§ 1. Введение

1.1. Мы будем пользоваться теоретико-множественным языком, не обращаясь к аксиоматике теории множеств. Говоря о множестве, мы будем под этим понимать некоторую совокупность объектов, собранных (в множество) по какому-либо признаку и рассматриваемых как единое целое.

Все рассматриваемые объекты связаны между собой отношением принадлежности, и запись $x \in A$ означает, что x есть элемент A (т. е. в этом контексте объект A — множество, а x — его элемент). Множество полностью характеризуется составом элементов. О каждых объекте x и множестве A можно с определенностью судить, является x элементом A или нет. Если x не элемент A, то будем писать $x \notin A$. Множество, не имеющее элементов, называют *пустым множеством* и обозначают символом $\varnothing$.

Говорят, что *множество A содержится в множестве B* (или что A — *подмножество* B) и пишут $A \subset B$, если для любого $x \in A$ будет $x \in B$. Множества A, B *равны* ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$. Таким образом, равенство $A = B$ означает справедливость двух утверждений: если $x \in A$, то $x \in B$, и если $x \in B$, то $x \in A$.

Если A — некоторое множество, а $P(x)$ — свойство (т. е. повествовательное предложение, истинность которого зависит от выбора элемента x), то символом $\{x \in A : P(x)\}$ обозначают подмножество множества A, состоящее из всех $x \in A$, для которых $P(x)$ верно.

Если A, B — множества, то совокупность объектов x таких, что либо $x \in A$, либо $x \in B$, образует множество, называемое *объединением* множеств A, B и обозначаемое через $A \cup B$. Совокупность объектов x таких, что $x \in A$ и $x \in B$, называют *пересечением* множеств A и B и обозначают символом $A \cap B$. Множество $\{x \in A : x \notin B\}$ называют *дополнением множества B до множества A* (или разностью множеств A и B) и обозначают через $A \setminus B$. Множество $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ называют *симметрической разностью множеств A и B*.

Из двух объектов x и y можно составить объект (x, y), называемый *упорядоченной парой*, в которой x — первый элемент, а y — второй. Характеристическим свойством упорядоченной пары служит такое: равенство $(x, y) = (s, t)$ равносильно тому, что $x = s$, $y = t$. Множество $A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$ называют *прямым произведением множеств A, B*. Можно последовательно определить произведение $A_1 \times \cdots \times A_n$ множеств $A_1, \ldots, A_n$. Если $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то для произведения обычно используют символ A^n.

1.2. Задачи.

1. Приведите пример таких множеств A, B, C, что $A \in B$, $B \in C$, но $A \notin C$.

2. Приведите пример множеств A, B, C, D, E, удовлетворяющих одновременно следующим условиям: $A \subset B$, $B \in C$, $C \subset D$, $D \subset E$.

3. Доказать, что для любых множеств A, B, C имеют место равенства

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$
$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C), \quad (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

4. Доказать, что для любых множеств A, B, C, D верно равенство $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

5. Доказать, что множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ удовлетворяет условиям, характеризующим упорядоченную пару, т. е. $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{s\}, \{s, t\}\}$ тогда и только тогда, когда $x = s$, $y = t$.

6. Доказать равенства

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \quad (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

для любых множеств A, B, C.

1.3. Сформулируем основные понятия, связанные с отображениями.

Отображением, действующим из множества X в множество Y, будем называть правило f, согласно которому каждому элементу x какого-то подмножества X_0 множества X сопоставляется один элемент y множества Y. При этом будем использовать такие обозначения: $f(x)$, $y = f(x)$, $f : X \to Y$, $f : x \mapsto f(x)$, $f : x \mapsto y$. Множество X_0, на элементы которого распространяется действие правила (отображения) f, называют *областью определения* f и обозначают через $D(f)$, множество $E(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$ называют *множеством значений* f. Множество

$$\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in D(f),\ y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

называют *графиком отображения* f (рис. 1.1).

Отображение, определенное на числовом множестве и действующее также в числовое множество, называют *функцией.*

Пусть f, g — отображения. Отображение $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ называют *композицией* (или *суперпозицией*) отображений f, g. Ясно, что $D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$.

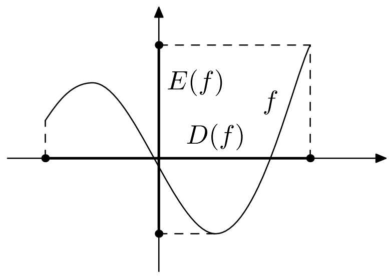

Рис. 1.1.

Множество

$$f[A] = \{f(x) : x \in A \subset D(f)\} = \{y : (\exists x \in A)\ y = f(x)\}$$

называют *образом множества* A, множество

$$f^{-1}[B] = \{x \in D(f) : f(x) \in B\} = \{x \in D(f) : (\exists y \in B)\ y = f(x)\}$$

— *прообразом множества* B *при отображении* f (рис. 1.2).

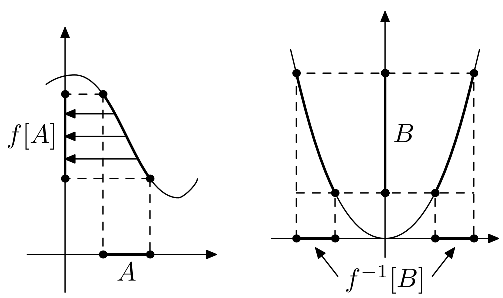

Рис. 1.2.

Отображение f называют *взаимно однозначным* (*инъективным, различающим, разнозначным*), если для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Пусть f — взаимно однозначное отображение. Отображение f^{-1}, которое каждому $v \in E(f)$ сопоставляет такой элемент $u \in D(f)$, что $v = f(u)$, называют *обратным к* f *отображением.*

1.4. Задачи.

1. Пусть f — отображение и A, B — подмножества $D(f)$, а C, D — подмножества $E(f)$. Доказать соотношения

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B], \quad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B],$$

$$f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D], \quad f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$$
$$f^{-1}[f[A]] \supset A, \quad f[f^{-1}[C]] = C.$$

2. Пусть f, g — взаимно однозначные отображения и $E(f) = D(g)$. Показать, что $g \circ f$ взаимно однозначно и $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. Показать, что для любых отображений f, g и множества $A \subset E(g \circ f)$ справедливо равенство $(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g^{-1}[A]]$.

1.5. Предположим, что некоторое утверждение $P(n)$, справедливость которого зависит от натурального n, верно для первого натурального числа $n = 1$ и из того, что верно $P(n)$, следует, что верно $P(n+1)$. Принцип математической индукции гласит, что в таком случае утверждение $P(n)$ верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

1.6. Пример. Доказать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Действительно, если $n = 1$, то сумма слева превращается в одно число 1, и справа имеем $1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6 = 1$, так что при $n = 1$ требуемое равенство верно. Предположим, что оно выполнено при некотором натуральном n, и докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Используя предположение, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Следовательно, согласно принципу математической индукции требуемое равенство будет верным при любом натуральном n.

1.7. Задачи.

1. Доказать равенства

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}. \qquad (3)$$

2. Доказать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,\ 0! = 1.$$

3. Доказать неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Доказать неравенства

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n \geq 1, \qquad (1)$$

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \geq 2. \qquad (2)$$

1.8. Пусть $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ (символом $\mathbb{R}$ мы обозначаем множество вещественных чисел, а через $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенную числовую прямую, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; для краткости, если нет опасности недоразумений, вместо $+\infty$ будем писать просто ∞.

Число $b \in \overline{\mathbb{R}}$ называют *верхней границей* множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, если $(\forall x \in A)\ x \leq b$ (рис. 1.3). Наименьшую из верхних границ множества A называют его *точной верхней границей* и обозначают через $\sup A$ (читается «супремум A»). Двойственным образом определяют точную нижнюю границу $\inf A$ множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ как наибольшую из его нижних границ (читается «инфимум A»). Если множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ имеет верхнюю (нижнюю) границу в $\mathbb{R}$, то его называют *ограниченным сверху* (*снизу*) в $\mathbb{R}$. У неограниченного сверху в $\mathbb{R}$ множества A будет $\sup A = +\infty$.

1.9. Утверждение. *Каждое подмножество в $\overline{\mathbb{R}}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы. Если при этом $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ и A*

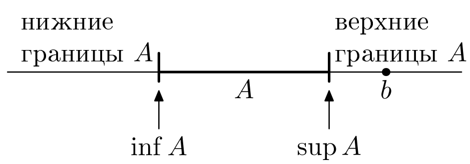

Рис. 1.3.

ограничено сверху (снизу) в $\mathbb{R}$*, то* $\sup A \in \mathbb{R}$ $(\inf A \in \mathbb{R})$*, так что такое множество* A *имеет точную верхнюю (нижнюю) границу в* $\mathbb{R}$.

1.10. Согласно определению точных границ для доказательства, например, равенства $\sup A = a$, в котором сообщается, что стоящее в правой его части число a является точной верхней границей множества A, надо проверить два свойства:

1) a — верхняя граница A, т. е.

$$(\forall x \in A) \quad x \leqslant a;$$

2) граница a наименьшая, иначе говоря, если b — какая-либо граница A, то a ее не больше, т. е.

$$\text{если } (\forall x \in A)\ x \leqslant b, \text{ то } a \leqslant b.$$

Аналогичное можно сказать и о равенстве $\inf A = a$.

1.11. Задачи.

1. Доказать, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ и для любого числа $\lambda \geq 0$ справедливы равенства

$$\sup \lambda A = \lambda \sup A, \quad \inf \lambda A = \lambda \inf A$$

(здесь $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$).

2. Доказать, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

3. Доказать, что для любых непустых ограниченных множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

(здесь $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$).

4. Положим $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$. Показать, что

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = y + (x - y)^+ = x + (y - x)^+,$$
$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = y - (x - y)^- = x - (y - x)^-,$$

где $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$ соответственно наибольшее и наименьшее из чисел x, y.

5*. Доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, существует единственное число $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, такое, что $a^2 = x$.

1.12. Утверждение (принцип Архимеда). *Пусть $h > 0$ — произвольное фиксированное вещественное число. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $(k - 1)h \leq x < kh$.*

1.13. Задача. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, в интервале (a, b) можно указать как рациональное, так и иррациональное число.

1.14. Пусть дано утверждение $P(x)$, истинность которого зависит от объектов, обозначенных здесь через x и выбираемых из некоторого множества X. Тогда из этого высказывания с переменной можно сделать новые высказывания, сообщив, при каких обстоятельствах относительно x будем рассматривать данное высказывание.

Одно из этих обстоятельств выражается словами «для любого», «для каждого», «для всех» и приводит к новому высказыванию вида «(для любого $x \in X$) $P(x)$». Ясно, что словами эти фразы писать не всегда удобно, поэтому для их обозначения используют символ $\forall$, называемый *квантором всеобщности*. При этом говорят, что переменная $x \in X$ *связывается* квантором всеобщности.

Второе обстоятельство выражается словами «найдется», «существует», «можно подобрать» и т. п. и приводит к высказыванию вида «(существует $x \in X$) $P(x)$», читается: существует x из X, для которого выполнено $P(x)$. Для обозначения этих фраз используется *квантор существования* в виде символа $\exists$. При этом говорят, что переменная $x \in X$ *связывается* квантором существования.

Сначала разберемся в том, как брать отрицание высказывания с кванторами, а затем обсудим, как относиться к таким высказываниям. Рассмотрим утверждение вида

$$(\exists x \in X) \quad P(x).$$

Его отрицание, т. е. утверждение

$$\text{не верно } ((\exists x \in X)\ P(x)),$$

можно проговорить так: не верно, что существует $x \in X$, для которого выполнено $P(x)$. Но если не существует такого $x \in X$, для которого выполнено $P(x)$, то, очевидно, для любого $x \in X$ должно выполняться отрицание высказывания $P(x)$, т. е. должно быть

$$(\text{для любого } x \in X) \quad \text{не верно } P(x),$$

или, символически,

$$\text{не } ((\exists x \in X)\ P(x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in X) \text{ не } P(x).$$

Что произошло? Квантор существования сменился квантором всеобщности, а отрицание проникло вглубь утверждения и стало за квантором.

Теперь рассмотрим утверждение вида

$$(\forall x \in X) \quad Q(x),$$

где $Q(x)$ — некоторое зависящее от x высказывание. Его отрицание, т. е. утверждение

$$\text{не верно } ((\forall x \in X)\ Q(x)),$$

можно проговорить так: не верно, что для любого $x \in X$ выполнено $Q(x)$, т. е. не для любого $x \in X$ выполнено $Q(x)$, иначе говоря, есть (найдется, существует) такое $x \in X$, для которого не выполнено $Q(x)$. Символически:

$$\text{не } ((\forall x \in X)\ Q(x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in X) \text{ не } Q(x).$$

И здесь квантор всеобщности сменился квантором существования, а отрицание стало после квантора.

Последовательно применяя эти простейшие шаги к более сложным высказываниям с кванторами, можно легко получать их отрицания. Так, например,

$$\begin{aligned} &\text{не } ((\exists C\ \forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \forall C \text{ не } ((\forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (\forall C\ \exists x \in X)\ f(x) > C, \end{aligned}$$

или, опуская промежуточный шаг,

$$\text{не } ((\exists C\ \forall x \in X)\ f(x) \leqslant C) \Longleftrightarrow (\forall C\ \exists x \in X)\ f(x) > C.$$

Знатоки могут отметить, что мы указали свойство ограниченности сверху функции f на множестве X и в виде отрицания получили свойство неограниченности сверху функции f на множестве X.

