§ 7. Первообразная и неопределенный интеграл

7.1. Пусть на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ задана функция $f(x)$. Функцию $F(x)$ называют *первообразной функции $f(x)$ на промежутке I*, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in I$, и *первообразной в обобщенном смысле функции $f(x)$ на промежутке I*, если F непрерывна на I и существует такое конечное подмножество $E \subset I$, что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in I \setminus E$.

Разность любых двух первообразных данной функции постоянна. Совокупность всех первообразных функции f называют *неопределенным интегралом функции f* и обозначают символом $\int f(x)\,dx$ (фрагмент dx в этом обозначении как правило указывает на переменную интегрирования). Если f имеет первообразную на I, то говорят, что f *интегрируема на I*.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то используют обозначение

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Допуская вольность в обозначениях, указание постоянной опускают, и мы обычно будем так поступать при записи результата нахождения неопределенного интеграла.

Чаще всего мы будем решать задачу нахождения (точной) первообразной, но в тех ситуациях, когда точной первообразной нет, будем изучать вопрос наличия и нахождения первообразной в обобщенном смысле. Все приводимые ниже утверждения с возможными очевидными уточнениями в формулировках справедливы и для первообразных в обобщенном смысле.

7.2. Теорема (линейность интеграла). *Если функции f, g интегрируемы на I, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на I и*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx. \tag{7.1}$$

7.3. Теорема (интегрирование по частям). *Если f, g дифференцируемы на I и произведение $g(x)f'(x)$ интегрируемо на I, то произведение $f(x)g'(x)$ также интегрируемо на I и имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{7.2}$$

Используя символическую запись $df(x) = f'(x)dx$, формулу интегрирования по частям можно записать в одном из видов

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x). \tag{7.3a}$$

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{7.3b}$$

Интегрирование по частям применяется в следующей ситуации. Если подынтегральная функция представима (или представлена) в виде произведения двух дифференцируемых функций и мы находим, что дифференцирование одной из них приводит к более простой функции, то можно попробовать воспользоваться интегрированием по частям. В таком случае второй сомножитель надо представить в виде производной от соответствующей функции (т. е. найти первообразную второго сомножителя) и применить формулу интегрирования по частям. В результате после дифференцирования первой функции может получиться подынтегральная функция более простого вида. При этом чаще всего удобно пользоваться формулой вида (7.3b).

7.4. Теорема (о замене переменной). *Пусть $f(u)$ — функция, имеющая на промежутке I первообразную $F(u)$, и пусть φ — дифференцируемая на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функция, отображающая этот промежуток на промежуток I. Тогда функция $F(\varphi(x))$ будет первообразной функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ на промежутке Δ. Иначе говоря, если*

$$\int f(u)\,du = F(u), \quad u \in I,$$

то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)), \quad x \in \Delta.$$

Заменой переменных можно воспользоваться в следующей ситуации. Допустим, что исходный интеграл $\int g(x)\,dx$ удалось представить в виде

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x), \tag{7.4}$$

и если первообразная $F(u)$ функции $f(u)$ известна или может быть найдена, т. е. если $\int f(u)\,du = F(u)$, то можно найти и первообразную функции $g(x)$:

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)).$$

Другими словами, если исходная подынтегральная функция устроена таким образом, что она, по существу, формируется с использованием некоторого единого выражения, зависящего от x, то, взяв всё это выражение в качестве новой переменной (заменив это выражение единым символом, новой переменной), мы сводим нахождение первообразной исходной функции к нахождению первообразной другой, как правило более простой функции.

7.5. Теорема (о подстановке). *Пусть $f(x)$ — функция, заданная на промежутке I, и пусть $\varphi(t)$ — заданная на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ строго монотонная дифференцируемая функция, отображающая Δ на I и имеющая дифференцируемую обратную. Тогда если функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную $\Phi(t)$ на промежутке Δ, то f имеет первообразную на I, равную $\Phi(\varphi^{-1}(x))$. Иначе говоря, если*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(t), \quad t \in \Delta,$$

то

$$\int f(x)\,dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in I.$$

Метод подстановки для нахождения интеграла $\int f(x)\,dx$ применяют обычно так. Из каких-то соображений берут удовлетворяющую условиям теоремы о подстановке функцию $\varphi(t)$ и на место x в исходном интеграле подставляют $x = \varphi(t)$, при этом расписывая $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$. В результате переходят к нахождению первообразной новой функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т. е. к нахождению интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Если его удается найти и при этом

