§ 5. Производная

5.1. Рассмотрим интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$, функцию f, заданную на (a,b), и точку $x \in (a,b)$. Если существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

его называют *производной функции f в точке x* и обозначают символом $f'(x)$. Если производная $f'(x)$ конечна, то f называют *дифференцируемой в точке x*. Дифференцируемую в каждой точке интервала (a,b) функцию называют *дифференцируемой* на этом интервале.

Пределы

$$f'_{-}(x) = \lim_{h\to -0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_{+}(x) = \lim_{h\to +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

если они существуют, называют *левой* и *правой* производными (или *производной слева* и *справа*, или *односторонними производными*) функции f в точке x. Если существует производная функции в точке, то существуют равные ей односторонние производные. Обратно, если существуют равные между собой односторонние производные, то существует и производная функции в данной точке, равная значению односторонних производных. Если f определена на замкнутом промежутке $[a,b]$, то в точках a, b можно рассматривать соответственно производные справа и слева.

Дифференцируемость f в точке x равносильна возможности выделения главной линейной части у приращения $f(x+h)-f(x)$ функции f в окрестности точки x, т. е. возможности представления

$$f(x+h)-f(x) = K\cdot h + o(h) \quad \text{при } h\to 0,$$

или

$$f(x+h) = f(x) + K\cdot h + \alpha(h)\cdot h \quad \text{при } h\to 0,$$

где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. В этом асимптотическом равенстве коэффициент K главной линейной части равен производной $f'(x)$, так что дифференцируемость f в точке x равносильна справедливости асимптотического равенства

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + o(h) \quad \text{при } h\to 0.$$

Нахождение производной основано на соответствующих теоремах и на производных элементарных функций.

Утверждение 1. *Пусть функции f, g дифференцируемы в точке x. Тогда сумма $f+g$, произведение $f \cdot g$ и частное f/g (последнее при условии $g(x) \neq 0$) дифференцируемы в точке x и*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Утверждение 2 (теорема о производной композиции). *Пусть функция f дифференцируема в точке x, а функция g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и*

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

При исследовании функции на дифференцируемость и нахождении производной в первую очередь надо воспользоваться сформулированными утверждениями, если выполнены их условия. Если же условия в какой-то точке не выполнены, то при исследовании дифференцируемости надо использовать определение — составлять отношение приращения функции к приращению аргумента и изучать существование предела этого отношения при стремлении к нулю приращения аргумента.

5.2. Приведем таблицу производных основных функций, при этом мы не будем указывать каждый раз на область изменения переменной x или параметров α, a — она всегда будет определяться из условия существования соответствующей функции:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \tag{5.1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x, \tag{5.2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{5.3}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \tag{5.4}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{5.5}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{5.6}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \tag{5.7}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{5.8}$$

5.3. Пример. Исследуем на дифференцируемость и найдем производную функции $f(x) = |x|$. Согласно определению имеем

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

так что в некоторой окрестности каждой точки $x > 0$ эта функция совпадает с функцией $y(x) = x$, а значит, ее производная в такой точке равна 1. Рассуждая аналогично, можно прийти к выводу, что $f'(x) = -1$ в каждой точке $x < 0$. Остается рассмотреть $x = 0$. Воспользуемся тем, что $f(x)$ определена по-разному слева и справа от нуля и обратимся к пределам слева и справа:

$$\lim_{h \to -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-h}{h} = -1, \quad \lim_{h \to +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h}{h} = 1,$$

и ввиду того, что соответствующие пределы слева и справа различны, в точке 0 предела нет, а вместе с этим и производной нет.

Отметим, что при $x \neq 0$ производную модуля можно записать с использованием функции «знак числа»: $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$.

5.4. Пример. Исследуем на дифференцируемость и найдем производную функции $f(x) = |\sin^3 x|$. Заметим, что $f(x)$ является композицией $\lambda \circ \psi \circ \varphi$ функций $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(t) = t^3$ и $\lambda(u) = |u|$. Функции φ и ψ дифференцируемы всюду, а функция λ — всюду, кроме нуля. Поэтому утверждение 2 из п. 5.1 гарантирует дифференцируемость композиции в тех точках x, где $\sin^3 x \neq 0$, и в таких точках будет $f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$. Займемся теми точками, в которых $\sin^3 x = 0$, т. е. точками вида $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\frac{|\sin^3(k\pi + h)| - |\sin^3 k\pi|}{h} = \frac{|\sin^3 h|}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

следовательно, $f(x)$ дифференцируема и в каждой точке вида $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, при этом $f'(k\pi) = 0$.

5.5. Задачи.

1. Найти производные следующих функций:

(1) $f(x) = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$, **(2)** $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$,

(3) $f(x) = \dfrac{x^p(1 - x)^q}{1 + x}$, **(4)** $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$,

(5) $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$, **(6)** $f(x) = \sqrt[m+n]{(1 - x)^m(1 + x)^n}$,

(7) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, **(8)** $f(x)=\sin^n x\cdot\cos nx$,

(9) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$, **(10)** $f(x)=\dfrac{1}{\cos^n x}$,

(11) $f(x)=e^{-x^2}$, **(12)** $f(x)=e^x(1+\operatorname{ctg}(x/2))$,

(13) $f(x)=e^{ax}\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$, **(14)** $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$,

(15) $f(x)=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$, **(16)** $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,

(17) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$, **(18)** $f(x)=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$,

(19) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, **(20)** $f(x)=x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$,

(21) $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2}$, **(22)** $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{a}$,

(23) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x}$, **(24)** $f(x)=\arcsin(\sin x)$,

(25) $f(x)=\arccos(\cos^2 x)$, **(26)** $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$,

(27) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$, **(28)** $f(x)=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

(29) $f(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$, $a>0$, **(30)** $f(x)=\log_x e$,

(31) $f(x)=x^{1/x}$, **(32)** $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$.

2. Исследовать на дифференцируемость, найти производные и изобразить графики функций и их производных:

(1) $f(x)=x|x|$, **(2)** $f(x)=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$,

(3) $f(x)=|\cos x|$, **(4)** $f(x)=[x]\sin^2\pi x$,

(5) $f(x)=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$, **(6)** $f(x)=\arcsin(\cos x)$,

(7) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\le 1\\ 1/e, & |x|>1,\end{cases}$ **(8)** $f(x)=\begin{cases} x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\ge 0.\end{cases}$

3. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\ne 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

имеет производную в каждой точке $x\in\mathbb{R}$, разрывную в нуле.

4. При каких n функция

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

(а) непрерывна в нуле, (б) дифференцируема в нуле, (в) имеет непрерывную в нуле производную?

5. При каких m, n, где $m > 0$, функция

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin \dfrac{1}{|x|^m} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет (а) ограниченную в окрестности нуля производную, (б) неограниченную в окрестности нуля производную?

6. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

7. Найти $f'(a)$, если $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке a.

8. Показать, что функция $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$, не имеет производной в точке a.

9. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq x_0, \\ ax + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция f была дифференцируемой в точке x_0?