В математических утверждениях обычно нет свободных, не связанных кванторами объектов. Неужели приходится каждый раз указывать, как связывается переменная? Конечно, нет, иначе формулировки стали бы более громоздкими и менее понятными. По умолчанию свободная переменная связывается квантором всеобщности. Например, если мы говорим «сходящаяся последовательность ограничена», это означает «**любая** сходящаяся последовательность ограничена», а в утверждении «непрерывная на отрезке функция ограничена» имеется в виду «**любая** непрерывная на отрезке функция ограничена», и т. п.

Перейдем к осмыслению того, как работать с утверждениями, содержащими кванторы.

Отношение к кванторам всеобщности и существования неоднозначно и зависит от статуса утверждения с их участием, а именно от того, надо ли такое утверждение доказывать или оно уже дано и его можно использовать.

Допустим, что квантор всеобщности участвует в утверждении, которое надо доказывать. Тогда квантор «для любого» можно представлять себе как внешнее требование, не зависящее от нас, которое мы должны удовлетворить. Если в утверждении есть слова «для любого», представьте себе, что кто-то чужой придет и будет предлагать вам какие-то значения величины, сопровождаемой словами «для любого», а вам предстоит при этом выполнить все действия, которые следуют за этими словами. Пусть для определенности величина, к которой относятся слова «для любого», обозначается буквой ε, и для еще большей определенности (так чаще всего бывает) добавим требование: $\varepsilon > 0$. Тогда выражение «для любого $\varepsilon > 0$» надо понимать так: кто-то придет и будет давать какие-то положительные числа в качестве ε. Мы, в свою очередь, должны будем обеспечить справедливость какого-то утверждения, обозначим его через $P(\varepsilon)$, связанного с выбранным ε. С чего начать обеспечение требуемого утверждения? Во-первых, надо посмотреть, что от нас потребуется в утверждении $P(\varepsilon)$, и задаться вопросом: *откуда можно получить выполнение* $P(\varepsilon)$? Иначе говоря, пойти с конца, пытаясь понять, какие действия надо предпринять для обеспечения $P(\varepsilon)$. Надо иметь в виду, что значение ε нам неизвестно. Поэтому надо заботиться о том, чтобы выработать **правило** обеспечения справедливости $P(\varepsilon)$, зависящее, естественно, от ε. Если такое правило выработать удается, то можно гарантировать, что мы обеспечим выполнение утверждения

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{выполнено } P(\varepsilon).$$

Пусть квантор всеобщности встретился в утверждении, которое дано и мы имеем право его использовать. Тогда выбор той величины, к которой относится этот квантор, в наших руках, мы вправе придать ей то значение, которое нам требуется, и использовать с этим значением всё, что сообщается в утверждении.

Очень важно не смешивать эти две ситуации.

Иначе следует относиться к квантору существования. Если квантор существования стоит в утверждении, которое мы доказываем, то это наши возможности, мы можем подбирать величину, о существовании которой говорится, исходя из всех имеющихся ресурсов. Это наш регулятор, которым мы управляем. Конечно, в каждом конкретном случае гарантия существования осуществляется по-разному, однако в некоторых ситуациях есть наблюдения, носящие рекомендательный характер. О двух таких ситуациях мы поговорим ниже.

Если же квантор существования находится в утверждении, которое известно, нам дано, и мы можем его использовать, то квантор существования — это пришедшая извне (из имеющегося утверждения) информация, которую мы можем использовать в наших целях.

Если в утверждении переменные связываются двумя или более кванторами, как правило, важен порядок их следования. Его изменение может привести к другому утверждению. Поэтому не следует вольно обращаться с кванторами и порядком их следования в формулировках и утверждениях — скорее всего, получится не то, что хотелось.

Рассмотрим две конфигурации с участием кванторов: $\exists\forall$ и $\forall\exists$, т. е. такие утверждения, в которых сначала стоит квантор существования, а затем всеобщности, и наоборот, сначала стоит квантор всеобщности, а затем существования. Соотнесем эти конфигурации с функциями и тем самым рассмотрим два свойства функций.

Определение. Функцию f называют *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subset D(f)$, если

$$\exists C \ \forall x \in X \quad f(x) \leqslant C, \tag{1.1}$$

соответственно

$$\exists C \ \forall x \in X \quad f(x) \geqslant C. \tag{1.2}$$

Функцию f называют *ограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если
$$\exists C\ \forall x \in X \quad |f(x)| \leqslant C. \tag{1.3}$$
Ясно, что функция ограничена на данном множестве тогда и только тогда, когда она на нем ограничена сверху и снизу одновременно.

Что предстоит сделать для доказательства ограниченности конкретной функции на данном множестве? Из каких-то соображений подобрать постоянную C, удовлетворяющую условиям доказываемой ограниченности. Будем для определенности рассуждать об ограниченности сверху. Поскольку согласно определению требуется подобрать постоянную, пригодную **для всех** элементов множества X, надо пытаться ограничивать функцию f на X сверху какими-то другими функциями, у которых зависимость от x менее выражена или более простая и которые, в свою очередь, ограничены сверху. Иначе говоря, надо пытаться ограничить $f(x)$ сверху чем-то более просто зависящим от x и вместе с тем ограниченным сверху. Этот процесс надо продолжать до тех пор, пока не появится оценка сверху величиной, от x не зависящей. Это и будет одна из возможных требуемых постоянных.

Конечно, знатоки могут сказать, что есть и другие, более развитые возможности, например, связанные с производной (используемой для нахождения наибольшего или наименьшего значений функции, а также для исследования ее монотонности) или с другими техническими средствами (например, известными неравенствами). Да, мы в курсе этих средств, но на стадии отработки самого понятия ограниченности, на стадии постепенного привыкания к работе с кванторами, нам не хотелось загромождать изложение сильными техническими средствами. Когда понятия будут освоены и вдруг встретится задача установить ограниченность, мы будем выбирать средства из всего спектра.

Можно при анализе ограниченности сверху рассуждать таким образом (это модификация того, о чем мы сообщили выше). Пусть требуется обосновать ограниченность функции f сверху на множестве $X \subset D(f)$. Попытаемся подобрать такую функцию $f_1(x)$, что $f(x) \leqslant f_1(x)$ для всех $x \in X$, и при этом чтобы f_1 была проще, чем f. Тогда если мы сумеем подобрать постоянную C для функции f_1, то она подойдет и для функции f. Если f_1 недостаточно проста, чтобы увидеть требуемую постоянную, то повторим процесс, подбирая другую функцию, пусть f_2, из тех же соображений. Будем поступать так до тех пор, пока не удастся ограничить функцию постоянной. Судя по логике событий, такая постоянная подойдет и для исходной функции. На этом процесс доказательства ограниченности закончится.

Пример 1. Докажем ограниченность сверху функции
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$
на множестве $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$.

Начнем рассуждать, например, так. Чтобы ограничить дробь сверху (числитель по условию неотрицателен), можно ограничить знаменатель снизу и взять такую функцию, где числитель остается прежним, в знаменателе стоит оценка исходного знаменателя снизу. Ясно, что $x^2 + 1 \geqslant 1$, поэтому
$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant x, \quad x \geqslant 0.$$
Мы ограничили сверху нашу функцию другой функцией, ясно проще зависящей от x. Теперь бы ограничить полученную функцию сверху, но, судя по ее виду, нам это сделать не удастся — мы можем брать сколь угодно большие значения x, так что подобрать постоянную не удастся. Можно ли сделать вывод о том, что и наша функция не ограниченная? Нет, можно лишь сделать вывод о том, что предложенный нами путь не привел к успеху. Выходит, наши рассуждения были слишком простыми, а предложенные оценки слишком грубыми.

Посмотрим, в каком месте числовой прямой могут возникнуть проблемы с ограниченностью и по какой причине? Ясно, что проблемы могут быть в связи с возрастанием числителя. Однако и знаменатель при этом также будет возрастать, причем более быстрыми темпами. Уберем эффект возрастания числителя, считая $x > 0$ (это не отразится на доказательстве ограниченности сверху — ведь при $x = 0$ вся дробь равна нулю). Для этого разделим числитель и знаменатель на x:
$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x + 1/x}.$$
Теперь числитель ограничен (более того, там стоит постоянная). Можно ли теперь ограничить знаменатель снизу и чем? Воспользуемся известной оценкой
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$
для $x > 0$ (ее простое обоснование оставим читателю). Тогда, заменяя знаменатель меньшей величиной, можно утверждать, что
$$\frac{1}{x + 1/x} \leqslant \frac{1}{2} \text{ для любого } x > 0,$$

и доказательство ограниченности закончено — мы нашли постоянную, обеспечивающую оценку из определения ограниченности сверху для любого $x \geqslant 0$.

Пример 2. Докажем ограниченность функции

$$\frac{2\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Как и в предыдущем примере, здесь дробь, числитель которой на этот раз ограничен. Заменив стоящую в числителе функцию (отметив положительность знаменателя) ее оценкой сверху, т. е. использовав неравенство $|\sin x| \leqslant 1$, мы всю дробь не уменьшим:

$$\left|\frac{2\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right| \leqslant \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

и если нам удастся подобрать постоянную, ограничивающую функцию $\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, то эта постоянная будет ограничивать и исходную функцию. Для последней функции подобрать такую постоянную легко, заменив знаменатель величиной, меньшей его при всех (допустимых) x:

$$\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x} \leqslant 2, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Постоянная 2 будет границей и первоначальной функции.

Теперь рассмотрим другую комбинацию кванторов, а именно $\forall\,\exists$. Она принципиально отличается от предыдущей тем, что там не было предварительного требования, связанного с квантором всеобщности, и мы сразу могли заняться подбором постоянной границы, а здесь в самом начале стоит требование. Рассмотрим эту ситуацию также на примере, связанном со свойством функции. Воспользуемся отрицанием свойства ограниченности функции на множестве.

Определение. Функцию f называют *неограниченной сверху* (*снизу*) *на множестве* $X \subset D(f)$, если она не обладает свойством соответствующей ограниченности, т. е., обращаясь к отрицанию, если

$$\forall C\ \exists x \in X \quad f(x) > C, \tag{1.4}$$

соответственно

$$\forall C\ \exists x \in X \quad f(x) < C. \tag{1.5}$$

Функцию f называют *неограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если

$$\forall C\ \exists x \in X \quad |f(x)| > C. \tag{1.6}$$

Ясно, что функция неограниченная тогда и только тогда, когда она неограниченная либо сверху, либо снизу.

Обсудим, как доказывать неограниченность функции, например, сверху, и что может служить признаком конца доказательства?

Поскольку здесь есть внешнее, от нас не зависящее требование $\forall C$, мы должны выработать **правило поиска** требуемого далее значения $x \in X$ в зависимости от какого-то нам неизвестного значения C. Здесь ни в коем случае нельзя рассуждать так: коли говорится о любом C, давайте возьмем какое-нибудь значение C, для него все сделаем и этим обоснуем неограниченность. Некорректность такого рассуждения (иногда встречающегося) очевидна — мы подготовимся к какому-то значению C, а поскольку выбор C от нас не зависит, тот, кто может давать конкретные значения C, предложит совсем не то, на что мы рассчитывали, и мы потерпим неудачу. Так как нам неудачи (мы надеемся) ни к чему, надо быть готовыми к любой ситуации, а такую готовность может гарантировать только выработка правила поиска требуемого $x \in X$ по заданному C.

Рассуждение, посвященное подбору x, надо начинать, например, так: пусть дано произвольное C. Этим мы подчеркиваем, что у нас нет желания рассматривать конкретные C, и мы готовы к выработке правила. После этого надо пойти в конец и посмотреть, что от нас ожидают. А от нас ожидают, что мы для произвольного $x \in X$ подберем такое $x \in X$, для которого $f(x) > C$. Как подбирать x, из каких соображений? Можно попробовать, исходя из вида функции f, понять, на какой части множества X есть шанс выбрать требуемое x, и ограничиваться рассмотрением только такой части, продолжая выбор элемента из каких-то своих соображений.

Пример 3. Докажем неограниченность функции $f(x) = x \cos x$.

Будем доказывать неограниченность сверху. Начнем с традиционного «пусть дано произвольное C». Теперь посмотрим на функцию и задумаемся, за счет какого ее фрагмента и в какой части области определения есть шанс найти требуемое x? Ясно, что множитель $\cos x$ ограничен, так что от него лучше бы избавиться, а вот множитель x может дать желаемое значение x. Ограничить снизу все произведение затруднительно — функция $\cos x$ устроена так, что она периодически возвращается к значению 0. Поэтому надо брать такие значения x, на которых $\cos x \neq 0$, лучше всего такие значения, на которых $\cos x = 1$. Это числа вида $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если брать только такие x, то тогда

$$f(x) = f(2\pi n) = 2\pi n,$$

и вопрос встал такой: для произвольного C подобрать $n \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$2\pi n > C.$$

Решая это неравенство относительно n, находим, что можно взять любое целое n, удовлетворяющее неравенству

$$n > \frac{C}{2\pi}.$$

Например, можно взять $n = [C/(2\pi)] + 1$, где квадратные скобки означают целую часть (взятие целой части дает натуральное число, которое может быть меньше чем n, но ненамного, и добавление 1 приведет уже к целому числу, обладающему требуемым свойством).

Правило выбора требуемого x по заданному C сформировано, и этим неограниченность функции f доказана.

Мы доказали неограниченность функции $x \cos x$ сверху, ясно, что она будет и неограниченной снизу.