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(t),$$

то интеграл от $f(x)$ получают подстановкой в Φ на место t выражения $\varphi^{-1}(x)$, т. е.

$$\int f(x)\,dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)).$$

7.6. Таблица простейших неопределенных интегралов.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1,\ x > 0; \tag{7.5}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \quad x \neq 0; \tag{7.6}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}; \quad \int e^x\,dx = e^x, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{7.7}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \quad \int \cos x\,dx = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{7.8}$$

$$\begin{gathered}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z};\\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z};\end{gathered} \tag{7.9}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, \\ -\operatorname{arcctg} x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}; \tag{7.10}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x, \\ -\arccos x, \end{cases} \quad x \in [-1, 1]; \tag{7.11}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \quad |x| \neq 1; \tag{7.12}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ |x| > 1; \tag{7.13}$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x, \quad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x; \tag{7.14}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x. \tag{7.15}$$

7.7. Примеры. Найдем указанные ниже интегралы.

1. В простейших случаях можно, воспользовавшись несложными преобразованиями, привести интеграл к табличным:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$$
$$= \int \sqrt{x}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{1/2}\,dx + \int x^{-1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}.$$

2. При интегрировании выражений, связанных с тригонометрическими функциями, прежде всего надо попробовать провести простейшие преобразования, используя формулы, с тем, чтобы, возможно, прийти к табличным интегралам:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x.$$

3. Если искомый интеграл отличается от табличного только постоянными множителями в каких-то частях подынтегрального выражения, то можно воспользоваться простой заменой:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{b}{a}x)^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{d(\frac{b}{a}x)}{1+(\frac{b}{a}x)^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x.$$

4. Иногда для поиска замены приходится применять хитрости. Найдем при $x>0$ интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+1/x^2}} = -\int \frac{d(1/x)}{\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$(\text{замена } u = 1/x)$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\ln(u+\sqrt{u^2+1}) = -\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

5. Применяемые для поиска замены хитрости могут оказаться очевидными:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$(\text{замена } u = \cos x)$$

$$= -\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

6. При интегрировании дробно-рациональной функции обычно раскладывают ее в сумму простейших дробей, и иногда это легко сделать без обращения к специальным методам:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

7. Вид подынтегральной функции может подсказать удачную подстановку. Так, например, в интеграле

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx, \quad a>0,$$

учитывая формулы

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1, \quad \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t, \quad \operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$$

для гиперболических функций, можно сделать подстановку $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, разумеется, подготовив ее, т. е. выразив t через x, и проанализировав, на каких промежутках изменения переменных t и x это возможно. При нашей подстановке, учитывая свойства синуса гиперболического, обе переменные можно рассматривать на всей числовой прямой. Итак, после подстановки получим такой интеграл:

$$\int \sqrt{a^2 + a^2\,\mathrm{sh}^2\,t}\cdot a\cdot \mathrm{ch}\,t\,dt = a^2\int \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,t}\,\mathrm{ch}\,t\,dt$$
$$= a^2\int \mathrm{ch}^2\,t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\mathrm{ch}\,2t)\,dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\,\mathrm{sh}\,2t.$$

Учитывая, что $\mathrm{arsh}\,z = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$ и тем самым

$$t = \mathrm{arsh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

вернемся к переменной x:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arsh}\,\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{ch}\left(\mathrm{arsh}\,\frac{x}{a}\right)\mathrm{sh}\left(\mathrm{arsh}\,\frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{a^2}\right).$$

8. Найдем интеграл $\int xe^{-x}\,dx$. Заметим, что под интегралом стоит произведение двух функций, одна их которых, а именно $f(x) = x$, после дифференцирования становится проще. Это подсказывает нам, что следует попробовать воспользоваться интегрированием по частям. Представим второй сомножитель как производную соответствующей функции: $e^{-x} = (-e^{-x})'$. Проведем предварительную подготовку для использования одной из формул (7.2), (7.3), т. е. запишем интеграл так:

$$\int xe^{-x}\,dx = -\int x\,de^{-x}.$$

Теперь завершим нахождение путем применения формулы (7.3b):

$$\int xe^{-x}\,dx = -\int x\,de^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(1+x).$$