10. Пусть

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leq x_0, \\ ax + b, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева в точке x_0. При каком выборе коэффициентов a, b функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0?

11. Можно ли утверждать, что сумма $f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке x, если (а) функция f имеет производную в точке x, а функция g — нет; (б) обе функции f и g не имеют производной в точке x?

12. Можно ли утверждать, что произведение $f(x) \cdot g(x)$ не имеет производной в точке x, если (а) функция f имеет производную в точке

x, а функция g — нет; (б) обе функции f и g не имеют производной в точке x?

13. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \infty$?

14. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$?

15. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$?

16. Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, конечный или бесконечный?

5.6. Пусть на (a, b) задана функция f, и пусть $x_0 \in (a, b)$ — точка, в которой существует конечная производная функции f. С геометрической точки зрения прямая с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, являющаяся графиком функции

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

представляет собой касательную к графику функции f в точке x_0. График функции

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

перпендикулярен касательной и является нормалью к графику функции f.

5.7. Задачи.

1. Под какими углами пересекаются кривые

(1) $y = x^2$, $x = y^2$; **(2)** $y = \sin x$, $y = \cos x$?

2. Доказать, что семейства парабол $y^2 = p^2 - 2px$ и $y^2 = 2qx + q^2$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, образуют ортогональную сетку.

3. Доказать, что семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют ортогональную сетку.

4. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

5.8. Как указано в п. 5.1, дифференцируемость функции f в точке $x \in (a, b)$ равносильна справедливости асимптотического равенства

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h) \quad \text{при } h \to 0 \tag{5.9}$$

для приращения $f(x+h) - f(x)$ функции f в точке x. Главную часть справа в этом равенстве, т. е. линейную относительно h функцию $f'(x) \cdot h$, называют *дифференциалом функции f в точке x* и при этом используют обозначение

$$df(x)(h) = f'(x) \cdot h. \tag{5.10}$$

В терминах дифференциала равенство (5.9) принимает вид

$$f(x+h) - f(x) = df(x)(h) + o(h), \quad h \to 0. \tag{5.11}$$

Так как для тождественной функции $f(x) = x$ будет $f'(x) = x' = 1$, можно записать, что $dx(h) = 1 \cdot h = h$, и если на место h в правой части (5.10) подставить выражение $dx(h)$, то равенство станет таким:

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h). \tag{5.12}$$

Переходя от равенства, выражающего совпадение значений функций слева и справа при каждом h, к равенству в терминах только символов функций, т. е. убирая h слева и справа, получим равенство

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{5.13}$$

Именно эту запись и используют для выражения дифференциала функции f в точке x. Таким образом, чтобы найти дифференциал функции, надо просто найти ее производную и сделать запись вида (5.13).

Возможность выделения главной части функции в виде дифференциала можно использовать для нахождения приближенных значений функции вблизи таких точек, в которых значение производной легко находится — для этого надо в формуле (5.11) ограничиться только главной частью и написать, что $f(x+h) - f(x) \approx df(x)(h) = f'(x) \cdot h$ для малых h. Важно при этом иметь в виду, что поскольку дифференциал определяется на основе асимптотического равенства, невозможно оценить погрешность найденного приближенного значения.

5.9. Задачи.

1. Найти дифференциалы:

(1) $d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2))$, **(2)** $d\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

2. Найти дифференциалы в указанных точках:

(1) $d\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{x-1}{x}\right), \quad x=-1;$

(2) $d\operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{x}, \quad x_1 = 1/e, \quad x_2 = e.$

3. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение функции $y = y(x)$ в указанных точках:

(1) $y = \sqrt[3]{x}$, (а) $x = 65$, (б) $x = 125{,}1342$;

(2) $y = \sin x$, (а) $x = 29^\circ$, (б) $x = 359^\circ$.

5.10. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на промежутке (a, b). Если при некотором натуральном n определена производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$ в точках $x \in (a, b)$, полагают $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ в тех точках, в которых существует указанная в правой части производная. При этом саму функцию считают производной нулевого порядка.

При нахождении производных высших порядков можно использовать формулы

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad (x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2).$$

Производная порядка n от произведения n раз дифференцируемых функций f, g может быть найдена по формуле Лейбница

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$.

5.11. Задачи.

1. Пусть f — трижды дифференцируемая функция. Найти $y''(x)$, $y'''(x)$, если

(1) $y(x) = f(x^2)$, **(2)** $y(x) = f(e^x)$.

2. Показать, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$.

3. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема при $x \le x_0$. Как следует подобрать коэффициенты a, b, c, чтобы функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \le x_0, \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

была дважды дифференцируемой?

4. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную порядка n и $g(x) = f(ax + b)$ то $g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax + b)$.

5. Найти $f^{(n)}(x)$, если

(1) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, **(2)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$, **(3)** $f(x) = \sin^2 x$,

(4) $f(x) = \sin^3 x$, **(5)** $f(x) = \sin ax \sin bx$, **(6)** $f(x) = x \cos ax$,

(7) $f(x) = e^x \cos x$.

6. Найти $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = x^2 e^{ax}$.

7. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \ne 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$.

5.12. Пусть на промежутке $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ заданы гладкие (т. е. имеющие на I непрерывные производные) функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $\varphi'(t_0) \ne 0$ в некоторой точке $t_0 \in I$. Тогда в некоторой окрестности (α, β) точки t_0 функция $x = \varphi(t)$ обратима. Пусть $t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к φ функция, определенная в некоторой окрестности (c, d) точки $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда на (c, d) определена функция

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)). \tag{5.14}$$

Если учесть, что $x = \varphi(t)$, последнее равенство можно записать и так:

$$\psi(t) = f(\varphi(t)) \tag{5.15}$$

для $t \in (\alpha, \beta)$. О функции f говорят, что она *задана параметрически посредством функций φ, ψ*. Обратим внимание на локальный характер параметрически заданной функции, хотя, конечно, множества, на которых она может быть определена, бывают обширными.

При выполнении указанных выше условий параметрически заданная функция дифференцируема и ее производная может быть найдена путем дифференцирования либо равенства (5.14) по x, либо равенства (5.15) по t, т. е.

$$f'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}, \tag{5.16}$$

если исходить из равенства (5.14), и

$$f'(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{5.17}$$

если из равенства (5.15).

Если определяющие функцию f функции φ, ψ имеют вблизи точки t_0 производные более высокого чем первый порядков, то в некоторой окрестности точки x_0 параметрически заданная функция имеет того же порядка производные, которые могут быть найдены последовательным дифференцированием равенства (5.14) либо равенства (5.15).

5.13. Задача. Найти производные первого и второго порядков от функций $f(x)$, заданных параметрически посредством функций $x(t)$, $y(t)$:

(1) $x = e^{-t}, \quad y = t^3$; **(2)** $x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t$;

(3) $x = e^{2t}\cos^2 t, \quad y = e^{2t}\sin^2 t$;

(4) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$.