Определение. Функцию, определенную на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, называют *последовательностью.*

1.15. Задачи. 1. Доказать ограниченность последовательностей

(1) $x_n = \dfrac{2n^2-1}{2+n^2}$, **(2)** $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$,

(3) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$, **(4)** $x_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2-1}$,

(5) $x_n = \sqrt[n]{n}$, **(6)** $x_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n, \quad x > 0.$

2. Доказать неограниченность последовательностей

(1) $x_n = \sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1}$, **(2)** $x_n = \sqrt[n]{n!}$,

(3) $x_n = \dfrac{2^n}{n^2}$, **(4)** $x_n = \dfrac{a^n}{n^k}$, $a > 1$, $k \in \mathbb{R}$.

1.16. Еще одна важная конструкция с последовательностью кванторов $\forall\exists$ связана с точными границами.

Утверждение. *Для непустого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ равенство $z = \sup A$ равносильно тому, что*

(а) *z — верхняя граница A,*

(б) *для любого $y < z$ существует такое $x \in A$, что $y < x$.*

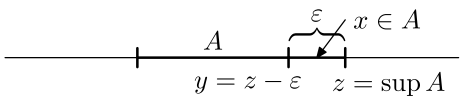

Рис. 1.4.

Если $\sup A \neq +\infty$, то условие (б) можно записать в виде: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x \in A$, что $z - \varepsilon < x$, или что $z - x < \varepsilon$ (рис. 1.4).

Аналогичное утверждение справедливо и для точных нижних границ.

Определение. Число $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ($\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$) называют *точной верхней* (*нижней*) *границей последовательности* x_n и обозначают соответственно через $\sup x_n$ и $\inf x_n$.

1.17. Пример. Найти точные границы последовательности $x_n = \dfrac{n}{n+1} \sin^2 \dfrac{n\pi}{4}$.

Легко заметить, что наша последовательность ограничена сверху единицей, а снизу — нулем. Используя свойства периодичности синуса, можно утверждать, что множитель $\sin^2 \dfrac{n\pi}{4}$ принимает значение 0 на номерах вида $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, значение $1/2$ на номерах вида $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, и значение 1 на номерах вида $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\dfrac{n}{n+1}$ положительна и возрастает. Из этих наблюдений можно сделать вывод, что найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $x_n = 0$ (и таких номеров будет много). Нижняя граница, достигаемая на каком-то элементе, очевидно, будет точной, так что $\inf x_n = 0$. Займемся точной верхней границей. Умножая близкое к единице значение $\dfrac{n}{n+1}$ на единицу (при соответствующих номерах), мы будем получать близкие к единице числа. Это позволяет предположить, что точной верхней границей будет единица. Обоснуем эту гипотезу. Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем номер n вида $4k+2$ и попытаемся подобрать такое $k \in \mathbb{N}$, что $1 - \varepsilon < x_{4k+2}$, т. е. $1 - \varepsilon < \dfrac{4k+2}{4k+3}$. Решая это неравенство, в котором ε считается параметром, а k — искомой величиной, получим, что при $\varepsilon \geq 1$ требуемое неравенство выполнится при любом k, а при $\varepsilon < 1$ — для $k > \dfrac{1-3\varepsilon}{4\varepsilon}$. Итак, правило выбора по заданному $\varepsilon > 0$ требуемого номера n найдено, так что $\sup x_n = 1$.

1.18. Задачи.

1. Найти точные границы последовательностей

(1) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$, **(2)** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$,

(3) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$, **(4)** $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

2. Доказать, что для любых числовых последовательностей x_n, y_n выполнены неравенства

$$\inf x_n + \inf y_n \le \inf(x_n + y_n) \le \inf x_n + \sup y_n \le \sup(x_n + y_n) \le \sup x_n + \sup y_n,$$

а для последовательностей $x_n \ge 0$, $y_n \ge 0$ — неравенства

$$\inf x_n \cdot \inf y_n \le \inf(x_n \cdot y_n) \le \inf x_n \cdot \sup y_n \le \sup(x_n \cdot y_n) \le \sup x_n \cdot \sup y_n.$$

Привести примеры последовательностей, для которых неравенства строгие.

1.19. Последовательность x_n называют *возрастающей*, *неубывающей*, *убывающей* и *невозрастающей*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено соответственно неравенство $x_n < x_{n+1}$, $x_n \le x_{n+1}$, $x_n > x_{n+1}$, $x_n \ge x_{n+1}$. Последовательность, обладающую одним из указанных свойством, называют *монотонной*. Для доказательства монотонности последовательности обычно исследуют знак разности $x_{n+1} - x_n$, а для положительной последовательности можно также пытаться сравнить с 1 отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

1.20. Задача. Доказать, что последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, возрастает и ограничена сверху, а последовательность $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, убывает и ограничена снизу.

§ 2. Предел последовательности

2.1. Пусть даны последовательность x_n и число a. Договоримся о том, как математически выразить интуитивно ясное представление о том, что последовательность x_n неограниченно приближается к числу a, т. е. значения x_n при неограниченном увеличении n становятся всё ближе и ближе к a

Сначала обратимся к геометрической поддержке. Так как *последовательность* — это функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для ее геометрического представления можно использовать график как множество всех упорядоченных пар (n, x_n) на координатной плоскости. Правда, в этом случае сплошной линии, как у графиков обычных функций, не получится, а будет «пунктирное» множество, но это обстоятельство не должно нас смущать.

Изобразим координатную плоскость, на которой по оси абсцисс отметим натуральные $n = 1, 2, \ldots$ и над каждой отмеченной точкой на высоте x_n поместим в виде точки значение x_n последовательности. На оси ординат отметим точку a (рис. 1).

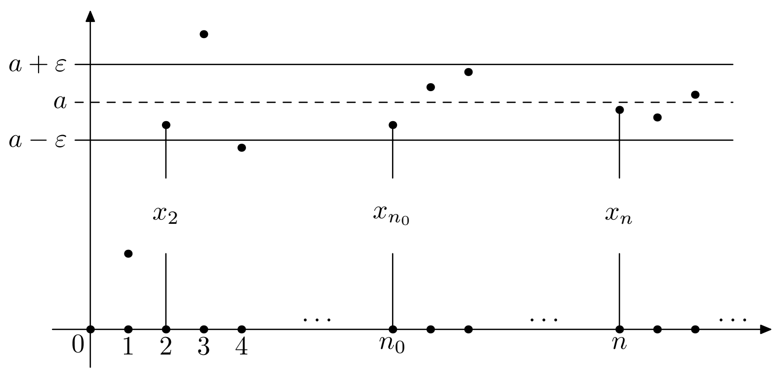

Рис. 1

Поскольку нас интересует неограниченное приближение x_n к a «в перспективе», при далеких номерах n, расположение последовательности при начальных номерах нас не интересует. Представим себе, что есть два участника договоренности: **Вы** и **Я**. Вы намерены убедить меня в том, что последовательность x_n неограниченно приближается к a, и если удастся это сделать, то мы вместе назовем это обстоятельство выражениями «a есть *предел* последовательности x_n» или «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» (последние выражения не следует понимать буквально, это термины, которые означают лишь то, что за ними кроется).

Так как Вы убеждаете меня в неограниченном приближении, Я, естественно, должен проверять, насколько значения x_n отличаются от величины a, для чего приготовлю число, которым буду измерять точность приближения, или, иначе говоря, степень отклонения x_n от a. Естественно, число должно быть положительным. Я буду обозначать его греческой буквой ε. Согласно договору приближение должно быть неограниченным, т. е. надо гарантировать невозможность вставить границу между значениями x_n с далекими номерами и числом a. Это можно гарантировать, например, такой процедурой. Я буду предлагать Вам какое-то, неизвестное Вам заранее значение $\varepsilon > 0$, а от Вас буду ожидать, что Вы обеспечите отклонение x_n от a в пределах заданной точности ε для всех далеких номеров n, т. е. сумеете найти такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ отклонение x_n от a будет в пределах от $-\varepsilon$ до ε. Последнее можно выразить так: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, или так: $|x_n - a| < \varepsilon$. Если Вы не можете обеспечить отклонение x_n от a в пределах заданной мной точности $\varepsilon > 0$ для всех далеких номеров n, то Я не готов согласиться с тем, что x_n неограниченно приближается к a.

Сформулируем договоренность в математических терминах.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ будем называть *пределом последовательности* x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, при этом будем использовать обозначение $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Часть обозначения вида $n \to \infty$ подчеркивает, что мы оцениваем близость x_n к a при неограниченном возрастании номеров n. Часто в этом случае говорят «при n, стремящемся к бесконечности». Заметим однако, что каждое число находится на своем месте и никуда не стремится, тем самым эту фразу не следует воспринимать буквально. Это всего лишь фрагмент термина, за которым скрывается определенное содержание. Поскольку ни при каких других обстоятельствах мы оценивать отклонение x_n от a не будем, в обозначениях часть $n \to \infty$ иногда (даже, скорее всего, всегда, если достаточно ясно, по какой переменной происходит переход к пределу) будем опускать и писать просто $a = \lim x_n$.

Тот факт, что $a = \lim x_n$, выражают также словами «последовательность x_n *сходится* (или *стремится*) к a» и записывают $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ или, короче, $x_n \to a$.

Если последовательность имеет (конечный) предел, то ее называют *сходящейся*.

Обсудим, как доказывать тот факт, что $a = \lim x_n$, и выработаем признак конца доказательства. Поскольку конструкция предела последовательности похожа на конструкцию неограниченности функции, ясно, что и обсуждение будет аналогичным рассмотрению свойства неограниченности.

Поскольку здесь есть внешнее, от нас не зависящее требование $\forall\varepsilon > 0$, мы должны выработать **правило поиска** требуемого далее значения $n_0 \in \mathbb{N}$ в зависимости от какого-то нам неизвестного значения ε. Рассуждение, посвященное подбору n_0, надо начинать, например, так: пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Этим мы подчеркиваем, что готовы к выработке правила. После этого надо пойти в конец и посмотреть, что от нас ожидают. А от нас ожидают, что мы для произвольного $n \geqslant n_0$ гарантируем оценку $|x_n - a| < \varepsilon$, где n_0 нам предстоит указать.

Для выбора номера n_0, начиная с которого будет выполнена требуемая оценка, попробуем *ограничить сверху разность* $|x_n - a|$ *чем-то более простым, но все еще малым.* Иначе говоря, попробуем подобрать такую последовательность a_n, что $|x_n - a| \leqslant a_n$ и есть шанс подобрать по заданному $\varepsilon > 0$ номер n_0 для последовательности a_n так, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Если ясно, как это сделать, то найденный номер n_0 подойдет и для разности $|x_n - a|$ — она ведь не больше чем a_n и тем более будет меньше чем ε. Если еще недостаточно видно, как подобрать номер для последовательности a_n, то, в свою очередь, можно попробовать ограничить ее другой последовательностью, более простой, но все еще малой. И так продолжать процесс до тех пор, пока не появится последовательность, для которой требуемый номер найти уже легко. Как только нам удастся выработать правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$, доказательство закончится.

Можно рассуждать несколько иначе. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Обратимся к тому, что от нас потребуется. Мы должны обеспечить выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех достаточно далеких номеров n. Поставим вопрос: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Иначе говоря, из какого соотношения это неравенство вытекает? Если взять последовательность a_n такую, что $|x_n - a| \leqslant a_n$, и найти номер n_0 такой, что $a_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$, то для этих же номеров n будет выполнено и требуемое неравенство. Если для последовательности a_n выбор номера затруднен, то процесс можно продолжить и вновь обратиться к вопросу: откуда можно получить выполнение такого неравенства? Ответ на него может привести к другой последовательности, и так следует продолжать процесс до тех пор, пока не найдется такая последовательность, для которой выбор номера тривиален.

Эти рассуждения относятся, скорее, к доказательству равенства $a = \lim x_n$ для конкретной последовательности x_n. Отчасти их можно применять и тогда, когда речь идет о доказательстве утверждений с участием предела. Однако если для конкретной последовательности выбор номера обеспечивается ограничением сверху какими-то также конкретными последовательностями, то в утверждениях выбор требуемого номера, как правило, обеспечивается ограничениями сверху, исходящими из предельных свойств, данных в условии.

Пример 4. Докажем, что

$$\lim \frac{n \sin n^2}{n^4+1} = 0. \tag{2.7}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Пойдем в конец определения предела последовательности и посмотрим, что от нас будут ожидать. От нас потребуется обеспечить выполнение неравенства

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4+1} \right| < \varepsilon$$

для всех далеких номеров. Попробуем ограничить левую часть последнего неравенства сверху чем-то более простым, но все еще малым. Заметив, что $|\sin n^2| \leqslant 1$, имеем

$$\left| \frac{n \sin n^2}{n^4+1} \right| \leqslant \frac{n}{n^4+1}.$$

Легко ли подобрать требуемый номер, исходя из новой последовательности, т. е. насколько легко выразить n через ε из неравенства

$$\frac{n}{n^4+1} < \varepsilon?$$

По-видимому, не столь легко, сколь хотелось бы. Поэтому попробуем ограничить выражение $\dfrac{n}{n^4+1}$ сверху сверху чем-то более простым, но все еще малым. Уменьшив знаменатель, мы увеличим дробь, поэтому

$$\frac{n}{n^4+1} \leqslant \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Легко ли выразить n через ε из неравенства $\dfrac{1}{n^3} < \varepsilon$? Легко. Можно выразить, а можно еще облегчить выражение, если заметить, что $\dfrac{1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n}$, а из неравенства $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ выразить n через ε совсем легко. Последнее неравенство равносильно тому, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, и в качестве требуемого номера n_0 можно взять любое натуральное число, большее чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Например, можно взять $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где взятие целой части (символизируют квадратные скобки) «обнатураливает» дробь $\dfrac{1}{\varepsilon}$, при этом, возможно, немного уменьшая ее, а добавление единицы делает результат бóльшим, чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Если $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то для любого $n \geqslant n_0$ тем более $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, а тогда, пользуясь логикой предыдущих рассуждений, можно гарантировать, что для таких номеров также

$$\left|\frac{n \sin n^2}{n^4+1}\right| < \varepsilon.$$

Правило выбора требуемого номера n_0 по заданному ε сформировано, значит, соотношение (2.7) доказано.

