно стремящуюся к бесконечности переменную: $(2x-1)^4 = x^4(2-1/x)^4$. Совершая аналогичное преобразование в числителе и применяя теорему о пределе отношения, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{x^4(2-1/x)^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{(2-1/x)^4} = \frac{49}{16}. \end{aligned}$$

2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1})$.

Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $\infty - \infty$ (ранее в тексте не отмеченной, ибо такие неопределенности проще раскрывать с помощью преобразований конкретных выражений). Умножив и разделив на сумму корней, а затем применив теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} = 0,$$

ибо знаменатель стремится к ∞ .

Найдем этот предел иначе. Вынося из-под корня переменную x ,

получим

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - 1/x^2} - \sqrt{1 + 1/x^2}}{1/|x|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 + y^2}}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - y^2)^{1/2} - 1 + (1 - (1 + y^2)^{1/2})}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - y^2)^{1/2} - 1}{-y^2} \cdot (-y) + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + y^2)^{1/2}}{y^2} \cdot y = 0,
\end{aligned}$$

где сделана замена $y = 1/|x|$ и использованы соответствующие теоремы.

3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$.

Легко заметить, что здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. В числителе стоят кубические корни, т. е. степенные функции, и нам желательно узнать, можно ли будет применить замечательный предел, связанный со степенной функцией. Для это надо, чтобы предел подкоренного выражения был равен единице (поскольку в соответствующем пределе (3.5) участвует выражение вида $(1 + x)^\mu$, где $x \rightarrow 0$). У нас требуемое свойство выполняется, ибо $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x = 1$. Для того чтобы использовать замечательный предел, надо подкоренное выражение представить в виде $1 + t$, где $t \rightarrow 0$. Это сделать легко, прибавив и отняв под корнем единицу: $\cos 4x = 1 + (\cos 4x - 1)$, $\cos 5x = 1 + (\cos 5x - 1)$. Теперь проведем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + (\cos 4x - 1)} - \sqrt[3]{1 + (\cos 5x - 1)}}{1 - \cos 3x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1) - ((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{1 - \cos 3x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1) - ((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} - \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{2 \sin^2(3x/2)} = L.
\end{aligned}$$

Для возможности использования замечательного предела умножим и разделим соответствующие дроби на стремящиеся к нулю выражения

$\cos 4x - 1$, $\cos 5x - 1$, сделаем подходящую группировку и займемся возникшими дробями:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 4x - 1} \cdot \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} - \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 5x - 1} \cdot \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)}$$

Используя теорему о замене переменной и предел (3.5), имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 4x - 1} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + (\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 5x - 1} = \frac{1}{3}.$$

Займемся пределами

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(4x/2)}{2 \sin^2(3x/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(4x/2)}{(4x/2)^2} \cdot \frac{(4x/2)^2}{(3x/2)^2} \cdot \frac{(3x/2)^2}{\sin^2(3x/2)} = -\frac{16}{9}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{2 \sin^2(3x/2)} = -\frac{25}{9}.$$

Собирая полученные результаты, имеем

$$L = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{25}{9}\right) = \frac{1}{3}.$$

4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2}$.

Заметим, что в этом примере мы имеем дело с неопределенностью вида 1^∞ , которая связана с пределом (3.1). Чтобы воспользоваться указанным пределом, надо в основании степени выделить слагаемое вида $1 + \alpha$, где α — бесконечно малая. Для этого в основании прибавим

и отнимем единицу, а затем умножим и разделим показатель степени на получившуюся бесконечно малую величину:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}})^{\frac{\cos x - 1}{-x^2}}.\end{aligned}$$

Ориентируясь на использование равенства (3.6), займемся отдельно пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-x^2}$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(x/2)}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Согласно равенству (3.6) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2} = e^{1/2}$.

3.8. Задачи.

1. Найти пределы

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5},$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3},$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, \quad m, n \in \mathbb{N},$ (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \quad m, n \in \mathbb{N},$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1},$ (6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}, \quad n \in \mathbb{N},$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right), \quad m, n \in \mathbb{N},$ (8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}},$
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1},$ (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}},$
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, \quad m, n \in \mathbb{N},$ (12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}, \quad m, n \in \mathbb{N},$
- (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}, \quad m, n \in \mathbb{N},$
- (14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x),$
- (15) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a},$ (16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x},$
- (17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2},$

$$\begin{aligned}
(18) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}, \\
(19) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}, \quad (20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1}, \\
(21) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x, \quad (22) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}, \\
(23) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}, \quad (24) \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \\
(25) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \ln(x+1) - \sin \ln x), \quad (26) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}, \\
(27) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \quad a > 0, \quad (28) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, \quad a > 0, \\
(29) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}, \quad (30) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}, \\
(31) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{1/x^2}, \quad (32) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}, \\
(33) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}, \quad a > 0, \quad b > 0, \\
(34) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a+b} \right)^{1/x}, \quad a > 0, \quad b > 0. \\
(35) \quad & \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x, \quad (36) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - x \cos \sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