5.14. Ответы. К п. 5.5. (1) $mn(x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1})$; (2) $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x| \neq 1)$; (3) $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}(p-(q+1)x-(p+q-1)x^2)$ $(x \neq -1)$; (4) $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x > 0)$; (5) $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$; (6) $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}$; (7) $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ $(|x| < |a|)$; (8) $n\sin^{n-1}x \cdot \cos(n+1)x$; (9) $\frac{2\sin x(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$; (10) $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$ $(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z})$; (11) $-2xe^{-x^2}$; (12) $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2(x/2)}$; (13) $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$; (14) $\frac{x}{x^4-1}$ $(|x| > 1)$; (15) $a^a \cdot x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^x \cdot a^{a^x}\ln^2 a$; (16) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (17) $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$; (18) $\frac{1}{\sin x}$ $(0 < x - 2k\pi < \pi,\ k \in \mathbb{Z})$; (19) $-\frac{1}{\cos x}$ $x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z})$; (20) $2\sin(\ln x)$ $(x > 0)$; (21) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $(|x| < 2)$; (22) $\frac{2ax}{x^4+a^2}$; (23) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$; (24) $\operatorname{sgn}(\cos x)$ $(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z})$; (25) $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$; (26) $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 < |x| < 1)$; (27) $\frac{1}{1+x^2}$ $(x \neq 1)$; (28) $-\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ $(x \neq$

0); (29) $\sqrt{a^2-x^2}$; (30) $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $(x>0,\ x\neq 1)$; (31) $x^{1/x-2}(1-\ln x)$ $(x>0)$; (32) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x)$.

2. (1) дифференцируема всюду; (2) недифференцируема при $x=1$; (3) недифференцируема при $x=\frac{2k-1}{2}\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; (4) дифференцируема всюду; (5) дифференцируема всюду; (6) недифференцируема при $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; (7) дифференцируема всюду; (8) дифференцируема всюду.

4. (а) $n>0$, (б) $n>1$, (в) $n>2$. **5.** (а) $n\geq m+1$, (б) $1<n<m+1$. **7.** $\varphi(a)$. **9.** $a=2x_0$, $b=-x_0^2$. **10.** $a=f'_-(x_0)$, $b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$.

К п. 5.7. 1. (1) $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; (2) $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. **4.** $a=\frac{1}{2e}$.

К п. 5.9. 1. (1) $9\sqrt{x}\ln x\,dx$; (2) $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2. (1) $-\frac{1}{2}\,dx$; (2) $\frac{2e^2}{e^2+1}\,dx$.

3. (1) (а) $4{,}0208$, (б) $5{,}00177$; (2) (а) $0{,}485$, (б) $-0{,}017$.

К п. 5.11. 1. (1) $y''=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$, $y'''=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$; (2) $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$, $y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$. **3.** $a=\frac{1}{2}f''(x_0)$, $b=f'(x_0)$, $c=f(x_0)$.

5. (1) $\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$; (2) $(-1)^n n!\big(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\big)$;
(3) $-2^{n-1}\cos\big(2x+\frac{n\pi}{2}\big)$; (4) $\frac{3}{4}\sin\big(x+\frac{n\pi}{2}\big)-\frac{3^n}{4}\sin\big(3x+\frac{n\pi}{2}\big)$;
(5) $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\big((a-b)x+\frac{n\pi}{2}\big)-\frac{(a+b)^n}{2}\cos\big((a+b)x+\frac{n\pi}{2}\big)$;
(6) $a^nx\cos\big(ax+\frac{n\pi}{2}\big)+na^{n-1}\sin\big(ax+\frac{n\pi}{2}\big)$; (7) $e^x2^{n/2}\cos\big(x+\frac{n\pi}{4}\big)$.

6. $n(n-1)a^{n-2}$.

К п. 5.13. (1) $y'_x=-3t^2e^t$, $y''_x=3t(2+t)e^{2t}$; (2) $y'_x=-1$, $y''_x=0$ $(0<x<1)$; (3) $y'_x=\operatorname{tg}t\cdot\operatorname{tg}\big(t+\frac{\pi}{4}\big)$, $y''_x=\frac{e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)}{2\cos^3 t(\cos t-\sin t)^3}$ $(t\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$, $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z})$; (4) $y'_x=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $y''_x=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$ $(t\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z})$.

§ 6. Свойства дифференцируемых функций

6.1. Производная функции в данной точке отражает локальные свойства функции, т. е. свойства, присущие функции в некоторой окрестности данной точки. Вместе с тем есть группа утверждений, позволяющих из свойств производной в каждой точке некоторого промежутка получать те или иные свойства функции на всем промежутке, т. е. глобальные свойства.

Основой перехода от локальных свойств к глобальным служат формулируемые ниже теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

Теорема Ролля. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.*

Теорема Лагранжа. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \tag{6.1}$$

или, иначе,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{6.2}$$

Теорема Коши. *Пусть функции f, g непрерывны на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируемы на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c). \tag{6.3}$$

В случае, если $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$, равенство (6.3) обычно записывают так:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{6.4}$$

Переход от свойств производной к свойствам функции отражен в следующих утверждениях.

Теорема (критерий монотонности функции). *Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на (a, b). Тогда для того чтобы f была возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ (соответственно $f'(x) \leq 0$) для любого $x \in (a, b)$. Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) в каждой точке $x \in (a, b)$, то f строго возрастает (убывает) на $[a, b]$.*

Теорема (критерий постоянства функции). *Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f постоянна на $[a, b]$ в том и только в том случае, если $f'(x) = 0$ в каждой точке $x \in (a, b)$.*

Теорема (об оценке приращения). *Пусть функция f непрерывна на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема на (a, b). Предположим, что найдутся такие константы m, M, что $m \leq f'(x) \leq M$ для каждого $x \in (a, b)$. Тогда*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a). \tag{6.5}$$

В частности, если $|f'(x)| \le C$ для любого $x \in (a, b)$, то

$$|f(b) - f(a)| \le C|b - a|. \tag{6.6}$$

6.2. Задачи.

1. Дать геометрическую интерпретацию теорем Ролля, Лагранжа и Коши.

2. Пусть функция f имеет конечную производную в каждой точке интервала $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Доказать, что найдется такая точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

3. Пусть функция f определена и имеет непрерывные производные до порядка $n-1$ на сегменте $[x_0, x_n]$ и производную порядка n в интервале (x_0, x_n). Предположим, что выполнены равенства $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ в некоторых точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \in [x_0, x_n]$, где $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Доказать, что в интервале (x_0, x_n) найдется такая точка ξ, в которой $f^{(n)}(\xi) = 0$.

4. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

все корни вещественные и заключены в интервале $(-1, 1)$.

5. Доказать, что если все корни многочлена $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ $(a_n \ne 0)$ с вещественными коэффициентами a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ вещественны, то его производные $P_n'(x)$, $P_n''(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь вещественные корни.