Покажем, как происходит выбор номера в доказательствах утверждений, связанных с пределом. Для этого сформулируем и докажем теорему о пределе произведения двух сходящихся последовательностей.

Пример 5. Теорема о произведении двух сходящихся последовательностей. *Пусть последовательности x_n и y_n сходятся и*

$$a = \lim x_n, \quad b = \lim y_n.$$

Тогда последовательность $x_n y_n$, представляющая собой произведение данных последовательностей, также сходится и при этом

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Коротко об утверждении этой теоремы говорят так: *предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов.*

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность $|x_n y_n - ab|$ с целью выработать такое правило выбора номера n_0, зависящего, разумеется, от ε, что для всех следующих за ним номеров n будет $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$.

Ясно, что без использования условия нам не обойтись. Что же нам дано в условии? Распишем по определению данные в условии предельные соотношения:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \, \exists n_1 \, \forall n \geqslant n_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon_1, \tag{2.8}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0\, \exists n_2\, \forall n \geqslant n_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon_2. \tag{2.9}$$

Обратим внимание на то, что утверждения (2.8) и (2.9) нам даны по условию, поэтому величины ε_1 и ε_2 мы можем выбирать по нашему усмотрению и использовать гарантируемые числа n_1, n_2 в наших целях.

Для использования утверждений (2.8), (2.9) надо оценить сверху разность $|x_n y_n - ab|$ так, чтобы участвовали разности $|x_n - a|$ и $|y_n - b|$. Затем, беря ε_1 и ε_2 в зависимости от данного $\varepsilon > 0$, с учетом проводимых оценок получим сначала номера n_1 и n_2, а затем на их основе обеспечим требуемый номер n_0 для разности $|x_n y_n - ab|$.

Воспользуемся мощным методом доказательства, заключающемся в прибавлении нуля. Это безопасная операция, так как она ничего не изменяет. Конечно, нуль прибавлять будем не просто так, а в виде добавления к разности $x_n y_n - ab$ какого-то выражения и одновременного его вычитания. Успех применения метода зависит от подбора добавляемого и вычитаемого выражения. Нам хотелось связать нашу разность с теми разностями, о которых говорится в условии, т. е. с разностями $x_n - a$ и $y_n - b$. Поэтому неудивительно, что мы добавим к разности $x_n y_n - ab$ и отнимем от нее, например, выражение $a y_n$ (или $b x_n$). Производя нехитрые действия и пользуясь неравенством треугольника, получим

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \\ &= |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Итак, мы ограничили нашу разность сверху чем-то более связанным с условием, чем сама разность. Займемся правой частью неравенства. Чтобы сумму сделать меньшей чем ε, достаточно сделать каждое из слагаемых, например, меньшим чем $\varepsilon/2$.

Первое слагаемое представляет собой произведение $|x_n - a||y_n|$, из множителей которого первый можно сделать сколь угодно малым. Проделаем процедуру, показывающую, как учесть наличие второго множителя. Так как $\lim y_n = b$, имеет место высказывание (2.9), взяв в котором в качестве ε_2, например, число 1 (мы можем это сделать, ибо (2.9) нам дано по условию), получим существование такого номера n', что $|y_n - b| < 1$ для любого $n \geqslant n'$, откуда, вновь используя прибавление нуля, получаем, что

$$|y_n| = |y_n - b + b| \leqslant |y_n - b| + |b| < 1 + |b|$$

для любого $n \geqslant n'$.

Мы подготовились к выработке правила выбора номера, начиная с которого первое слагаемое будет меньше чем $\varepsilon/2$. Поскольку высказывание (2.8) нам дано по условию, мы вправе выбрать в нем в качестве ε_1 любое положительное число. Возьмем $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$. Тогда согласно (2.8) существует номер n_1 такой, что $n_1 \geqslant n'$ и для любого $n \geqslant n_1$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}. \tag{2.11}$$

Перейдем ко второму слагаемому. С ним дело обстоит проще, чем с первым, так как в нем множитель при модуле разности постоянен. Если $a = 0$, то вторе слагаемое равно нулю и заведомо меньше чем $\varepsilon/2$ при любом n. Пусть $a \neq 0$. Высказывание (2.9), в котором в качестве ε_2 возьмем величину $\dfrac{\varepsilon}{2|a|}$, гарантирует наличие номера n_2 такого, что для любого $n \geqslant n_2$ будет

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}. \tag{2.12}$$

Если в качестве номера n_0 взять наибольший из номеров n_1, n_2, т. е. положить $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то для $n \geqslant n_0$ выполнены одновременно соотношения (2.11) и (2.12). Следовательно, для любого $n \geqslant n_0$ (считая $a \neq 0$, для $a = 0$ ситуация только упрощается) имеем

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \\ &\leqslant |y_n|\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, правило выбора требуемого номера n_0 по заданному $\varepsilon > 0$ выработано, значит, утверждение доказано.

2.3. Задачи.

1. Доказать равенства

(1) $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$, **(2)** $\lim \dfrac{1}{n!} = 0$,

(3) $\lim \dfrac{n^2 \sin n!}{(n+1)^3} = 0$, **(4)** $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

2. Доказать равенства

(1) $\lim \dfrac{2^n}{n!} = 0$, **(2)** $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$,

(3) $\lim \dfrac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1,$ **(4)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0,\ a > 1,\ k \in \mathbb{R},$

(5) $\lim \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0,$ **(6)** $\lim nq^n = 0,\ |q| < 1,$

(7) $\lim \sqrt[n]{n} = 1,$ **(8)** $\lim \dfrac{\log_a n}{n} = 0,$ **(9)** $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

3*. Доказать, что если последовательность x_n сходится, то последовательность средних арифметических $a_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ также сходится, при этом $\lim a_n = \lim x_n$. Обратное неверно.

2.4. Говорят, что предел последовательности x_n равен $+\infty$ или $-\infty$, или ∞ и пишут соответственно $\lim x_n = +\infty$, $\lim x_n = -\infty$, $\lim x_n = \infty$, если

$$(\forall \mathrm{E} > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\ x_n > \mathrm{E} \quad (\text{соответственно } x_n < -\mathrm{E},\ |x_n| > \mathrm{E}).$$

О последовательности с бесконечным пределом говорят, что она *бесконечно большая.* Если последовательность имеет конечный предел, ее называют *сходящейся.* Если $\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, то говорят, что последовательность *имеет предел* (в $\overline{\mathbb{R}}$).

2.5. Задачи.

1. Доказать, что последовательность $x_n = n^2 \cos \dfrac{n\pi}{2}$ неограниченная, но не является бесконечно большой.

2. Доказать, что

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\log_a n)^p = +\infty$, $a > 1$, $p \geq 1$;

(2) $\lim(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n}) = +\infty$;

(3) $\lim(4\sqrt{n} - n) = -\infty$; **(4)** $\lim \dfrac{2}{1 - \sqrt[n]{n}} = -\infty.$

2.6. Утверждение. *Если x_n, y_n — сходящиеся последовательности и $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, то последовательности $x_n + y_n$, $x_n \cdot y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ также сходятся (последняя при условии $y \neq 0$), при этом*

$$\lim(x_n + y_n) = x + y, \quad \lim x_n y_n = xy, \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

2.7. Задачи.

1. Пусть последовательность x_n сходится, а y_n расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей $x_n + y_n$, $x_n y_n$?

2*. Распространить утверждения п. 2.6 на случай, когда предел лежит в $\overline{\mathbb{R}}$, т. е. может быть бесконечным — сформулировать и доказать соответствующие результаты.

2.8. Как можно заметить, в определении предела участвует само значение предела. Однако бывает важно всего лишь знать, сходится последовательность или нет. Сформулированный ниже критерий дает принципиальную возможность судить о сходимости числовой последовательности, не прибегая к значению ее предела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность x_n называют *фундаментальной*, или *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall m > n_0\, \forall n > n_0) \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Условие фундаментальности иногда удобно использовать в следующем виде:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n > n_0\, \forall p \geq 0) \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Критерий Коши. *Для существования конечного предела числовой последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

2.9. Задачи.

1. Используя критерий Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n, \quad |a_k| \leq M,\ k = 0, 1, \dots,\ |q| < 1; \tag{1}$$

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}; \tag{2}$$

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}; \tag{3}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}. \tag{4}$$

2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

3. Говорят, что *последовательность x_n имеет ограниченное изменение*, если существует такое число C, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_n - x_{n-1}| \leq C$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится. Обратное неверно (построить пример).

2.10. Пусть x_n — последовательность, а n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т. е. $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$. Последовательность $y_k = x_{n_k}$, т. е. композицию данной последовательности и строго возрастающей последовательности номеров, называют *подпоследовательностью последовательности* x_n.

Если какая-то подпоследовательность последовательности имеет предел, его называют *частичным пределом данной последовательности.*

Теорема. *Из всякой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую предел* (в $\overline{\mathbb{R}}$). *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема (о сходимости монотонной последовательности). *Всякая монотонная последовательность имеет предел* (в $\overline{\mathbb{R}}$). *Если при этом последовательность возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то она сходится* (в $\mathbb{R}$).

2.11. Задачи.

1. Найти частичные пределы последовательностей из задачи 1.18.1.

2. Построить последовательность, имеющую частичными пределами данные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

3. Построить последовательность, имеющую частичными пределами данные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

2.12. Пусть x_n — последовательность вещественных чисел. Составим последовательности

$$y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}, \quad z_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Последовательность y_n невозрастающая, а z_n неубывающая. Их пределы называют соответственно *верхним* и *нижним* пределами данной последовательности и обозначают через $\overline{\lim}\, x_n$ (или $\limsup x_n$) и $\underline{\lim}\, x_n$ (или $\liminf x_n$).

2.13. Задача. Показать, что верхний и нижний пределы суть наибольший и наименьший из частичных пределов соответственно.

2.14*. Задачи.

1. Пусть $\overline{\lim} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, где $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim x_n = 0$.

2. Пусть последовательность x_n такова, что $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$. Доказать, что $\dfrac{x_n}{n} = a$.

3. Пусть $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, где $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что существует $\lim x_n$ и найти его.

4. Пусть $a > 0$, $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что существует $\lim x_n$ и найти его.

5. Пусть $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, где $y \neq 0$ и $y_1 + y_2 + \cdots + y_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = \frac{x}{y}.$$

6. Пусть $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x$. Доказать, что $\lim \sqrt[n]{x_n} = x$.

§ 3. Предел функции

3.1. Возьмем точку p в расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ и определим понятие окрестности такой точки. Если $p \in \mathbb{R}$, т. е. точка p конечна, то окрестностью ее будем считать любой промежуток вида $(p - r, p + r)$, где $r > 0$. Если же $p = +\infty$, то окрестностью будет считать любой промежуток $(r, +\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, для $p = -\infty$ — промежуток $[-\infty, r)$, $r \in \mathbb{R}$, и окрестностями «беззнаковой» бесконечности будем считать множества $\{x \in \mathbb{R} : |x| > r\}$, $r > 0$.

Точку p называют *предельной точкой множества* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если в любой ее окрестности есть точка множества X, отличная от p. Говоря о пределе функции в точке, мы всегда, не оговаривая каждый раз, будем предполагать, что эта точка предельная для области определения функции.

Пусть даны функция f и точка a, предельная точка области ее определения.

Определение. Число $l \in \overline{\mathbb{R}}$ называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если **для любой окрестности** U **точки** l **найдется окрестность** V **точки** a **такая, что для любого** $x \in V \cap D(f)$, $x \neq a$**, выполнено включение** $f(x) \in U$. При этом используют такие обозначения: $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, и говорят, что l есть *предел* $f(x)$ *при* x*, стремящемся к* a, или что f *сходится к* l *при* x*, стремящемся к* a.

Используя определение окрестности конечной или бесконечной точки из $\overline{\mathbb{R}}$, можно дать символьное описание факта сходимости. Так, если $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, то соотношение $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in (a - \delta, a + \delta),\ x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

или

$$(\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x,\ |x - a| < \delta,\ x \neq a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Теорема (определение предела функции с использованием предела последовательности). *Пусть даны функция f и точка a, предельная точка области ее определения. Число $l \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке a в том и только в том случае, если для любой последовательности x_n из $D(f)$ такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l.$$

Сформулированный критерий бывает полезен при доказательстве отсутствия какого-либо предела у функции f в точке a: достаточно найти две последовательности x'_n, x''_n, удовлетворяющие указанным в теореме требованиям и такие, что $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(x''_n)$.