9. В этом примере совместим использование замены и затем интегрирования по частям. Найдем интеграл $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. Поскольку с функцией вида e^t обращаться проще, чем с функцией вида $e^{\sqrt{x}}$, можно весь корень в показателе степени взять в качестве новой переменной, благо свойство строгого возрастания корня позволяет выразить x через t. Итак, сделаем замену $\sqrt{x}=t$ и подготовим переход к новой переменной: $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, $t\ge 0$. Применяя интегрирование по частям, имеем

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t\,dt = 2\int t\,de^t$$
$$= 2\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = 2e^t(t-1) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1).$$

7.8. Задачи. Найти интегралы

(1) $\int \dfrac{x^2\,dx}{1+x^2}$, **(2)** $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$, **(3)** $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$,

(4) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$, **(5)** $\int \dfrac{dx}{2-3x^2}$, **(6)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$,

(7) $\int \dfrac{dx}{1+\cos x}$, **(8)** $\int \dfrac{dx}{1-\cos x}$, **(9)** $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

(10) $\int \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, **(11)** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, **(12)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$,

(13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, **(14)** $\int x\sqrt{1+x}\,dx$, **(15)** $\int \operatorname{tg} x\,dx$,

(16) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$, **(17)** $\int \dfrac{dx}{\cos x}$, **(18)** $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh} x}$,

(19) $\int \dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$, **(20)** $\int \dfrac{x^2}{1+x}\,dx$, **(21)** $\int \dfrac{x\,dx}{(1-x^2)^2}$,

(22) $\int \dfrac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$, **(23)** $\int \dfrac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$, $a\ne b$,

(24) $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a^2\ne b^2$, **(25)** $\int \sin^2 x\,dx$,

(26) $\int \cos^2 x\,dx$, **(27)** $\int \sin^3 x\,dx$, **(28)** $\int \cos^3 x\,dx$,

(29) $\int \cos^4 x\,dx$, **(30)** $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$, **(31)** $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x\,dx$,

(32) $\int \dfrac{dx}{1+e^x}$, **(33)** $\int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$, **(34)** $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$,

(35) $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\,dx$, **(36)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$,

(37) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$, **(38)** $\int \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}\,dx$,

(39) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$, **(40)** $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$,

(41) $\int x^2 e^{-2x}\,dx$, **(42)** $\int x\cos x\,dx$, **(43)** $\int x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$,

(44) $\int \arcsin x\,dx$, **(45)** $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\,dx$, **(46)** $\int x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\,dx$,

(47) $\int \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$, **(48)** $\int \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^2}$, **(49)** $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx$,

(50) $\int \sin\ln x\,dx$, **(51)** $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, **(52)** $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

7.9. Интегрирование рациональных функций, т. е. функций вида $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P, Q — полиномы, основано на возможности представления рациональной функции в виде суммы таких рациональных функций, интегрирование которых провести сравнительно просто.

Для краткости и простоты ограничимся рассмотрением функции вида

$$R(x)=\frac{P(x)}{(x-a)^m(x^2+px+q)^k},$$

где полином x^2+px+q не имеет вещественных корней и степень $P(x)$ меньше, чем степень $m+2k$ знаменателя. Утверждается, что существуют числа $a_1,\dots,a_m$, $b_1,\dots,b_k$, $c_1,\dots,c_k$, при которых верно равенство

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{(x-a)^m(x^2+px+q)^k} &= \frac{a_1}{x-a}+\frac{a_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{a_m}{(x-a)^m}\\ &+\frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q}+\frac{b_2x+c_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{b_kx+c_k}{(x^2+px+q)^k}. \quad (7.16)\end{aligned}$$

Рассматривая числа a_i, b_j, c_j как неопределенные коэффициенты, приведем к общему знаменателю сумму дробей в правой части (7.16), в результате в числителе получится некоторый полином степени не

выше чем $m + 2k - 1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях у полученного полинома и у полинома $P(x)$, придем к системе уравнений, решая которую, найдем требуемые коэффициенты.

Обратим внимание на то, что каждый множитель в знаменателе исходного дробного выражения порождает свою группу слагаемых.

На практике иногда вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной бывает проще подставить на место x какие-то конкретные значения переменной и получить требуемую систему уравнений. Обычно подставляют такие значения, которые обращают в нуль как можно больше сомножителей в числителе после приведения к общему знаменателю.

7.10. Примеры.