6. Пусть f имеет непрерывную производную на $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Можно ли для каждой точки $\xi \in (a, b)$ указать две другие точки $x_1, x_2 \in (a, b)$ такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad x_1 < \xi < x_2?$$

7. Пусть f имеет непрерывную производную на $(-\infty, +\infty)$ и для любых $x, h \in (-\infty, +\infty)$ справедливо тождество $f(x + h) - f(x) = hf'(x)$. Доказать, что $f(x) = ax + b$, где a, b — постоянные.

8. Пусть f имеет непрерывную вторую производную на $(-\infty, +\infty)$ и для любых $x, h \in (-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + h/2).$$

Доказать, что $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — постоянные.

9. Доказать, что единственная функция f, имеющая постоянную производную $f'(x) = k$, есть функция вида $f(x) = kx + b$.

10. Доказать, что если функция f дифференцируема, но не ограничена на интервале (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, то ее производная также не ограничена на (a, b).

11. Доказать, что если функция имеет в некотором промежутке числовой прямой ограниченную производную, то она равномерно непрерывна на данном промежутке.

12. Доказать, что если функция f дифференцируема в интервале $(a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$, т. е. $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.

13. Доказать тождество

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$$

при $|x| \geq 1$.

14. Доказать неравенства

(1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$,

(2) $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y), \quad 0 < y < x,\ p > 1,$

(3) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|$, **(4)** $\dfrac{a-b}{a} < \ln \dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, $0 < b < a$,

(5) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ при $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$,

(6) $\dfrac{2}{\pi} x < \sin x < x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

6.3. Пусть функция f имеет в точке a производные до порядка n включительно. Тогда полином

$$P_n(x) = P_n(x, a, f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

называют *полиномом Тейлора функции* f *в точке* a. Равенство

$$f(x) = P_n(x, a, f) + R_n(x, a, f),$$

в котором $R_n(x, a, f) = f(x) - P_n(x, a, f)$, называют *формулой Тейлора*, а $R_n(x, a, f)$ — *остатком в формуле Тейлора*.

При использовании формулы Тейлора большое значение имеют свойства остатка. Такие свойства могут носить локальный или глобальный характер. Здесь мы остановимся на локальных свойствах остатка.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть f имеет n производных в точке a. Тогда $R_n(x) = o(x-a)^n$, т. е.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n. \tag{6.7}$$

Отметим, что асимптотическое представление (6.7) функции f вблизи точки a единственно, т. е. если f представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o(x-a)^n,$$

то $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Если в формулировке задачи встречается предложение разложить какую-то функцию по целым положительным степеням $x - a$ или по степеням x, то имеется в виду необходимость записать формулу Тейлора, в которой в качестве начальной точки выбрана точка a или соответственно точка 0.

Если в качестве начальной берется нулевая точка, т. е. если идет разложение по степеням x, то формулу Тейлора часто называют *формулой Маклорена.*

Мы уже встречались с небольшим списком асимптотических разложений конкретных функций, состоящим из формул (3.11)–(3.15). Напомним и расширим его, записав формулы в развернутом виде и в краткой форме:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}), \tag{6.9}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \tag{6.10}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \tag{6.11}$$

$$(1+x)^\mu = 1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), \tag{6.12}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n), \quad \frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n), \tag{6.13}$$

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+o(x^n)\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n), \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= x-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2k+1}).\end{aligned} \tag{6.15}$$

6.4. Пример. Разложим функцию $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ по целым положительным степеням x до члена с x^6. Воспользуемся известными разложениями логарифма и синуса:

$$\begin{aligned}\ln\frac{\sin x}{x} &= \ln\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)}{x}\\ &= \ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)\right)\right)\\ &= -\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right)^3+o(x^6)\\ &= -\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}-\frac{x^4}{2(3!)^2}+\frac{x^6}{3!\cdot 5!}-\frac{x^6}{3\cdot(3!)^3}+o(x^6)\\ &= -\frac{x^2}{6}-\left(\frac{1}{72}-\frac{1}{120}\right)x^4-\left(\frac{1}{5040}-\frac{2}{720}+\frac{1}{648}\right)x^6+o(x^6)\\ &= -\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6).\end{aligned}$$

6.5. Задачи.

1. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^4)$:

(1) $\dfrac{x}{e^x-1}$, **(2)** $e^{x/\sin x}$, **(3)** $\sin(\operatorname{arctg} x)$. **(4)** $\dfrac{x}{\arcsin x}$.

2. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^5)$:

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$, **(2)** $(1+x)^{\sin x}$.

3. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$:

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$, **(2)** $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+4}$, **(3)** $\dfrac{x^2+1}{2x-3}$, **(4)** $\dfrac{x^3}{x-1}$.

4. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o(x-x_0)^n$:

(1) $\ln(2+x-x^2)$, $x_0=1$; **(2)** $\ln(x^2-7x+12)$, $x_0=1$;

(3) $\dfrac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$, **(4)** $\dfrac{(x-2)^2}{3-x}$, $x_0=2$.

5. Функцию $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ $(x>0)$ разложить по целым положительным степеням дроби $1/x$ до члена с $1/x^3$.

6.6. Пример. Подобрать коэффициенты A, B так, чтобы при $x\to 0$ имело место асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5). \tag{6.16}$$

Воспользуемся разложениями для синуса и косинуса. Равенство (6.16) запишем так:

$$\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)}-\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}=O(x^5),$$

или

$$\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6))(x+Bx^3)-(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7))(1+Ax^2)}{(x+o(x))(x+o(x))} = O(x^5),$$

а это по определению означает, что отношение выражения в левой части последнего равенства к x^5 ограничено. Запишем это отношение, одновременно проведя преобразования:

$$\frac{(B-A-1/3)x^3+(A/6-B/2+1/30)x^5+O(x^7)}{x^7+o(x^7)}.$$

Это выражение ограничено в окрестности нуля в том случае, если члены с x^3 и x^5 отсутствуют, т. е. если

$$B-A-\frac{1}{3}=0, \quad \frac{A}{6}-\frac{B}{2}+\frac{1}{30}=0.$$

Решая эту систему, получим $A = -2/5$, $B = -1/15$.

6.7. Задачи.

1. При каких a и b величина $x-(a+b\cos x)\sin x$ будет бесконечно малой 5-го порядка относительно x?

2. При каких A, B, C, D при $x \to 0$ справедлива формула

$$e^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2} + O(x^5)?$$

3. Найти такие A, B, чтобы при $x \to 0$ были справедливы асимптотические равенства

(1) $Ae^x - \dfrac{B}{1-x} = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$,

(2) $A\arcsin x + B \operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{8}x^5 + o(x^6)$.

6.8. Локальная форма остатка в формуле Тейлора дает лишь асимптотическую информацию. По ней невозможно ответить, например, на вопрос об оценке абсолютной погрешности остатка при каком-либо фиксированном x или на каком-то отрезке и на другие вопросы нелокального характера.

Для получения глобальных свойств служат соответствующие формы остатка в формуле Тейлора.