3.2. Задача. Записать в терминах $\varepsilon - \delta$ следующие соотношения, в которых предполагается, что $a, l \in \mathbb{R}$:

(1)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l,$	**(2)**	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l,$
(3)	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty,$	**(4)**	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty,$
(5)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty,$	**(6)**	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty,$
(7)	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty,$	**(8)**	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$

3.3. Говорят, что l есть *предел $f(x)$ в точке a слева* (или *при x, стремящемся к a слева* (*справа*), если для любой окрестности U точки l можно указать такую окрестность V точки a, что для всех $x \in V$ таких, что $x < a$ (соответственно $x > a$) выполнено соотношение $f(x) \in U$. При этом используют обозначения $l = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $l = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ соответственно. О пределах слева и справа говорят как об *односторонних пределах.*

Для $a, l \in \mathbb{R}$ в терминах $\varepsilon - \delta$ понятия пределов слева и справа записываются соответственно так:

$$(\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x,\ a - \delta < x < a) \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$(\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x,\ a < x < a + \delta) \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

3.4. Задача. В терминах $\varepsilon - \delta$ выписать следующие утверждения:

(1) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, **(2)** $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$,
(3) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$, **(4)** $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$.

3.5. Приведем формулировки теорем о пределах, которые будут использованы ниже при нахождении пределов конкретных функций.

Теорема (о связи предела с арифметическими операциями). *Пусть даны функции f, g, заданные на множестве X, и точка a, предельная точка множества X. Предположим, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)$. Тогда существуют пределы $\lim\limits_{x \to a}(f + g)(x)$, $\lim\limits_{x \to a}(f \cdot g)(x)$, а если $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, то и предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x)$, при этом*

$$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x), \qquad \lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

Теорема (о пределе композиции, или о замене переменной). *Предположим, что существуют пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{y \to l} g(y) = b$ в расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Предположим, что, кроме того, выполняется по крайней мере одно из условий*

(1) *для x из некоторой окрестности точки a, $x \neq a$, будет $f(x) \neq l$,*
(2) *точка l входит в область определения функции g и $\lim\limits_{y \to l} g(y) = g(l)$* (т. е. g непрерывна в точке l).

Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = b$.

В случае выполнения условия (2) теоремы ее результат можно записать в виде $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to a} f(x))$, т. е. знак предела можно внести внутрь функции g.

Применение теоремы о замене переменной обычно происходит следующим образом. Допустим, нам надо найти предел функции $h(x)$ при $x \to a$. Допустим, нам удалось так преобразовать данную функцию, что в ней оказался выделенным какой-то блок, который мы могли бы обозначить новой буквой, т. е. нам удается представить функцию $h(x)$ в виде композиции $h(x) = g(f(x))$. Если мы теперь положим $y = f(x)$ и найдем, что выполнены условия теоремы о пределе композиции, т. е. существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, существует $\lim\limits_{y\to l} g(y) = b$, а также выполнены условия пунктов (1) или (2) теоремы, то результат ее гарантирует существование предела $\lim\limits_{x\to a} h(x)$, равного b. Иначе говоря, нахождение предела сложной функции эта теорема позволяет сводить к нахождению пределов более простых функций, ее составляющих.

Теорема (о пределе монотонной функции). *Пусть функция f возрастает на множестве $(a-r,a)\cap D(f)$ или на множестве $(a,a+r)\cap D(f)$ при некотором $r>0$. Тогда существуют соответственно*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D(f),\ x \in (a-r,a)\},$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D(f),\ x \in (a,a+r)\}.$$

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для убывающей вблизи точки a функции.

Теорема (о пределе произведения бесконечно малой на ограниченную). *Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, а функция g ограничена в некоторой окрестности точки a. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.*

Теорема (критерий Коши существования конечного предела функции в точке) *Пусть даны функция f и точка a, предельная точка области ее определения. Для существования конечного предела функции f в точке a необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такую окрестность V точки a, что для любых $x', x'' \in V$ таких, что $x' \neq a$, $x'' \neq a$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

3.6. При нахождении пределов мы будем использовать небольшой набор пределов, называемых обычно *замечательными пределами.* В нем собраны пределы, отражающие предельные свойства основных элементарных функций:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e, \tag{3.1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \tag{3.2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \tag{3.3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{3.4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu, \quad \mu\in\mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Кроме выписанных мы будем также использовать равенство, отражающее сравнительный рост показательной и степенной функций:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{для любых } a>1,\ \alpha\in\mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Приступая к нахождению предела конкретной функции, в первую очередь надо поставить вопрос: как устроена функция? Если она получается из других функций как результат арифметических операций, т. е., например, это сумма, или произведение, или частное конечного числа функций, то надо обратиться к теоремам о связи предела и арифметических операций и проанализировать, выполнены ли их условия. Если это сложная функция, то надо посмотреть, выполнены ли условия теоремы о пределе композиции.

Если условия теорем выполнены, то надо воспользоваться их результатами и получить значение предела. Хуже, если какие-то условия этих теорем не выполнены. Так бывает, например, когда рассматривается предел отношения, но пределы знаменателя и числителя равны нулю или бесконечны. В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность соответствующего вида, например, вида $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, и при нахождении предела такую неопределенность надо «раскрыть», т. е. провести такие преобразования, которые привели бы к выполнению условий соответствующих теорем. Кроме указанных встречаются также неопределенности вида 0^0, $0\cdot\infty$, 1^∞ — это значит, что рассматриваются соответственно пределы $\lim\limits_{x\to p} f(x)^{g(x)}$ ($f(x)>0$), $\lim\limits_{x\to p} f(x)\cdot h(x)$, $\lim\limits_{x\to p} l(x)^{h(x)}$, где $\lim\limits_{x\to p} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to p} h(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to p} l(x)=1$. Для раскрытия первых двух полезно иметь в виду соотношения

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}, \quad f(x)h(x) = \frac{f(x)}{1/h(x)} = \frac{h(x)}{1/f(x)}.$$

В случае неопределенности вида 1^∞ можно обратиться к замечательному пределу (1) либо использовать равенство $a^b = e^{b\ln a}$.

Когда мы говорим о неопределенности какого-то вида, например, вида 1^∞, не надо эту запись понимать буквально, как будто мы единицу возводим в бесконечную степень! Это всего лишь символическое (вводимое для удобства) обозначение того факта, что рассматривается предел вида $\lim\limits_{x\to a} l(x)^{h(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} l(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \infty$.

При нахождении пределов мы будем использовать следующее легко устанавливаемое равенство:

$$\lim_{x\to p} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to p} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to p} g(x)\ln f(x)},$$

если только $\lim\limits_{x\to p} g(x)\ln f(x)$ существует (хотя бы бесконечный). В частности, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = a^b. \tag{3.6}$$

Опишем технологию нахождения пределов с использованием замечательных пределов (3.1)–(3.5) и предела (∗), дающего сравнение скорости роста (или убывания) степенной и показательной функций.

Сначала надо понять, каким из замечательных пределов, скорее всего, можно воспользоваться. Для этого отметим основные отличительные их особенности. Во-первых, во всех них предел рассматривается в нуле. Во-вторых, если есть тригонометрическая функция в рассматриваемом пределе, то может участвовать предел (3.2). Если есть степень, в которой переменная в основании и в показателе степени, то надо обратиться к пределу (3.1). Если есть степень, в которой основание постоянно, — посмотреть на предел (3.3). Если переменная в основании, а в показателе степени константа, то идем к (3.5). Наконец, наличие логарифма говорит об обращении к пределу (3.4).

Следующий шаг — анализ необходимых условий использования этих пределов. Первое необходимое условие уже было отмечено — все эти пределы рассматриваются в нуле. Перечислим другие необходимые условия для каждого из пределов (3.1)–(3.5).

Начнем с (3.1). Как отмечено выше, к этому пределу мы обращаемся, когда есть степень, в основании и в показателе которой находится переменная, т. е. когда функция, предел которой надо найти, имеет вид

$$\varphi(x)^{\psi(x)}$$

и рассматривается предел, допустим, в некоторой точке a. Первое, чем мы интересуемся, верно ли, что $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=1$, и если нет, то повода обратиться к пределу (3.1) нет. Допустим, что да. В таком случае выделяем в основании единицу. Это иногда делается вынесением множителя за скобки, но чаще всего прибавлением нуля в основании, т. е. прибавлением к $\varphi(x)$ единицы и ее вычитанием. При этом прибавленная единица остается отдельно, а вычтенная группируется с $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=1+(\varphi(x)-1).$$

Теперь уже

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x)-1)=0,$$

и мы частично подготовились к виду (3.1). Для использования (3.1) не хватает в показателе степени величины, обратной к $\varphi(x)-1$. Обеспечим ее, разделив показатель степени и умножив его на $\varphi(x)-1$. При этом выражение, ушедшее в знаменатель, учтем в замечательном пределе, а выражение, поступившее в числитель, рассмотрим вместе с бывшим показателем степени. Запишем формально эту серию преобразований:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\varphi(x)^{\psi(x)}&=\lim_{x\to a}(1+(\varphi(x)-1))^{\psi(x)}=\\&=\lim_{x\to a}(1+(\varphi(x)-1))^{\frac{1}{\varphi(x)-1}\cdot(\varphi(x)-1)\cdot\psi(x)}=\\&\lim_{x\to a}((1+(\varphi(x)-1))^{\frac{1}{\varphi(x)-1}})^{(\varphi(x)-1)\cdot\psi(x)}.\end{aligned}$$

Основание степени в последнем выражении имеет пределом число e согласно (3.1), поэтому можно сосредоточиться на нахождении предела функции, стоящей в показателе степени, и если он есть, допустим, $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)-1)\cdot\psi(x)=b$, то

$$\varphi(x)^{\psi(x)}=e^b.$$

К пределу вида (3.2) надо обращаться, когда функция устроена так, что в ней есть синус от функции, имеющей пределом 0, т. е. когда рассматривается предел типа

$$\lim_{x\to a}\psi(x)\cdot\sin\varphi(x).$$

Первое, чем мы интересуемся, будет ли $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, и если нет, то повода использовать предел (3.2) нет. Допустим, что $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$. В таком случае для использования (3.2) на хватает величины $\varphi(x)$ в знаменателе. Обеспечим ее, разделив и умножив все выражение на $\varphi(x)$:

$$\lim_{x\to a}\psi(x)\cdot\sin\varphi(x) = \lim_{x\to a}\psi(x)\cdot\varphi(x)\cdot\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)},$$

после чего можно сосредоточиться на пределе $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\cdot\varphi(x)$, и если он есть, то можно воспользоваться пределом (3.2) и теоремой о пределе произведения.

К пределу вида (3.3) надо обращаться в том случае, если мы заметим степень, в основании которой стоит константа, т. е. рассматривается предел вида

$$\lim_{x\to a}c^{\varphi(x)}\cdot\psi(x).$$

Первое, чем надо поинтересоваться, верно ли, что $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, и если нет, то предел (3.3) здесь не используется. Если да, то идем дальше и смотрим, вычитается ли единица от $c^{\varphi(x)}$. Если нет, то стараемся организовать ее путем либо вынесения множителя за скобки (что редко) либо вычитанием и прибавлением единицы (что значительно чаще), например так:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}c^{\varphi(x)}\cdot\psi(x) = \lim_{x\to a}(c^{\varphi(x)} - 1 + 1)\cdot\psi(x) =\\ &= \lim_{x\to a}((c^{\varphi(x)} - 1)\cdot\psi(x) + \psi(x)).\end{aligned}$$

Нахождение предела $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)$ — отдельная задача,допустим, что он есть. Тогда сосредоточимся на пределе

$$\lim_{x\to a}(c^{\varphi(x)} - 1)\cdot\psi(x).$$

Видим, что для использования (3.3) не хватает знаменателя. Организуем его путем умножения на единицу:

$$\lim_{x\to a}(c^{\varphi(x)} - 1)\cdot\psi(x) = \lim_{x\to a}\frac{c^{\varphi(x)} - 1}{\varphi(x)}\cdot\varphi(x)\cdot\psi(x),$$

и теперь если есть предел $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\psi(x)$, то можем воспользоваться пределом (3.3) и теоремой о пределе произведения.

К пределу (3.4) обращаемся, когда в нашем выражении нашелся натуральный логарифм, т. е. когда ищется предел вида

$$\lim_{x\to a} \psi(x) \cdot \ln \varphi(x).$$

Первое условие применимости (3.4) — это равенство $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$, и если это так, то выделяем внутри логарифма единицу путем прибавления нуля:

$$\varphi(x) = 1 + (\varphi(x) - 1),$$

и переходим дальше. Умножим и разделим все выражение на $\varphi(x)-1$:

$$\lim_{x\to a} \psi(x) \cdot \ln \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) \cdot \ln(1 + (\varphi(x) - 1)) =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{\ln(1 + (\varphi(x) - 1))}{\varphi(x) - 1} \cdot (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x),$$

и если есть предел $(\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x)$, то используем теорему о пределе произведения и (3.4).

Наконец, к формуле (3.5) обращаемся в том случае, если у нас есть степень, в показателе которой стоит константа, т. е. рассматривается предел вида

$$\lim_{x\to a} (\varphi(x))^\alpha \cdot \psi(x).$$

Сначала смотрим, будет ли $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$, и если да, то начинаем процедуру приведения к виду (3.5): к основанию степени добавляем единицу и вычитаем ее, выделяя добавленную единицу отдельно:

$$\lim_{x\to a} (\varphi(x))^\alpha \cdot \psi(x) = \lim_{x\to a} (1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha \cdot \psi(x).$$

Мы получили фрагмент вида $(1+z)^\alpha$. Не хватает вычитаемой из него единицы. Обеспечим:

$$\lim_{x\to a} (1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha \cdot \psi(x) =$$
$$= \lim_{x\to a} ((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1 + 1) \cdot \psi(x) =$$
$$= \lim_{x\to a} (((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1) \cdot \psi(x) + \psi(x)).$$

Допустим, что есть конечный предел $\lim\limits_{x\to a} \psi(x)$. Тогда займемся первым слагаемым. Подстроим так, чтобы в знаменателе стояла та величина, которая прибавляется к 1 в основании степени в числителе. Разделим на нее и умножим. Имеем

$$\lim_{x\to a} ((1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1) \cdot \psi(x) =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{(1 + (\varphi(x) - 1))^\alpha - 1}{\varphi(x) - 1} \cdot (\varphi(x) - 1) \cdot \psi(x),$$

и если существует предел $(\varphi(x)-1)\cdot\psi(x)$, то можно воспользоваться теоремой о пределе произведения и соотношением (3.5).