3.9. Опишем терминологию, связанную с асимптотическим сравнением функций, т. е. сравнением их в пределе при стремлении аргумента к какой-то точке. Нам надо будет договориться о сравнении одной функции относительно другой. Для этого естественно рассматривать их отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$, однако при этом надо делать оговорки, связанные с возможностью знаменателя обращаться в нуль. Чтобы не иметь таких неудобств, можно для указанного выше отношения ввести свое обозначение и тем самым рассматривать представление одной из сравниваемых функций, например $f(x)$, через другую в виде произведения $f(x) = g(x)\varphi(x)$, где в качестве $\varphi(x)$ может выступать отношение $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ в тех точках, где $g(x) \neq 0$.

Две функции асимптотически сравниваются как правило в тех случаях, когда они обе либо бесконечно малые, либо бесконечно большие. Используемые при этом обозначения одинаковы в соответствующих ситуациях, а терминология немного отличается.

Итак, обращаясь к сравнению функций f и g , предположим, что f представлена в виде $f(x) = g(x)\varphi(x)$. Пусть a — предельная точка того множества, на котором эти функции рассматриваются. Если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, то говорят, что f есть *о-малое относительно g при x , стремящемся к a* , и используют обозначение $f(x) = o(g(x))$. Если при этом $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая более высокого порядка, чем g* , или что *порядок малости функции f выше, чем у g* , или что *f стремится к нулю быстрее, чем g* . Если же $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет медленнее, чем g* , или что *g растет быстрее, чем f* .

Предположим теперь, что в представлении $f(x) = g(x)\varphi(x)$ функция φ обладает следующим свойством: существует такая окрестность точки a , на которой φ ограничена. В этом случае говорят, что f — *О-большое по сравнению с g при x , стремящемся к a* , и используют обозначение $f(x) = O(g(x))$. Если при этом $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая порядка не ниже, чем g* , или что *порядок малости функции f не ниже, чем у g* . Если же $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет не быстрее, чем g* .

Если одновременно $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, то говорят, что *функции f и g одного порядка (малости или роста) при $x \rightarrow a$* , используя при этом обозначение $f \asymp g$.

Если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то говорят, что $g(x)$ — *главная часть функции $f(x)$* . Полагая $o(g(x)) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, тот факт, что g есть главная часть f , можно записать в виде $f(x) = g(x)(1 + \alpha(x))$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Если при этом в некоторой окрестности точки a функция g отлична от нуля, то последнее соотношение можно записать в виде $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, $\alpha(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$, или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Если $g(x)$ — главная часть $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то говорят также, что *функции f и g эквивалентны при $x \rightarrow a$* и используют обозначение $f(x) \sim g(x)$.

Чаще всего в качестве бесконечно малых или бесконечно больших, с которыми сравнивают данные функции, берут функции вида $(x - a)^\alpha$, $a \in \mathbb{R}$. Если $f(x) = o(x - a)^\alpha$ при $x \rightarrow a$ и $\alpha > 0$, то говорят, что f — *величина более высокого порядка (малости), чем α* , или что

у f порядок малости более высокий, чем α . Если же $f(x) \sim (x-a)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то говорят, что f имеет порядок α (малости или роста, в зависимости от знака α). Аналогичную терминологию можно описать и в том случае, если сравнивают с функцией вида x^α при $x \rightarrow +\infty$.

Важно понимать, что символами типа $O(f(x))$, $o(f(x))$, если они не используются в конкретных равенствах, обозначают не одну функцию, а **класс функций, обладающих отмеченным в символе свойством**, так что если говорят «возьмем функцию $O(f(x))$ или $o(f(x))$ при $x \rightarrow a$ », то имеют в виду, что рассматривается **некоторая** функция, обладающая указанным свойством, т. е. некоторая функция $h(x)$ такая, что $h(x) = \varphi(x)f(x)$, где $\varphi(x)$ ограничена вблизи a или $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$. В следующих ниже примерах и задачах мы познакомимся с некоторыми правилами обращения с асимптотическими равенствами.