Теорема (формы Лагранжа и Коши остатка в формуле Тейлора). *Пусть функция f имеет непрерывные производные до порядка n в каждой точке отрезка I с концами a, x и в открытом промежутке с этими концами имеет производную порядка $n+1$. Тогда*

(Л) *существует такая точка ξ между a и x, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{6.17}$$

(*форма Лагранжа остатка*),

(К) *существует такое $\theta \in (0,1)$, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1} \tag{6.18}$$

(*форма Коши*).

Остаток в форме Лагранжа можно записать и так: найдется такое $\mu \in (0,1)$, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\mu(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (6.19)$$

Глобальные формы остатка уже позволяют ответить, например, на вопрос о величине остатка на данном отрезке при заданном количестве членов в формуле Тейлора или на вопрос о количестве членов для достижения заданной точности в процессе приближенного вычисления значения функции на данном элементе. Для этого мы можем оценить сверху остаток, и такая оценка позволит ответить на поставленный вопрос.

6.9. Пример. Оценим абсолютную погрешность приближенной формулы $\sin x \approx x - x^3/6$ при $0 \le x \le 1/2$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (считая, что разложение доводится до x^4) имеем

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{\sin^{(5)}\xi}{120}x^5 = \frac{\cos\xi}{120}x^5,$$

где $\xi \in (0,x)$. Поскольку $|\cos\xi| \le 1$, то

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \le \frac{x^5}{120} \le \sup_{x\in[0,1/2]} \frac{x^5}{120} = \frac{(1/2)^5}{120} = \frac{1}{3840}.$$

6.10. Пример. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислим $\sqrt[12]{4000}$ и оценим погрешность. Воспользуемся формулой Тейлора для функции $(1+x)^\mu = 1+\mu x+R_1(x)$ с начальной точкой $a = 0$, взяв для простоты всего два члена в формуле Тейлора. Представим $4000 = 2^{12} - 96$. Тогда

$$\sqrt[12]{4000} = (2^{12}-96)^{1/12} = 2\left(1 - \frac{96}{2^{12}}\right)^{1/12}.$$

Положим $\mu = 1/12$, $x = -96/2^{12} = -3/128$. Имеем

$$\sqrt[12]{4000} = 2\left(1-\frac{3}{128}\right)^{1/12} = 2\left(1+\frac{1}{12}\left(-\frac{3}{2^7}\right)+R_1(x)\right)$$
$$= 2\left(1-\frac{1}{2^9}+R_1(x)\right) = \frac{2^9-1}{2^8} + 2R_1(x).$$

Оценим остаток $R_1(x)$, воспользовавшись формой Лагранжа остаточного члена: найдется такое $\xi \in (-3/2^7, 0)$, что

$$2|R_1(x)| = 2\left|\frac{((1+\xi)^{1/12})''}{2!}x^2\right| = 2\cdot\frac{1}{12}\frac{11}{12}\frac{(1+\xi)^{-23/12}}{2!}\left(\frac{3}{2^7}\right)^2$$

$$= 2\cdot\frac{11\cdot 3^2}{3^2\cdot 2^{19}(1+\xi)^{23/12}} \le \frac{22}{2^{19}(1-3/128)^{23/12}} \le \frac{22}{10^5}.$$

Такова оценка погрешности.

6.11. Задачи.

1. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить и оценить погрешность:

(1) $\sqrt[3]{30}$, **(2)** $\sqrt[5]{250}$, **(3)** $\operatorname{arctg} 0.8$, **(4)** $\arcsin 0.45$.

2. Вычислить

(1) e с точностью до 10^{-3}, **(2)** $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-6},
(3) $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-3}, **(4)** $\lg 11$ с точностью до 10^{-3}.

6.12. Еще одним применением производной является возможность ее использования при нахождении пределов отношений функций.

Теорема (правило Лопиталя). *Рассмотрим промежуток $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$, предельную точку $a \in \overline{\mathbb{R}}$ промежутка Δ и две функции f, g, определенные и дифференцируемые на Δ всюду, кроме, может быть, точки a, причем $g'(x) \ne 0$ для $x \in \Delta$. Предположим, что либо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, либо $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. При этих условиях если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$ (где K может быть равным ∞), то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.*

Полезно вспомнить, как приводятся к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ неопределенности вида $0\cdot\infty$, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$. Пусть $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to 1$, $h(x)\to\infty$. Тогда можно использовать следующие соотношения:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}, \quad g(x)^{f(x)} = e^{f(x)\ln g(x)},$$

$$\varphi(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln\varphi(x)}, \quad g(x)-h(x) = g(x)\left(1-\frac{h(x)}{g(x)}\right).$$

В конкретных примерах можно, разумеется, воспользоваться простейшими преобразованиями.

6.13. Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Имеем

$$\frac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2\operatorname{arctg} x}.$$

Поскольку

$$(x-\operatorname{arctg} x)'=\frac{x^2}{1+x^2},\quad (x^2\operatorname{arctg} x)'=\frac{2x(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x^2}{1+x^2},$$

приходим к отношению

$$\frac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)x(2(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x)}=\frac{x}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x}.$$

Снова предел числителя и знаменателя нулевые, так что еще раз воспользуемся правилом Лопиталя. Найдем производную знаменателя: $2((1+x^2)\operatorname{arctg} x+x)'=4x\operatorname{arctg} x+3$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2\operatorname{arctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4x\operatorname{arctg} x+3}=\frac{1}{3}.$$

6.14. Задачи. Воспользовавшись правилом Лопиталя, найти пределы:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, $a>0$, **(4)** $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\operatorname{ctg} x$,

(5) $\lim\limits_{x\to +0}x^\alpha\ln^\beta\dfrac{1}{x}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, **(6)** $\lim\limits_{x\to +\infty}x^\alpha a^x$, $a>0$, $a\neq 1$,

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, **(8)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$,

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$, **(10)** $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\sqrt{x^2+1})^{1/\ln x}$,

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$, **(12)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$.

6.15. Использование производной для нахождения экстремумов основано на следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть f — дифференцируемая на (a,b) функция и $x \in (a,b)$ — такая точка, что $f'(x) = 0$ (так называемая стационарная, или критическая точка). Тогда если в некоторой окрестности слева от точки x производная положительна, а в некоторой окрестности справа отрицательна, то x — точка максимума, если же в некоторой окрестности слева от точки x производная отрицательна, а в некоторой окрестности справа положительна, то x — точка минимума функции f.*

Теорема 2. *Пусть f — дважды дифференцируемая на (a,b) функция и $x \in (a,b)$ такая точка, что $f'(x) = 0$. Тогда если $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$), то x — точка минимума (максимума) функции f.*

Как известно, всякая непрерывная на замкнутом ограниченном промежутке $[a,b]$ функция f достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Для их нахождения можно найти все (локальные) максимальные и минимальные значения f на $[a,b]$ и выбрать наибольшее (соответственно наименьшее) значение среди максимальных (минимальных) значений и значений $f(a)$ и $f(b)$ на концах промежутка.