Возможно, что в некоторых моментах описанные процедуры показались вам громоздкими. Постарайтесь вычленить содержание выполняемых шагов и применять именно эту информацию, в конкретных случаях все будет значительно проще.

3.7. Примеры.

1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

Заметим, что мы имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, так как предел числителя и предел знаменателя равны бесконечности. Преобразуем знаменатель, выделив отдельно стремящуюся к бесконечности переменную: $(2x-1)^4 = x^4(2-1/x)^4$. Совершая аналогичное преобразование в числителе и применяя теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{x^4(2-1/x)^4}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+1/x)^2(3/x-7)^2}{(2-1/x)^4} = \frac{49}{16}.$$

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$.

Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $\infty-\infty$ (ранее в тексте не отмеченной, ибо такие неопределенности проще раскрывать с помощью преобразований конкретных выражений). Умножив и разделив на сумму корней, а затем применив теорему о пределе отношения, получим

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}} = 0,$$

ибо знаменатель стремится к ∞.

Найдем этот предел иначе. Вынося из-под корня переменную x, получим

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x^2}-\sqrt{1+1/x^2}}{1/|x|} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1+y^2}}{y}$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{(1-y^2)^{1/2}-1+(1-(1+y^2)^{1/2})}{y}$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{(1-y^2)^{1/2}-1}{-y^2}\cdot(-y)+\lim_{y\to 0}\frac{1-(1+y^2)^{1/2}}{y^2}\cdot y = 0,$$

где сделана замена $y = 1/|x|$ и использованы соответствующие теоремы.

3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$.

Легко заметить, что здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$. В числителе стоят кубические корни, т. е. степенные функции, и нам желательно узнать, можно ли будет применить замечательный предел, связанный со степенной функцией. Для это надо, чтобы предел подкоренного выражения был равен единице (поскольку в соответствующем пределе (3.5) участвует выражение вида $(1+x)^\mu$, где $x\to 0$). У нас требуемое свойство выполняется, ибо $\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x = 1$. Для того чтобы использовать замечательный предел, надо подкоренное выражение представить в виде $1+t$, где $t\to 0$. Это сделать легко, прибавив и отняв под корнем единицу: $\cos 4x = 1+(\cos 4x-1)$, $\cos 5x = 1+(\cos 5x-1)$. Теперь проведем необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+(\cos 4x-1)}-\sqrt[3]{1+(\cos 5x-1)}}{1-\cos 3x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)-((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{1-\cos 3x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)-((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{((1+(\cos 4x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)}-\frac{((1+(\cos 5x-1))^{1/3}-1)}{2\sin^2(3x/2)} = L.$$

Для возможности использования замечательного предела умножим и разделим соответствующие дроби на стремящиеся к нулю выражения

$\cos 4x - 1$, $\cos 5x - 1$, сделаем подходящую группировку и займемся возникшими дробями:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{((1+(\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 4x - 1} \cdot \frac{\cos 4x - 1}{2\sin^2(3x/2)} - \frac{((1+(\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 5x - 1} \cdot \frac{\cos 5x - 1}{2\sin^2(3x/2)}$$

Используя теорему о замене переменной и предел (3.5), имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{((1+(\cos 4x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 4x - 1} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{((1+(\cos 5x - 1))^{1/3} - 1)}{\cos 5x - 1} = \frac{1}{3}.$$

Займемся пределами

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{2\sin^2(3x/2)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x - 1}{2\sin^2(3x/2)}.$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{2\sin^2(3x/2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2(4x/2)}{2\sin^2(3x/2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2(4x/2)}{(4x/2)^2} \cdot \frac{(4x/2)^2}{(3x/2)^2} \cdot \frac{(3x/2)^2}{\sin^2(3x/2)} = -\frac{16}{9}.$$

Аналогично

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x - 1}{2\sin^2(3x/2)} = -\frac{25}{9}.$$

Собирая полученные результаты, имеем

$$L = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{25}{9}\right) = \frac{1}{3}.$$

4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{-1/x^2}$.

Заметим, что в этом примере мы имеем дело с неопределенностью вида 1^∞, которая связана с пределом (3.1). Чтобы воспользоваться указанным пределом, надо в основании степени выделить слагаемое вида $1+\alpha$, где α — бесконечно малая. Для этого в основании прибавим и отнимем единицу, а затем умножим и разделим показатель степени на получившуюся бесконечно малую величину:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{-x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left((1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{-x^2}}.$$

Ориентируясь на использование равенства (3.6), займемся отдельно пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{-x^2}$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(x/2)}{-x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Согласно равенству (3.6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2} = e^{1/2}$.

3.8. Задачи.

1. Найти пределы

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n\in\mathbb{N}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in\mathbb{N}$, **(8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$,

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, **(10)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$, **(12)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, $m,n\in\mathbb{N}$,

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$,

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$,

(15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$, **(16)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$,

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$,

(18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$,

(19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$, **(20)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$,

(21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$, **(22)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}$,

(23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$, **(24)** $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$,

(25) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$, **(26)** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$,

(27) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)$, **(28)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$,

(29) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$, **(30)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, $a>0$,

(31) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$, $x>0$, **(32)** $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n(\pi/4+1/n)$,

(33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$, **(34)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$,

(35) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2}$, **(36)** $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}$,

(37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$, **(38)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$,

(39) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$, $a>0$, $b>0$,

(40) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$, $a>0$, $b>0$.

(41) $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$, **(42)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$.

3.9. Опишем терминологию, связанную с асимптотическим сравнением функций, т. е. сравнением их в пределе при стремлении аргумента к какой-то точке. Нам надо будет договориться о сравнении одной функции относительно другой. Для этого естественно рассматривать их отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, однако при этом надо делать оговорки, связанные с возможностью знаменателя обращаться в нуль. Чтобы не иметь таких неудобств, можно для указанного выше отношения ввести свое обозначение и тем самым рассматривать представление одной из сравниваемых функций, например $f(x)$, через другую в виде произведения $f(x) = g(x)\varphi(x)$, где в качестве $\varphi(x)$ может выступать отношение $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ в тех точках, где $g(x) \neq 0$.

Две функции асимптотически сравниваются как правило в тех случаях, когда они обе либо бесконечно малые, либо бесконечно большие. Используемые при этом обозначения одинаковы в соответствующих ситуациях, а терминология немного отличается.

Итак, обращаясь к сравнению функций f и g, предположим, что f представлена в виде $f(x) = g(x)\varphi(x)$. Пусть a — предельная точка того множества, на котором эти функции рассматриваются. Если имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, то говорят, что f есть *о-малое относительно* g при x, стремящемся к a, и используют обозначение $f(x) = o(g(x))$. Если при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая более высокого порядка, чем* g, или что *порядок малости функции* f *выше, чем у* g, или что f *стремится к нулю быстрее, чем* g. Если же $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет медленнее, чем* g, или что g *растет быстрее, чем* f.

Предположим теперь, что в представлении $f(x) = g(x)\varphi(x)$ функция φ обладает следующим свойством: существует такая окрестность точки a, на которой φ ограничена. В этом случае говорят, что f — *О-большое по сравнению с* g при x, стремящемся к a, и используют обозначение $f(x) = O(g(x))$. Если при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то говорят, что f — *бесконечно малая порядка не ниже, чем* g, или что *порядок малости функции* f *не ниже, чем у* g. Если же $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то говорят, что f *растет не быстрее, чем* g.

Если одновременно $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, то говорят, что *функции* f *и* g *одного порядка* (*малости или роста*) при $x \to a$, используя при этом обозначение $f \asymp g$.

Если при $x \to a$ функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то говорят, что $g(x)$ — *главная часть функции* $f(x)$. Полагая $o(g(x)) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, тот факт, что g есть главная часть f, можно записать в виде $f(x) = g(x)(1+\alpha(x))$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Если при этом в некоторой окрестности точки a функция g отлична от нуля, то последнее соотношение можно записать в виде $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$, $x \to a$, или $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Если $g(x)$ — главная часть $f(x)$ при $x \to a$, то говорят также, что *функции* f *и* g

эквивалентны при $x \to a$ и используют обозначение $f(x) \sim g(x)$.

Чаще всего в качестве бесконечно малых или бесконечно больших, с которыми сравнивают данные функции, берут функции вида $(x-a)^\alpha$, $a \in \mathbb{R}$. Если $f(x) = o(x-a)^\alpha$ при $x \to a$ и $\alpha > 0$, то говорят, что f — *величина более высокого порядка* (*малости*), *чем* α, или что у f *порядок малости более высокий, чем* α. Если же $f(x) \sim (x-a)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то говорят, что f *имеет порядок* α (малости или роста, в зависимости от знака α). Аналогичную терминологию можно описать и в том случае, если сравнивают с функцией вида x^α при $x \to +\infty$.

Важно понимать, что символами типа $O(f(x))$, $o(f(x))$, если они не используются в конкретных равенствах, обозначают не одну функцию, а **класс функций, обладающих отмеченным в символе свойством**, так что если говорят «возьмем функцию $O(f(x))$ или $o(f(x))$ при $x \to a$», то имеют в виду, что рассматривается **некоторая** функция, обладающая указанным свойством, т. е. некоторая функция $h(x)$ такая, что $h(x) = \varphi(x)f(x)$, где $\varphi(x)$ ограничена вблизи a или $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$. В следующих ниже примерах и задачах мы познакомимся с некоторыми правилами обращения с асимптотическими равенствами.

3.10. Примеры.

1. Доказать, что $o(o(f(x))) = o(f(x))$ при $x \to a$.

Написанное равенство означает, что любая функция, обладающая указанным в левой части равенства свойством, будет бесконечно малой по сравнению с f. Пусть $h(x)$ — какая-либо функция, обладающая тем свойством, что $h(x) = o(o(f(x)))$, и надо показать, что $h(x) = o(f(x))$. Согласно условию существует такая бесконечно малая при $x \to a$ функция $\theta(x)$, что $h(x) = \theta(x)g(x)$, где $g(x) = o(f(x))$. Последнее означает, что $g(x) = \eta(x)f(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} \eta(x) = 0$. Собирая, получим $h(x) = \theta(x)\eta(x)f(x)$, а так как $\lim\limits_{x\to a} \theta(x)\eta(x) = 0$, по определению $h(x) = o(f(x))$. Требуемое равенство установлено.

2. Доказать, что $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$ при $x \to a$.

Действительно, это соотношение означает, что функция, обладающая свойством, указанным в левой части, будет обладать также свойством, указанным в правой. Свойство, указанное в левой части, означает, что рассматривается сумма двух функций $h(x) + g(x)$, где $h(x) = \varphi(x)f(x)$, $g(x) = \psi(x)f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 0$. Тогда $h(x) + g(x) = (\varphi(x) + \psi(x))f(x)$, а поскольку $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x) + \psi(x)) = 0$, то $h(x) + g(x) = o(f(x))$, что и требовалось.

3.11. Задачи.

1. Доказать соотношения при $x \to a$:

(1) $O(o(f(x))) = o(f(x))$, **(2)** $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

2. Пусть $x \to 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\alpha)$, **(2)** $o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$.

3. Пусть $x \to 0$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\alpha)$, **(2)** $O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta})$.

4. Пусть $x \to \infty$ и $\beta > \alpha > 0$. Показать, что

(1) $O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^\beta)$, **(2)** $O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta})$.

3.12. Асимптотические равенства удобно использовать при нахождении пределов — они позволяют свести процесс нахождения предела к простым преобразованиям многочленов, раскрытию скобок, приведению подобных членов и выделению главной части. Конечно, для этого надо иметь набор конкретных асимптотических равенств. Поскольку все примеры по нахождению пределов связаны с элементарными функциями, мы ограничимся тем, что основные замечательные пределы перепишем в форме асимптотических равенств, в которых $x \to 0$:

$$\sin x = x + o(x), \tag{3.7}$$
$$a^x = 1 + x\ln a + o(x), \tag{3.8}$$
$$\ln(1+x) = x + o(x), \tag{3.9}$$
$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x). \tag{3.10}$$

Во всех этих равенствах бесконечно малые $o(x)$ можно конкретизировать, т. е. записать более точные приближения функций многочленами. Такие равенства будут обоснованы позже, мы же будем сейчас их использовать при нахождении пределов в случае необходимости. Итак, для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства, в которых $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \tag{3.11}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \tag{3.12}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{3.13}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \dots \\ \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Учитывая теорему о замене переменной, можно гарантировать, что эти равенства останутся верными, если в них на месте переменной x будет стоять какая-либо функция $x = \varphi(t)$ такая, что $\lim\limits_{t\to a}\varphi(t) = 0$, и ищется предел соответствующего выражения при $t \to a$.

3.13. Примеры.