3.10. Примеры.

1. Доказать, что $o(o(f(x))) = o(f(x))$ при $x \rightarrow a$.

Написанное равенство означает, что любая функция, обладающая указанным в левой части равенства свойством, будет бесконечно малой по сравнению с f . Пусть $h(x)$ — какая-либо функция, обладающая тем свойством, что $h(x) = o(o(f(x)))$, и надо показать, что $h(x) = o(f(x))$. Согласно условию существует такая бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция $\theta(x)$, что $h(x) = \theta(x)g(x)$, где $g(x) = o(f(x))$. Последнее означает, что $g(x) = \eta(x)f(x)$, где $\lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0$. Собирая, получим $h(x) = \theta(x)\eta(x)f(x)$, а так как $\lim_{x \rightarrow a} \theta(x)\eta(x) = 0$, по определению $h(x) = o(f(x))$. Требуемое равенство установлено.

2. Доказать, что $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$ при $x \rightarrow a$.

Действительно, это соотношение означает, что функция, обладающая свойством, указанным в левой части, будет обладать также свойством, указанным в правой. Свойство, указанное в левой части, означает, что рассматривается сумма двух функций $h(x) + g(x)$, где $h(x) = \varphi(x)f(x)$, $g(x) = \psi(x)f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$. Тогда $h(x) + g(x) = (\varphi(x) + \psi(x))f(x)$, а поскольку $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) + \psi(x)) = 0$, то $h(x) + g(x) = o(f(x))$, что и требовалось.

3.11. Задачи.

1. Доказать соотношения при $x \rightarrow a$:

$$(1) \quad O(o(f(x))) = o(f(x)), \quad (2) \quad O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)).$$

2. Пусть $x \rightarrow 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

$$(1) \quad o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\alpha), \quad (2) \quad o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta}).$$

3. Пусть $x \rightarrow 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

$$(1) \quad O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\alpha), \quad (2) \quad O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta}).$$

4. Пусть $x \rightarrow \infty$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

$$(1) \quad O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\beta), \quad (2) \quad O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta}).$$

3.12. Асимптотические равенства удобно использовать при нахождении пределов — они позволяют свести процесс нахождения предела к простым преобразованиям многочленов, раскрытию скобок, приведению подобных членов и выделению главной части. Конечно, для этого надо иметь набор конкретных асимптотических равенств. Поскольку все примеры по нахождению пределов связаны с элементарными функциями, мы ограничимся тем, что основные замечательные пределы перепишем в форме асимптотических равенств, в которых $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x + o(x), \quad (3.7)$$

$$a^x = 1 + x \ln a + o(x), \quad (3.8)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad (3.9)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x). \quad (3.10)$$

Во всех этих равенствах бесконечно малые $o(x)$ можно конкретизировать, т. е. записать более точные приближения функций многочленами. Такие равенства будут обоснованы позже, мы же будем сейчас их использовать при нахождении пределов в случае необходимости. Итак, для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства, в которых $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad (3.11)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (3.12)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad (3.13)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad (3.14)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \dots \\ \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Учитывая теорему о замене переменной, можно гарантировать, что эти равенства останутся верными, если в них на месте переменной x будет стоять какая-либо функция $x = \varphi(t)$ такая, что $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = 0$, и ищется предел соответствующего выражения при $t \rightarrow a$.

3.13. Примеры.

1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Воспользовавшись равенствами (3.12), (3.15), (3.9), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} &= \frac{1 + x \cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1 + x(1 - x^2/2 + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) + o(x)}{x + o(x) - x} \\ &= \frac{1 + x - x^3/2 + o(x^3) - 1 - x + o(x)}{o(x)} = \frac{o(x)}{o(x)}, \end{aligned}$$

и никакой пользы проделанные выкладки не несут, ибо мы в итоге пришли к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Это означает, что нами использована недостаточно глубокая информация об асимптотике имеющихся функций. Простое наблюдение:

$$\ln(1+x) - x = x - x^2/2 + o(x^2) - x = -x^2/2 + o(x^2)$$

показывает, что в знаменателе — величина второго порядка, а тогда и в числителе надо использовать асимптотические равенства, обеспечивающие выделение главного члена второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{1 + x \cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} &= \frac{1 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) - \frac{(1/2) \cdot (-1/2)}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 - x + \frac{4x^2}{8} + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(x^2)/x^2}{-1/2 + o(x^2)/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $x^3/2 = o(x^2)$ и что $o(x^2) + o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.