6.16. Задача. Находя наибольшие и наименьшие значения соответствующих функций, доказать неравенства

(1) $\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1, \quad 0 \le x \le 1,\ p > 1;$

(2) $x^m(a-x)^n \le \dfrac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}, \quad m > 0,\ n > 0,\ 0 \le x \le a;$

(3) $\dfrac{x+a}{2^{(n-1)/n}} \le \sqrt[n]{x^n + a^n} \le x + a, \quad x \ge 0,\ a > 0,\ n \in \mathbb{N};$

(4) $|a \sin x + b \cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}.$

6.17. Функцию f называют *выпуклой (вниз) на промежутке* $(a,b) \subset \overline{\mathbb{R}}$, если для любых $x, y \in (a,b)$ и любых $\lambda, \mu \ge 0$ таких, что $\lambda + \mu = 1$, справедливо неравенство $f(\lambda x + \mu y) \le \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Функцию f называют *выпуклой вверх* (*вогнутой*), если функция $-f$ выпукла вниз.

Геометрически выпуклость означает, что точки любой дуги графика расположены не выше хорды, стягивающей эту дугу.

Теорема. *Пусть функция f дважды дифференцируема на промежутке (a,b). Тогда если $f''(x) \ge 0$ для всех $x \in (a,b)$, то f выпуклая на (a,b), а если $f''(x) \le 0$ для всех $x \in (a,b)$, то f вогнутая на (a,b).*

Точку, в которой меняется направление выпуклости, называют *точкой перегиба функции*. Для дважды дифференцируемой функции необходимым условием того, что данная точка является точкой перегиба, служит обращение в нуль второй производной в этой точке, а достаточным — смена знака второй производной при переходе через эту точку.

6.18. Задача. Установив выпуклость соответствующих функций, доказать неравенства:

(1) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \quad x > 0,\, y > 0,\, x \neq y,\, n > 1;$

(2) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{(x+y)/2}, \quad x \neq y;$

(3) $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \quad x > 0,\, y > 0,\, x \neq y;$

6.19. Выше мы отметили основные возможности использования производной для изучения некоторых свойств функций. Теперь, собрав эту информацию, займемся возможно полным исследованием свойств функций и построением их графиков.

При анализе свойств функций мы будем придерживаться следующего порядка: 1) найдем область определения, 2) исследуем особенности функции (четность, нечетность, периодичность), 3) найдем нули и участки знакопостоянства, 4) изучим поведение функции на концах области определения и найдем асимптоты, если они есть, 5) вычислив производную, найдем участки монотонности и точки экстремума, 6) вычислив вторую производную, найдем участки выпуклости, вогнутости и точки перегиба. По завершении исследования применим всю найденную информацию для построения графика.

Приведем основные сведения об асимптотах. Рассмотрим функцию f, у которой какая-то из бесконечно удаленных точек $+\infty$, $-\infty$ является предельной для области определения. Пусть для определенности это $+\infty$. Тогда прямую $y = kx + b$ такую, что

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0,$$

называют *асимптотой функции f на $+\infty$*. Для ее нахождения можно воспользоваться тем, что

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx), \tag{6.20}$$

при условии существования пределов в (6.20). Если при этом $k = 0$, то асимптоту называют *горизонтальной*, а если $k \neq 0$, то *наклонной*. В частности, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то положительная часть оси абсцисс является горизонтальной асимптотой.

Аналогичное можно сказать и для точки $-\infty$.

Если в некоторой конечной точке a оказывается, что предел $f(x)$, хотя бы какой-либо односторонний, бесконечен, то прямую $x = a$ называют *вертикальной асимптотой* функции f.

6.20. Пример. Построим график функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$.

Функция определена при всех x, кроме $x = 0$, обращается в нуль при $x = -1$. Отметим, что функция всюду неотрицательна. Ясно, что никакими свойствами четности или периодичности она не обладает.

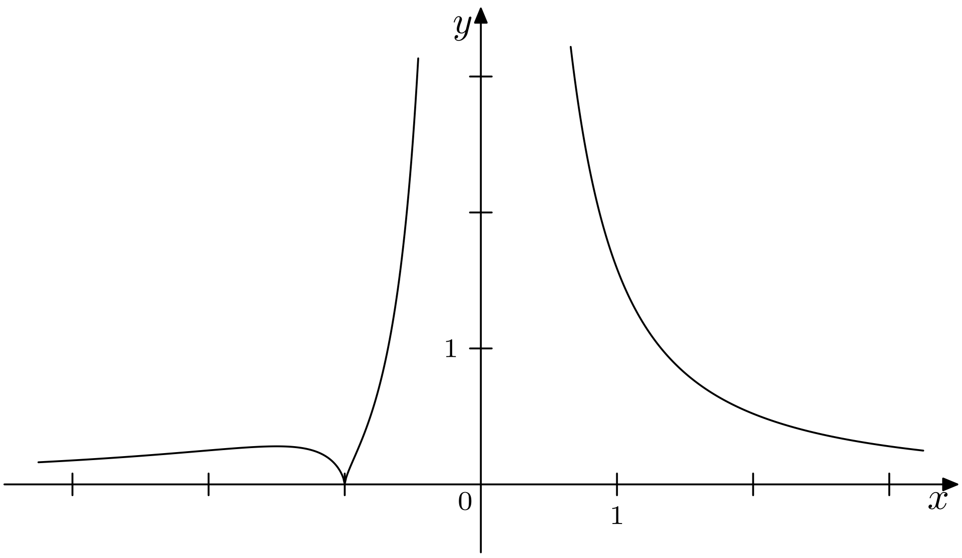
Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$, так что прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота. Вместе с тем $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = +\infty$, так что прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Найдем участки монотонности и экстремумы функции. Вычислим ее производную: $y' = 2\dfrac{-2x-3}{3x^3(x+1)^{1/3}}$. Она обращается в нуль в точке $x = -3/2$, если же $x \in (-\infty, -3/2)$, то $y'(x) > 0$ и функция возрастает, если $x \in (-3/2, -1)$, то $y'(x) < 0$, и функция убывает. В точке $x = -1$ конечной производной нет, однако для односторонних производных имеем $y'_-(-1) = -\infty$, $y'_+(-1) = +\infty$. На промежутке $(-1, 0)$ будет $y'(x) > 0$ и функция возрастает, а на $(0, +\infty)$ имеем $y'(x) < 0$ и функция убывает. Ясно, что точка $x = -3/2$, в которой производная обратилась в нуль, будет точкой максимума, а точка $x = -1$, в которой производной нет, оказывается точкой минимума функции, кроме того, в этой точке функция имеет вертикальную касательную. Отметим, что $y(-1) = 0$.