1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Воспользовавшись равенствами (3.12), (3.15), (3.9), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} &= \frac{1 + x\cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1 + x(1 - x^2/2 + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) + o(x)}{x + o(x) - x} \\ &= \frac{1 + x - x^3/2 + o(x^3) - 1 - x + o(x)}{o(x)} = \frac{o(x)}{o(x)},\end{aligned}$$

и никакой пользы проделанные выкладки не несут, ибо мы в итоге пришли к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Это означает, что нами использована недостаточно глубокая информация об асимптотике имеющихся функций. Простое наблюдение:

$$\ln(1+x) - x = x - x^2/2 + o(x^2) - x = -x^2/2 + o(x^2)$$

показывает, что в знаменателе — величина второго порядка, а тогда и в числителе надо использовать асимптотические равенства, обеспечивающие выделение главного члена второго порядка:

$$\frac{1 + x\cos x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x) - x}$$
$$= \frac{1 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - \frac{1}{2}(2x) - \frac{(1/2)\cdot(-1/2)}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)}$$
$$= \frac{1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 - x + \frac{4x^2}{8} + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)}$$
$$= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(x^2)/x^2}{-1/2 + o(x^2)/x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1.$$

Здесь учтено, что $x^3/2 = o(x^2)$ и что $o(x^2) + o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.

При нахождении пределов бывает удобно комбинировать использование замечательных пределов и асимптотических равенств.

2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

Имеем

$$\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = \left(\frac{1 - x^2/2 + o(x^2)}{1 - (2x)^2/2 + o(x^2)}\right)^{1/x^2}$$
$$= \left(1 + \frac{1 - x^2/2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 - o(x^2)}{1 - 2x^2 + o(x^2)}\right)^{1/x^2} = \left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)}\right)^{1/x^2}$$
$$= \left(\left(1 + \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + o(1)}\right)^{\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}}\right)^{\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{1+o(1)}\cdot\frac{1}{x^2}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \dfrac{3}{2}$, согласно (3.6) имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = e^{3/2}.$$

Решим этот же пример другим способом. Воспользуемся равенством $a^b = e^{b\ln a}$, $a > 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}}.$$

Рассмотрим выражение в показателе степени:

$$\frac{\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}}{x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1-x^2/2+o(x^2)}{1-4x^2/2+o(x^2)}\right)}{x^2}$$
$$= \frac{\ln(1-x^2/2+o(x^2)) - \ln(1-2x^2+o(x^2))}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2/2+2x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \to \frac{3}{2}.$$

Следовательно, искомый предел равен $e^{3/2}$.

3.14. Задачи.

1. Используя асимптотические равенства, найти пределы

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\sin x\cos \alpha x}{1+\sin x\cos \beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, **(6)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\operatorname{tg} x}{x+\sin x}\right)^{1/(1-\cos x)}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$, **(8)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$,

(9) $\lim\limits_{x\to 2} (\sqrt{3-x}+\ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)}$,

(10) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{7/4}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})$,

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{1+\sin x}-(1/2)\ln(1+x^2)-x}{\operatorname{tg}^3 x}$,

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$,

(13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-\sin x}$, **(14)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sh} 2x}-\cos x-x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{arctg}\sin x}$,

(15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x+x^2/2)}{e^{-x^2/2}-\cos x}$, **(16)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - xe^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}-\operatorname{tg} x}$,

(17) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{e^x-1-x^2/2}\right)^{1/x^2}$, **(18)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x\operatorname{sh} x}{\ln(1+x^2)}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$,

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x}-(1/2)\operatorname{sh} x}\right)^{1/\arcsin x^2}$,

(20) $\lim\limits_{x\to 0}(x-\ln(1+x)+\cos(xe^{-x}))^{1/x^3}$.

2. Найти пределы

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$,

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, $n\in\mathbb{N}$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$, $n\in\mathbb{N}$.

3.15. Ответы. К п. 3.8. (1) 10; (2) 1; (3) $\frac{mn(n-m)}{2}$; (4) $\frac{m}{n}$; (5) $\frac{n(n+1)}{2}$; (6) $\frac{n(n+1)}{2}$; (7) $\frac{m-n}{2}$; (8) 1; (9) 3; (10) $\frac{3}{2}$; (11) $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$; (12) $\frac{n}{m}$; (13) $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$; (14) $\frac{a+b}{2}$; (15) $\cos a$; (16) $\frac{1}{2}$; (17) $-\sin a$; (18) $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$, $a\neq(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$; (19) $-\frac{1}{12}$; (20) 0; (21) 0; (22) 0; (23) e^{2a}; (24) e^{-1}; (25) $e^{\operatorname{ctg} a}$, $a\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; (26) 1; (27) 0; (28) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; (29) $a^a\ln\frac{a}{e}$; (30) $a^a\ln ae$; (31) $\ln x$; (32) e^2; (33) 2; (34) 2; (35) $\frac{e}{\pi}$; (36) $e^{1/e}$; (37) 2; (38) $\sqrt{2}$; (39) $\sqrt{ab}$; (40) $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$; (41) 0; (42) $\frac{1}{2}$.

К п. 3.14. 1. (1) 3; (2) -2; (3) $\frac{2}{3}$; (4) $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$; (5) 1; (6) e; (7) $\frac{1}{2}$; (8) -2; (9) $e^{-1/4}$; (10) $-\frac{3}{16}$; (11) $-\frac{1}{8}$; (12) $-\frac{1}{2}$; (13) -1; (14) $\frac{7}{5}$; (15) $\frac{1}{2}$; (16) 1; (17) $e^{-1/2}$; (18) $e^{2/3}$; (19) $e^{-1/8}$; (20) $e^{2/3}$. **2.** (1) $\frac{1}{1+x^2}$; (2) $\sqrt{2}$; (3) 0; (4) 1.

§ 4. Непрерывные функции

4.1. Рассмотрим функцию f и точку $a\in\mathbb{R}$. Если a принадлежит области определения $D(f)$ функции f, то будем говорить, что функция f *непрерывна в точке* a, если

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x\in D(f),\ |x-a|<\delta)\quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Если к тому же a — предельная точка множества $D(f)$, то непрерывность f в a равносильна тому, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и выполнено равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Если же a не является предельной точкой $D(f)$ и тем самым говорить о пределе в этой точке невозможно, то любая функция в такой точке непрерывна. Договоримся также считать функцию f непрерывной в предельной точке множества $D(f)$, не принадлежащей $D(f)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (требовать в этом случае равенства его значению функции в точке затруднительно — точка по предположению не входит в область определения, так что такого значения просто нет).

При исследовании непрерывности функции в данной точке сначала надо определить, что это за точка — входит ли она в область определения функции или нет и является ли она предельной точкой области определения. Если это точка из области определения, но не предельная точка, то ответ готов — функция в такой точке непрерывна. Как правило, рассматриваемая точка будет предельной точкой области определения. В этом случае надо найти предел функции в этой точке, используя по возможности теоремы о пределах. Если же использовать теоремы невозможно (например, по причине невыполнения их условий), то надо найти предел по определению, в случае необходимости прибегая к односторонним пределам. Если конечного предела нет, то нет и непрерывности. Если конечный предел есть, то надо посмотреть, определена ли функция в этой точке, и если нет, то она в ней уже непрерывна (только за счет существования предела). Если определена, то надо сравнить значение предела со значением функции, и если они одинаковы, то функция непрерывна, если нет, то разрывна.

4.2. Утверждение 1. *Линейная комбинация, произведение и отношение (последнее при условии отличия от нуля знаменателя) непрерывных в точке a функций непрерывны в этой точке.*

Утверждение 2. *Пусть функция f непрерывна в точке a, а функция g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.*

4.3. Иногда описание точек разрыва функции сопровождают указанием, какого типа разрыв в данной точке. Напомним, что точку a называют *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные односторонние пределы $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$. Говорят, что разрыв первого рода *устранимый*, если $f(a+0) = f(a-0)$. Во всех остальных случаях говорят, что a — *точка разрыва второго рода*.

4.4. Пример. Исследуем на непрерывность функцию

$$f(x) = [x]\sin \pi x,$$

где квадратные скобки указывают на целую часть числа, т. е. $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$.

Функция f определена на всем $\mathbb{R}$ и представляет собой произведение двух функций, из которых $\sin \pi x$ непрерывна в каждой точке

$x \in \mathbb{R}$. Покажем, что функция $[x]$ непрерывна в каждой точке $a \notin \mathbb{Z}$, и тогда f будет непрерывной на множестве всех нецелых вещественных чисел как произведение непрерывных функций. Действительно, если $a \notin \mathbb{Z}$, то существует такая окрестность $(a-r, a+r)$ точки a, которая не содержит целых чисел, а тогда целая часть $[x]$ во всех точках такой окрестности принимает одно и то же значение, т. е. совпадает с непрерывной (тождественно постоянной) функцией и, значит, сама непрерывна в a.

Пусть теперь $a \in \mathbb{Z}$. Тогда в любой достаточно малой (настолько малой, чтобы в ней не было отличных от a целых точек) окрестности точки a слева от a будет $[x] = a-1$, а справа от a оказывается $[x] = a$. Отсюда $\lim\limits_{x \to a-0} [x] = a-1$, $\lim\limits_{x \to a+0} [x] = a$, и ввиду различия пределов слева и справа заключаем, что предела в этой точке нет, так что $[x]$ разрывна в произвольной целой точке.

Итак, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций приходим к непрерывности нашей функции во всех нецелых точках. Можно ли утверждать, что в каждой целой точке она будет разрывна? Нет, пока нельзя. Нам только известно, что в таких точках не выполняются условия теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций, но будет ли при этом произведение разрывным — вопрос пока открытый.

Отметим, что $\lim\limits_{x \to n} \sin \pi x = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, а тогда по теореме о пределе произведения ограниченной функции на бесконечно малую будет $\lim\limits_{x \to n} [x] \sin \pi x = 0$, так как целая часть вблизи любой конечной точки ограничена. Вместе с тем имеем $[n] \sin \pi n = 0$, если $n \in \mathbb{Z}$. Мы получили, что предел функции в любой целочисленной точке совпадает с ее значением в такой точке, следовательно, наша функция непрерывна в каждой целочисленной точке. В итоге приходим к тому, что f непрерывна в каждой точке области определения.

4.5. Задачи.

1. Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

(1) $f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ **(2)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ **(4)** $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

(5) $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ **(6)** $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin(\pi/x))$,

(7) $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ **(8)** $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$,

(9) $f(x)=x[x]$, **(10)** $f(x)=x[1/x]$,

(11) $f(x)=e^{-1/x}$, **(12)** $f(x)=\arcsin(1/x)$.

2. Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^n},\ x\geq 0$, **(2)** $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$

(3) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}x$, **(4)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

3. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)$$

разрывна при каждом $x\in\mathbb{R}$.

4. Доказать, что функция Римана

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{если } x=\dfrac{m}{n} \text{ и } m,n \text{ взаимно просты},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x.

5. Обязательно ли будет разрывной в данной точке a сумма $f(x)+g(x)$, если (а) функция f непрерывна, а g разрывна в точке a; (б) обе функции f,g разрывны в точке a?

6. Обязательно ли будет разрывным в данной точке a произведение $f(x)g(x)$, если (а) функция f непрерывна, а g разрывна в точке a; (б) обе функции f,g разрывны в точке a?

7. Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$, $g(f(x))$, если (а) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\ g(x)=1+x^2$; (б) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\ g(x)=x(1-x^2)$; (в) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\ g(x)=1+x-[x]$.

8. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то и $|f(x)|$ — непрерывная функция.

9. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то функция

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, & \text{если } f(x)<-c,\\ f(x), & \text{если } |f(x)|\leq c,\\ c, & \text{если } f(x)>c,\end{cases}$$

где c — любое (фиксированное) положительное число, также непрерывна.

10. Доказать, что если функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны, то функции $\varphi(x) = \max(f(x), g(x))$, $\psi(x) = \min(f(x), g(x))$ непрерывны.

11*. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то функции $m(x) = \inf\limits_{a \le t \le x} f(t)$, $M(x) = \sup\limits_{a \le t \le x} f(t)$ также непрерывны на $[a, b]$.

4.6. В определении непрерывности функции в точке говорится, что по заданному $\varepsilon > 0$ требуется найти $\delta > 0$, для которого будут выполнены указанные далее в определении свойства. Ясно, что такое δ должно зависеть от ε и от той точки, в которой рассматривается непрерывность. Отметим эту зависимость явно, записав определение непрерывности функции f в точке a:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon, a, f) > 0)(\forall x, \, |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Вместе с тем может оказаться, что по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать δ так, чтобы оно подходило для всех точек a из некоторого множества X, т. е. было бы пригодным при заданном ε в равной мере для всех $a \in X$. Эта ситуация нашла свое отражение в определении равномерной непрерывности функции на заданном множестве.

Пусть даны функция f и множество $X \subset D(f)$. Говорят, что f *равномерно непрерывна на* X, если выполнено следующее утверждение:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon, f) > 0)(\forall x_1 \in X \, \forall x_2 \in X, \, |x_1 - x_2| < \delta) \, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что в отличие от непрерывности свойство равномерной непрерывности содержательно только если его рассматривать на некотором (не конечном) множестве.

Образно говоря, равномерная непрерывность означает, что функция на данном множестве не имеет участков с неограниченно увеличивающейся крутизной.

Обратим внимание на то, что если функция равномерно непрерывна на каком-то множестве, то она будет таковой и на любом его подмножестве.