При нахождении пределов бывает удобно комбинировать использование замечательных пределов и асимптотических равенств.

2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} &= \left(\frac{1 - x^2/2 + o(x^2)}{1 - (2x)^2/2 + o(x^2)} \right)^{1/x^2} \\ &= \left(1 + \frac{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 - o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)} \right)^{1/x^2} = \left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)} \right)^{1/x^2} \\ &= \left(\left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)} \right)^{\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}} \right)^{\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1+o(1)} \cdot \frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{2}$, согласно (3.6) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} = e^{3/2}.$$

Решим этот же пример другим способом. Воспользуемся равенством $a^b = e^{b \ln a}$, $a > 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}.$$

Рассмотрим выражение в показателе степени:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}{x^2} &= \frac{\ln \left(\frac{1 - x^2/2 + o(x^2)}{1 - 4x^2/2 + o(x^2)} \right)}{x^2} \\ &= \frac{\ln(1 - x^2/2 + o(x^2)) - \ln(1 - 2x^2 + o(x^2))}{x^2} \\ &= \frac{-x^2/2 + 2x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый предел равен $e^{3/2}$.

3.14. Задачи.

1. Используя асимптотические равенства, найти пределы

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1 + 2x}}{\ln \cos x}.$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{1/x^2}, & (4) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x \cos \alpha x}{1+\sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}, \\
(5) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, & (6) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{x + \sin x} \right)^{1/(1-\cos x)}, \\
(7) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}, & (8) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}, \\
(9) \quad & \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{3-x} + \ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)}, \\
(10) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{7/4} (\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}), \\
(11) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+\sin x} - (1/2)\ln(1+x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x}, \\
(12) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)},
\end{aligned}$$

2. Найти пределы

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}, & (2) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x^2}{x^2+1} \right), \\
(3) \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}), \quad n \in \mathbb{N}, & (4) \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

3.15. Ответы. К п. 3.8. (1) 10; (2) 1; (3) $\frac{mn(n-m)}{2}$; (4) $\frac{m}{n}$; (5) $\frac{n(n+1)}{2}$; (6) $\frac{n(n+1)}{2}$; (7) $\frac{m-n}{2}$; (8) 1; (9) 3; (10) $\frac{3}{2}$; (11) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$; (12) $\frac{n}{m}$; (13) $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$; (14) $\frac{a+b}{2}$; (15) $\cos a$; (16) $\frac{1}{2}$; (17) $-\sin a$; (18) $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$, $a \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$; (19) 0; (20) 0; (21) e^{2a} ; (22) e^{-1} ; (23) $e^{\operatorname{ctg} a}$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; (24) 1; (25) 0; (26) $(\frac{a}{b})^2$; (27) $a^a \ln \frac{a}{e}$; (28) $a^a \ln ae$; (29) 2; (30) 2; (31) $\frac{e}{\pi}$; (32) $e^{1/e}$; (33) $\sqrt{ab}$; (34) $a^{a/(a+b)} b^{b/(a+b)}$; (35) 0; (36) $\frac{1}{2}$.

К п. 3.14. 1. (1) 3; (2) -2; (3) $\frac{2}{3}$; (4) $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$; (5) 1; (6) e ; (7) $\frac{1}{2}$; (8) -2; (9) $e^{-1/4}$; (10) $-\frac{3}{16}$; (11) $-\frac{1}{8}$; (12) $-\frac{1}{2}$; **2.** (1) $\frac{1}{1+x^2}$; (2) $\sqrt{2}$; (3) 0; (4) 1.

§ 4. Непрерывные функции

4.1. Рассмотрим функцию f и точку $a \in \mathbb{R}$. Если a принадлежит области определения $D(f)$ функции f , то будем говорить, что функция f непрерывна в точке a , если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D(f), |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Если к тому же a — предельная точка множества $D(f)$, то непрерывность f в a равносильна тому, что существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и выполнено равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Если же a не является предельной точкой $D(f)$ и тем самым говорить о пределе в этой точке невозможно, то любая функция в такой точке непрерывна. Договоримся также считать функцию f непрерывной в предельной точке множества $D(f)$, не принадлежащей $D(f)$, если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (требовать в этом случае равенства его значению функции в точке затруднительно — точка по предположению не входит в область определения, так что такого значения просто нет).