Изучим наличие точек перегиба. Найдем

$$y''(x) = -\frac{2}{3}\frac{14x^2 + 42x + 27}{x^4(x+1)^{4/3}}$$

и отметим, что $y''(x) = 0$ при $x = \dfrac{-42 \pm \sqrt{252}}{28} \approx \dfrac{-42 \pm 16}{28}$. Таким образом, $y''(x) = 0$ в точках $x_1 \approx -58/28 \approx -2.07$, $x_2 \approx -24/28 \approx -0.86$. Ясно, что при $x < x_1$ и при $x > x_2$ будет $y''(x) > 0$ и $y(x)$ выпукла вниз, а при $x \in (x_1, x_2)$ имеем $y''(x) < 0$ и $y(x)$ выпукла вверх. Отметим, что $y(x_1) \approx 0.24$, $y(x_2) \approx 0.37$. Теперь изобразим график:



6.21. Задачи. Построить графики функций

(1) $y = \dfrac{x^3}{x+1}$, **(2)** $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$, **(3)** $y = x + \sqrt{x^2-1}$,

(4) $x\sqrt{x+1}$, **(5)** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1+x}}$, **(6)** $y = |x|\sqrt{1-x^2}$,

(7) $y = x\sqrt{|x^2-1|}$, **(8)** $y = x^2e^{-x}$, **(9)** $e^{\frac{1-x}{1+x}}$,

(10) $y = x^2\ln x$, **(11)** $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$, **(12)** $y = xe^{-x^2}$,

(13) $y = \sin x - \sin^2 x$, **(14)** $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$,

(15) $y = x \operatorname{arctg} x$, **(16)** $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

6.22. Пример. Построим график функции, заданной параметрически функциями

$$x(t) = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad y(t) = \frac{t^2+1}{t+2}.$$

Построим сначала графики функций $x(t)$, $y(t)$ — они помогут изучить параметрически заданную функцию $y(x)$.

Функция $x(t)$ определена всюду, кроме точек $x = \pm 1$, обращается в нуль при $t = 0$ и положительна при $|t| > 1$. Функция четная. Если $t \to \pm\infty$, то $x(t) \to 1$, при $x \to 1+0$ будет $x(t) \to +\infty$, а при $t \to 1-0$ имеем $x(t) \to -\infty$. Таким образом, прямая $y = 1$ оказывается ее горизонтальной асимптотой, а прямые $x = 1$ и $x = -1$ — вертикальными. Найдем производные:

$$x'(t) = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}, \quad x''(t) = \frac{6t^2+2}{(t^2-1)^3}.$$

Ясно, что $x'(t) > 0$ при $t < 0$, значит, $x(t)$ возрастает на промежутках $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и убывает на промежутках $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. Вторая производная говорит о том, что на промежутке $(-1, 1)$ функция вогнута, на остальных двух промежутках выпукла.

Функция $y(t) = \dfrac{t^2+1}{t+2}$ определена при $t \neq -2$, общего вида. Отметим ее асимптотику на концах области определения:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty,$$

$$\lim_{t\to-2+0} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to-2-0} y(t) = -\infty.$$

Исследуем наличие наклонных асимптот $y = kt + b$. Имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{t(t+2)} = 1,$$

так что $k = 1$. Найдем b:

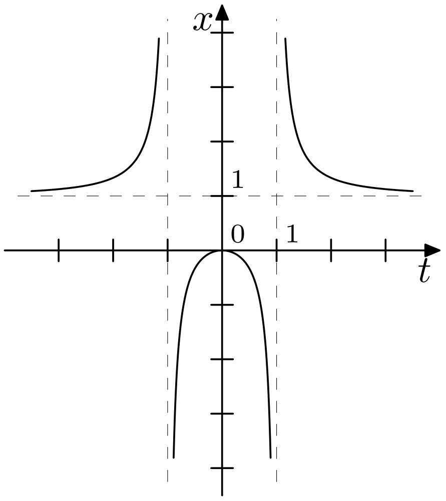
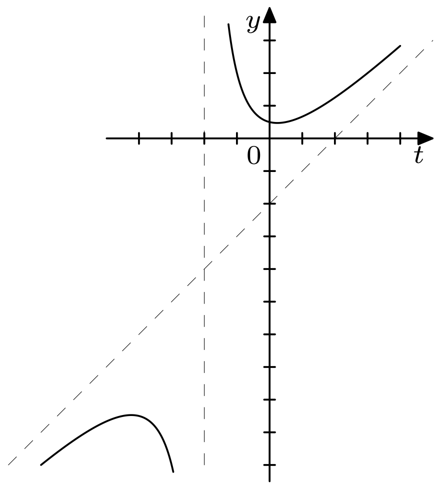
$$\lim_{t\to\infty} (y(t) - t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^2}{t+2} - t \right) = \lim_{t\to\infty} \frac{1-2t}{t+2} = -2,$$

тем самым $b = -2$ и прямая $y = t - 2$ оказывается наклонной асимптотой (как на $+\infty$, так и на $-\infty$). Найдем производные:

$$y'(t) = \frac{t^2+4t-1}{(t+2)^2}, \quad y''(t) = \frac{5}{(t+2)^3}.$$

Имеем $y'(t) = 0$ при $t_1 = -2-\sqrt{5} \approx -4.24$ и $t_2 = -2+\sqrt{5} \approx 0.24$. Вторая производная всюду в области определения положительна. Находя промежутки положительности и отрицательности первой производной, получаем, что $y(t)$ возрастает на промежутках $(-\infty, -2-\sqrt{5})$, $(-2+\sqrt{5}, +\infty)$ и убывает на промежутках $(-2-\sqrt{5}, -2)$, $(-2, -2+\sqrt{5})$. В точке $-2-\sqrt{5}$ будет максимум, равный примерно -8.5, а в $-2+\sqrt{5}$ — минимум, равный примерно 0.47.

Изобразим на основе проведенных исследований графики функций $x(t)$ и $y(t)$:

Теперь изучим функцию $y(x)$, заданную параметрически посредством функций $x(t)$, $y(t)$. Это будет удобнее сделать, разбив всю числовую прямую на такие промежутки, на каждом из которых какая-либо из функций $x(t)$, $y(t)$ сохраняет монотонность. При таком разбиении легче будет проследить, в каких пределах изменяются и как ведут себя точки $(x(t), y(t))$ на плоскости. Естественно разбить множество изменения параметра t на следующие промежутки: $I_1 = (-\infty, -2-\sqrt{5})$, $I_2 = (-2-\sqrt{5}, -2)$, $I_3 = (-2, -1)$, $I_4 = (-1, 0)$, $I_5 = (0, -2+\sqrt{5})$, $I_6 = (-2+\sqrt{5}, 1)$, $I_7 = (1, +\infty)$. Все данные оформим в виде таблицы:

	t		$x(t)$		$y(t)$	
	от	до	от	до	от	до
I_1	$-\infty$	$-2-\sqrt{5}$	1	1.06	$-\infty$	-8.5
I_2	$-2-\sqrt{5}$	-2	1.06	1.33	-8.5	$-\infty$
I_3	-2	-1	1.33	$+\infty$	$+\infty$	2
I_4	-1	0	$-\infty$	0	2	0.5
I_5	0	$-2+\sqrt{5}$	0	-0.06	0.5	0.47
I_6	$-2+\sqrt{5}$	1	-0.06	$-\infty$	0.47	0.66
I_7	1	$+\infty$	$+\infty$	1	0.66	$+\infty$