Утверждение (теорема Кантора). *Непрерывная на замкнутом ограниченном промежутке числовой прямой функция равномерно непрерывна на нем.*

4.7. Пример. Покажем, что функция $f(x) = x^2$ равномерно непрерывна на любом промежутке $(-l, l)$, $0 < l < +\infty$, и не будет равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Действительно, по теореме Кантора функция x^2, будучи непрерывной, равномерно непрерывна на каждом замкнутом ограниченном промежутке, в частности на $[-l, l]$, а тогда она равномерно непрерывна и на $(-l, l)$.

Рассмотрим теперь $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$. Отсутствие равномерной непрерывности связано с увеличением крутизны функции, а это происходит при удалении аргумента. Запишем утверждение, означающее отсутствие равномерной непрерывности x^2 на $\mathbb{R}$:

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x_1 \in \mathbb{R}\, \exists x_2 \in \mathbb{R},\ |x_1 - x_2| < \delta) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Так что для доказательства отсутствия равномерной непрерывности мы должны будем подобрать ε, x_1, x_2 такими, чтобы $|x_1 - x_2| < \delta$, но $|x_1^2 - x_2^2| \geq \varepsilon$. Нам по заданному $\delta > 0$ надо будем подобрать пару точек, отличающихся друг от друга меньше, чем на δ. Пусть $x_1 > 0$ — одна из таких точек, тогда вторую возьмем в виде $x_2 = x_1 + \alpha$, где α — какое-либо положительное число такое, что $\alpha < \delta$ (этим мы обеспечим неравенство $|x_2 - x_1| < \delta$). Рассмотрим теперь разность $x_2^2 - x_1^2 = (x_1 + \alpha)^2 - x_1^2 = \alpha(2x_1 + \alpha)$. Зададимся вопросом: как сделать последнее выражение бóльшим какого-то числа, и какое это может быть число? Поскольку мы пока вольны в выборе x_1, ясно, что разумно взять его таким: $x_1 = 1/\alpha$. Тогда для такого x_1 получим $\alpha(2x_1 + \alpha) = \alpha(2/\alpha + \alpha) = 2 + \alpha^2 > 2$, откуда видно теперь, что в качестве требуемого ε можно взять $\varepsilon = 2$, и тогда при заданном $\delta > 0$ надо взять любое x_1 такое, что $1/x_1 < \delta$, а к нему взять $x_2 = x_1 + \alpha$, где $\alpha < \delta$. Тогда окажется, что $|x_2 - x_1| < \delta$, а вместе с тем $|x_2^2 - x_1^2| \geq 2$.

4.8. Задачи.

1. Показать, что функция $f(x) = \sin(\pi/x)$ непрерывна и ограничена в промежутке $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на нем.

2. Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, однако не является там равномерно непрерывной.

3. Показать, что функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

4. Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$ и на $[b, c]$, то она равномерно непрерывна на $[a, c]$.

5. Говорят, что функция f *удовлетворяет на множестве E условию Липшица*, (с константой K), если $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ для любых $x, y \in E$. Доказать, что если f удовлетворяет условию Липшица на множестве E, то она равномерно непрерывна на этом множестве.

Добавление

В математике мы часто встречатемся с высказываниями т. е. повествовательными предложениями, в которых что-то утверждается о каком-то объекте. При этом считают предложения такими, что можно судить, верны они или нет (для высказывания вместо слова «верно» говорят также «истинно», «справедливо», «выполнено», «имеет место» и т. п., для неверного высказывания используют также термин «ложно»). Вместо слова «высказывание» используют также слово «утверждение», а в зависимости от дополнительных обстоятельств используют другие слова для обозначения утверждений, так, например, утверждение, носящее вспомогательный для данного контекста характер, называют леммой, а утверждение, в данном контексте фундаментальное, важное — теоремой, и т. п.

Высказывания могут быть такими, что их истинность зависит от выбора какого-то объекта (или нескольких объектов) из заданной совокупности объектов. В таком случае высказывание включает в себя некоторую букву (или несколько букв), на место которой (которых) можно подставлять разные объекты из данной совокупности, и тогда говорят, что рассматривается высказывание с переменной (переменными). При этом мы при подстановке каждого конкретного объекта должны получать высказывание без переменной, т. е. каждый раз мы должны иметь возможность судить, истинно высказывание для конкретногообъекта или ложно.

Есть несколько способов получения новых высказываний из уже имеющихся. Ясно, что для каждого способа образования новых высказываний мы должны указать, когда составное высказывание будет истинным в зависимости от истинности его частей.

Во-первых, можно получить новое высказывание, имея в распоряжении всего одно высказывание, а именно, можно взять его отрицание, т. е., если высказывание обозначить одной буквой, например, P, то новое высказывание будет (не P). Символически высказывание (не P) обозначают через $\neg P$.

Рассмотрим два высказывания, обозначим одно из них буквой P, а другое — буквой Q. Из них можно получить новое высказывание путем их соединения одним из союзов «и», «или», в результате получив высказывание (P и Q) и высказывание (P или Q) (в последнем вместо союза «или» используют иногда союз «либо»). Высказывание (P и Q) называют *конъюнкцией высказываний P и Q* и обозначают через $R \wedge Q$ или $P\&Q$. Высказывание (P или Q) называют *дизъюнкцией высказываний P и Q* и обозначают через $R \vee Q$.

Высказывание (P и Q) истинно, если оба высказывания P, Q истинны, и ложно при других раскладах. Высказывание (P или Q) истинно, если хотя бы одно из высказываний P, Q истинно, и ложно только в случае, когда оба высказывания P, Q ложны.

Еще один способ получения нового высказывания из высказываний P, Q — это составление условного утверждения, а именно высказывание

$$\text{из } P \text{ следует } Q, \tag{1}$$

или, иначе говоря,

$$\text{если (выполнено) } P, \text{то (выполнено) } Q. \tag{2}$$

Это высказывание кратко обозначают через

$$P \Rightarrow Q \tag{3}$$

и называют *импликацией*.

Импликацию $P \Rightarrow Q$ можно переформулировать иным способом, привлекая рассуждение «от противного»: предположим, что Q не верно, если при этом удалось доказать, что P также не верно, то этим будем считать доказанным соотношение $P \Rightarrow Q$. Тем самым утверждение $P \Rightarrow Q$ равносильно утверждению (не Q) $\Rightarrow$ (не P) (равносильно в том смысле, что оба эти утверждения истинны или ложны одновременно).

Импликация $P \Rightarrow Q$ ложна только в одном случае, когда P истинно, а Q ложно, в остальных случаях она истинна. Считать $P \Rightarrow Q$ ложной, если P истинно, а Q ложно, достаточно естественно — вряд ли мы согласимся, что из истинного утверждения, рассуждая корректно, можно получить ложное. Также естественно считать ее истинной, если P и Q оба истинны. Некоторую настороженность могут вызвать случаи, когда P ложно. Попробуем договориться так. Если Q истинно, то нам все равно, откуда оно могло бы следовать, так что $P \Rightarrow Q$ в этом случае будем считать истинной, даже если P ложно.

Осталась наиболее щекотливая ситуация, когда P, Q оба ложны. Однако если принять метод доказательства от противного, т. е. что импликация $P \Rightarrow Q$ равносильна импликации (не Q) $\Rightarrow$ (не P), то в случае, когда оба P и Q ложны, их отрицания (не P) и (не Q) истинны, а в таком случае импликацию (не Q) $\Rightarrow$ (не P) считаем истинной, а вместе с ней истинной считаем также импликацию $P \Rightarrow Q$.

Есть шутливое пояснение этой договоренности, наиболее ярко проявляемое в утверждении, что пустое множество содержится в любом множестве. Действительно, допустим, что я убеждаю Вас в этом.

Как я могу убедить, хотя Вы не готовы в это поверить? Для доказательства включения множеств, например, такого: $\varnothing \subset X$, где X — какое-либо множество, согласно определению включения надо взять любой элемент множества $\varnothing$ и доказать, что он принадлежит множеству X. Предлагаю такой ход: как только Вы предложите мне хотя бы один элемент множества $\varnothing$, так сразу я берусь проверить, что он будет элементом множества X. И мы разошлись. Как только Вы найдете элемент в множестве $\varnothing$, так мы встретимся и продолжим проверку ...

Теперь поговорим о том, как в русском (математическом) языке оформляется импликация $P \Rightarrow Q$. Два варианта такого оформления мы уже встретили при ее определении:

из P следует Q

и

если (выполнено) P, то (выполнено) Q.

Но этим языковое богатство для импликации не исчерпывается. Оставшиеся три способа, которые мы обсудим, не столь прозрачные, и мы остановимся на них подробнее, ибо они поначалу вызывают определенные трудности.

Один из способов связан со словами о необходимых и достаточных условиях. А именно, о высказывании (если P, то Q) говорят:

для (выполнения) P необходимо (выполнение) Q

и в этом контексте утверждение Q называют *необходимым условием* выполнения P.

Почему импликацию «из P следует Q» выражают таким словосочетанием? Это несколько непривычное выражение можно легко понять, если заметить, что слово «необходимо» здесь означает «не обходимо», т. е. «нельзя обойти», т. е. «обязательно будет выполнено», т. е. если выполнено утверждение P, то нельзя обойти выполнение утверждения Q, оно также будет выполнено, т. е. из P следует Q.

То же самое утверждение «из P следует Q» выражается и так: «для выполнения Q достаточно выполнения P» и высказывание P называют *достаточным условием* для Q.

Еще один способ выразить утверждение (если P, то Q) таков: Q выполнено тогда, когда выполнено P, и это словосочетание довольно естественно. Менее естественно, к чему просто надо привыкнуть, такое словосочетание: P выполнено только тогда, когда выполнено Q.

Наконец, (если P, то Q) выражают так: Q выполнено в том случае, если (или когда) выполнено P, и двойственным образом: P выполнено только в том случае, если (или когда) выполнено Q.

Утверждение

$$\text{из } Q \text{ следует } P$$

называют *обратным к утверждению*

$$\text{из } P \text{ следует } Q.$$

Как связаны между собой исходное (в текущем контексте прямое) и обратное утверждения? **Никак!** Это два разных утверждения, и нельзя их смешивать. Замена утверждения ему обратным — грубая ошибка. Особенно часто она встречалась (а может, и встречается) при сообщении о необходимых условиях экстремума функции на интервале. Поскольку в формулировке нередко использовались слова о необходимом условии, а понимание сути необходимого условия не доносилось, учащиеся довольно вольно обращались с составляющими утверждения о необходимых условиях экстремума, получая совсем не то утверждение, которое хотели от них услышать, и могли быть удивлены оценкой их знаний.

Обратим внимание на то, как оформляется в доказательстве утверждения о равносильности каких-то высказываний переход к доказательству обратного утверждения. Это в некоторой мере зависит от того, в какой манере дана формулировка. Так, если в утверждении написано, что для выполнения P необходимо и достаточно выполнения Q, и доказана необходимость, т. е. «если выполнено P, то выполнено Q» далее говорят: «докажем достаточность», имея в виду, что теперь будет доказываться импликация «из Q следует P».

Если утверждение сформулировано так: высказывание P выполняется тогда и только тогда, когда выполнено Q, и доказано прямое (в данном контексте) утверждение, т. е. что из P следует Q, и теперь переходим к доказательству обратного утверждения, то этот момент оформляется так: «обратно, пусть выполнено Q, докажем выполнение P». Обратим внимание на то, что используемое в этой ситуации слово «обратно» иногда заменяют словом «наоборот», здесь совершенно неуместным: слово «обратно» указывает на начало доказательства обратного, а не «наоборотного» утверждения.

Полезно помнить, как берется отрицание конъюнкции и дизъюнкции.

Рассмотрим высказывание

$$\text{не } (P \text{ и } Q).$$

В нем говорится о том, что не выполнены утверждения P и Q одновременно, а это указывает на то, что может быть по крайней мере одно из них невыполненным, т. е. не (P и Q) равносильно высказыванию (не P) или (не Q). Символически можно это записать так:

$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Рассмотрим высказывание

$$\text{не } (P \text{ или } Q).$$

В нем говорится: не верно, что выполнено P или Q, т. е. оба высказывания P, Q не верны, ибо иначе, если было бы верным хотя бы одно из них, то верным было бы и высказывание (P или Q), а мы говорим о том случае, когда оно не верно. Таким образом, не (P или Q) равносильно тому, что (не P) и (не Q). Символически:

$$\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Обсудим значение необходимых и достаточных условий. Допустим, что мы интересуемся утверждением P и хотим узнать, при каких условиях оно справедливо, но пока располагаем лишь утверждением типа «из P следует Q». Можно ли исходя из этого утверждения выяснить, выполнено ли P? Конечно, нет. Дело в том, что в утверждении «из P следует Q» интересующее нас утверждение P стоит в условии, на месте предположения, а не в результате, не на месте вывода, т. е. нам известно, что **в предположении справедливости** P будет выполнено какое-то заключение, обозначенное нами символом Q. Исходя из этого невозможно сделать какое-либо заключение о справедливости P.

Тем не менее утверждение типа «из P следует Q», или «для выполнения P необходимо выполнение Q», какую-то информацию об утверждении P сообщает. Действительно, перепишем его в виде «если не выполнено Q, то не выполнено P» и заметим, что мы тем самым получаем возможность выяснить, когда же P **не выполнено**, т. е. при каких обстоятельствах не надо интересоваться справедливостью P — это произойдет в том случае, если не выполнено Q. Отсюда можно сделать вывод о том, что ожидать выполнения P можно лишь среди объектов, для которых выполнено Q. Те объекты, на которых Q не выполняется, можно не рассматривать, ибо на них P заведомо не выполняется.