При исследовании непрерывности функции в данной точке сначала надо определить, что это за точка — входит ли она в область определения функции или нет и является ли она предельной точкой области определения. Если это точка из области определения, но не предельная точка, то ответ готов — функция в такой точке непрерывна. Как правило, рассматриваемая точка будет предельной точкой области определения. В этом случае надо найти предел функции в этой точке, используя по возможности теоремы о пределах. Если же использовать теоремы невозможно (например, по причине невыполнения их условий), то надо найти предел по определению, в случае необходимости прибегая к односторонним пределам. Если конечного предела нет, то нет и непрерывности. Если конечный предел есть, то надо посмотреть, определена ли функция в этой точке, и если нет, то она в ней уже непрерывна (только за счет существования предела). Если определена, то надо сравнить значение предела со значением функции, и если они одинаковы, то функция непрерывна, если нет, то разрывна.

4.2. Утверждение 1. *Линейная комбинация, произведение и отношение (последнее при условии отличия от нуля знаменателя) непрерывных в точке a функций непрерывны в этой точке.*

Утверждение 2. *Пусть функция f непрерывна в точке a , а функция g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a .*

4.3. Иногда описание точек разрыва функции сопровождают указанием, какого типа разрыв в данной точке. Напомним, что точку a называют *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные односторонние пределы $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$. Говорят, что разрыв первого рода *устранимый*, если $f(a+0) = f(a-0)$.

0). Во всех остальных случаях говорят, что a — точка разрыва второго рода.

4.4. Пример. Исследуем на непрерывность функцию

$$f(x) = [x] \sin \pi x,$$

где квадратные скобки указывают на целую часть числа, т. е. $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Функция f определена на всем $\mathbb{R}$ и представляет собой произведение двух функций, из которых $\sin \pi x$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Покажем, что функция $[x]$ непрерывна в каждой точке $a \notin \mathbb{Z}$, и тогда f будет непрерывной на множестве всех нецелых вещественных чисел как произведение непрерывных функций. Действительно, если $a \notin \mathbb{Z}$, то существует такая окрестность $(a - r, a + r)$ точки a , которая не содержит целых чисел, а тогда целая часть $[x]$ во всех точках такой окрестности принимает одно и то же значение, т. е. совпадает с непрерывной (тождественно постоянной) функцией и, значит, сама непрерывна в a .

Пусть теперь $a \in \mathbb{Z}$. Тогда в любой достаточно малой (настолько малой, чтобы в ней не было отличных от a целых точек) окрестности точки a слева от a будет $[x] = a - 1$, а справа от a оказывается $[x] = a$. Отсюда $\lim_{x \rightarrow a-0} [x] = a - 1$, $\lim_{x \rightarrow a+0} [x] = a$, и ввиду различия пределов слева и справа заключаем, что предела в этой точке нет, так что $[x]$ разрывна в произвольной целой точке.

Итак, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций приходим к непрерывности нашей функции во всех нецелых точках. Можно ли утверждать, что в каждой целой точке она будет разрывна? Нет, пока нельзя. Нам только известно, что в таких точках не выполняются условия теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций, но будет ли при этом произведение разрывным — вопрос пока открытый.

Отметим, что $\lim_{x \rightarrow n} \sin \pi x = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, а тогда по теореме о пределе произведения ограниченной функции на бесконечно малую будет $\lim_{x \rightarrow n} [x] \sin \pi x = 0$, так как целая часть вблизи любой конечной точки ограничена. Вместе с тем имеем $[n] \sin \pi n = 0$, если $n \in \mathbb{Z}$. Мы получили, что предел функции в любой целочисленной точке совпадает с ее значением в такой точке, следовательно, наша функция непрерывна в каждой целочисленной точке. В итоге приходим к тому, что f непрерывна в каждой точке области определения.

4.5. Задачи.

1. Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi/x)),$$

$$(7) f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$(8) f(x) = \cos^2 \frac{1}{x},$$

$$(9) f(x) = e^{-1/x},$$

$$(10) f(x) = \arcsin(1/x).$$

2. Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

$$(1) f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad x \geq 0,$$

$$(2) f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$$

$$(3) f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n} x,$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+(2 \sin x)^{2n}}.$$

3. Обязательно ли будет разрывной в данной точке a сумма $f(x) + g(x)$, если (а) функция f непрерывна, а g разрывна в точке a ; (б) обе функции f, g разрывны в точке a ?

4. Обязательно ли будет разрывным в данной точке a произведение $f(x)g(x)$, если (а) функция f непрерывна, а g разрывна в точке a ; (б) обе функции f, g разрывны в точке a ?

5. Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$, $g(f(x))$, если (а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2$; (б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x(1 - x^2)$; (в) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x - [x]$.