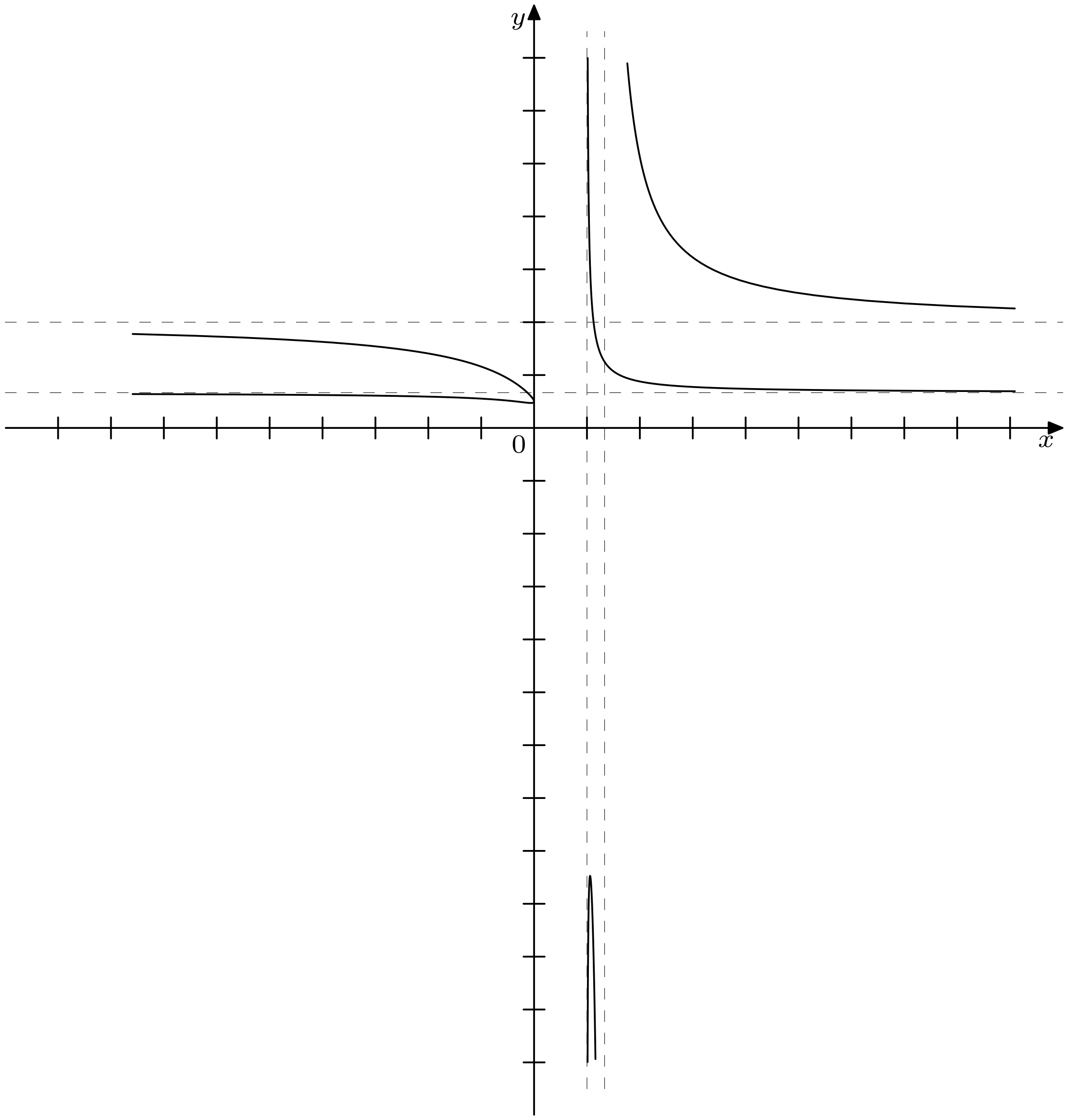
Найдем первую производную:

$$y'_x(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(t^2+4t-1)(t^2-1)^2}{(t+2)^2(-2t)}.$$

Ясно, что $y'_x(x(t)) = 0$ при $t_1 = -2-\sqrt{5}$, $t_2 = -2+\sqrt{5}$, т. е. при $x_1 \approx 1.06$, $x_2 \approx -0.06$. При переходе через x_1, x_2 производная так меняет знак, что x_1 оказывается точкой максимума, а x_2 — точкой минимума. Значения $y(x_1)$, $y(x_2)$ видны из таблицы. Полезно отметить, что $|y'_x(0)| = +\infty$, причем $\lim\limits_{t\to -0} y'(x(t)) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to +0} y'(x(t)) = +\infty$.

Мы не будем проводить исследование на выпуклость и точки перегиба ввиду громоздкости выкладок. Наличие единственной точки перегиба предугадывается из общих соображений.

Исходя из полученной информации, построим график $y(x)$:



6.23. Задача. Построить графики параметрически заданных функций:

(1) $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = 3t - t^3$; **(2)** $x(t) = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$;

(3) $x(t) = \cos^4 t$, $y(t) = \sin^4 t$; **(4)** $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \cos 3t$;

(5) $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$;

(6) $x(t) = t^3 + 3t + 1, \quad y(t) = t^3 - 3t + 1.$

6.24. Ответы. К п. 6.5. 1. (1) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4)$; (2) $e + \frac{e}{6}x^2 + \frac{e}{30}x^4 + o(x^4)$; (3) $x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$; (4) $1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{360}x^4 + o(x^4)$. **2.** (1) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$; (2) $1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)$. **3.** (1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{3}((-1)^{k+1} - 2^{-(k+1)})x^k + o(x^n)$; (2) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(1 + 4^{(k+1)})x^k + o(x^n)$; (3) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{13}{12}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k + o(x^n)$; (4) $-\sum\limits_{k=3}^{n} x^k + o(x^n)$. **4.** (1) $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}2^{-k}-1}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$; (2) $\ln 6 - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n)$; (3) $3 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k(x-2)^k + o((x-2)^n)$; (4) $\sum\limits_{k=2}^{n}(x-2)^k + o((x-2)^n)$. **5.** $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

К п. 6.7. 1. $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. **2.** $A = -\frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{15}$; **3.** (1) $A = 1$, $B = 1$; (2) $A = 1$, $B = -1$.

К п. 6.11. 1. (1) 3.1072; (2) 3.0171; (3) 0.67474; (4) 0.46676. **2.** 2.718; (2) 0.017452; (3) 2.236; (4) 1.041.

К п. 6.14. (1) $\frac{1-\ln\alpha}{\ln a}$; (2) 1; (3) $\frac{1}{a}$; (4) 0; (5) 0; (6) 0 при $0 < a < 1$ (α любое), $+\infty$ при $a > 1$ (α любое); (7) $\frac{1}{2}$; (8) $-\frac{1}{3}$; (9) $e^{-2/\pi}$; (10) e; (11) $e^{-1/6}$; (12) e^{-1}.