1. Найдем интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$. Запишем представление подынтегральной функции в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x+1)(x-1) + b(x-1) + c(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)},$$

откуда, приравнивая числители, получаем равенство

$$x^2 + 1 = a(x+1)(x-1) + b(x-1) + c(x+1)^2, \qquad (7.17)$$

на основе которого мы и составим систему для нахождения a, b, c. Можно было бы раскрыть скобки в правой части (7.17) и затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях. Однако в нашем случае проще поступить следующим образом. Подставим в (7.17) на место x значения $x = 1$, $x = -1$, при которых обращаются в нуль выражения $x - 1$ и $x + 1$, а также какое-либо значение, при котором правую часть нетрудно вычислить, например $x = 0$. Тогда получим соответственно равенства

$$2 = 4c, \quad 2 = -2b, \quad 1 = -a - b + c,$$

откуда $a = 1/2$, $b = -1$, $c = 1/2$. Таким образом,

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1}.$$

2. Найдем интеграл $\int \dfrac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$. Для этого представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)},$$

откуда $1 = a(x^2+1)+(bx+c)(x+1)$. Полагая здесь $x=-1$, сразу найдем, что $1=2a$, т. е. $a=1/2$. Раскроем теперь скобки и приведем подобные члены:

$$1 = ax^2 + a + bx^2 + cx + bx + c = (a+b)x^2 + (b+c)x + a + c,$$

откуда

$$a+b=0, \quad b+c=0, \quad a+c=1,$$

и учитывая, что $a=1/2$, получаем $b=-1/2$, $c=1/2$. Итак,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{1-x}{x^2+1}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

7.11. Задачи. Найти интегралы

(1) $\int \dfrac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, **(2)** $\int \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$,

(3) $\int \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$, **(4)** $\int \dfrac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$,

(5) $\int \dfrac{dx}{x^3+1}$, **(6)** $\int \dfrac{x\,dx}{x^3-1}$, **(7)** $\int \dfrac{dx}{x^4-1}$, **(8)** $\int \dfrac{dx}{x^4+1}$,

(9) $\int \dfrac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$, **(10)** $\int \dfrac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$,

(11) $\int \dfrac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$, **(12)** $\int \dfrac{(x^4+1)\,dx}{(x-1)(x^4-1)}$.

7.12. В тех случаях, когда в знаменателе рациональной функции стоит многочлен, разлагаемый на множители со степенями, бóльшими чем первая, может оказаться эффективнее применение метода Остроградского выделения рациональной части. Пусть для простоты рассматривается интеграл от дроби $\int \dfrac{P(x)}{(x+a)^k(x^2+px+q)^n}\,dx$, где $k \geq$

2, $n \geq 2$ и степень числителя меньше степени знаменателя. Тогда существуют полиномы $P_1(x)$, $P_2(x)$ степеней соответственно не выше $k+2n-4$ и 2 такие, что имеет место равенство

$$\int \frac{P(x)}{(x+a)^k(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{P_1(x)}{(x+a)^{k-1}(x^2+px+q)^{n-1}} + \int \frac{P_2(x)}{(x+a)(x^2+px+q)}\,dx. \quad (7.18)$$

Словами можно сказать, что если в знаменателе стоят какие-то множители, степени которых больше первой, то выделяют рациональную часть, в которой в знаменатель помещают те же множители, что и в исходной дроби, но с показателями, на единицу меньшими имевшихся, а в числителе ставят полином с неопределенными коэффициентами, степень которого на единицу меньше степени знаменателя. Под интегралом оставляют дробь, в знаменателе которой стоят множители из знаменателя исходной дроби в первой степени, а в числителе — полином с неопределенными коэффициентами, степень которого на единицу меньше степени знаменателя. Таким образом формируется равенство типа (7.18), где $P_1(x)$, $P_2(x)$ — полиномы берут с неопределенными коэффициентами. Затем это равенство дифференцируют, в результате получают равенство рациональных функций с общим знаменателем, записывают равенство между их числителями и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получают систему уравнений, из которой находят коэффициенты многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$. В завершение вычисляют интегралы от простейших дробей.

7.13. Задачи. Найти интегралы

(1) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$, **(2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$,

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$, **(4)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

7.14. При интегрировании функций, содержащих иррациональные выражения, стараются сделать подстановку или замену переменной так, чтобы в результате прийти к интегралу от рациональной функции. Отметим несколько наблюдений по поиску таких замен.

1. Если подынтегральная функция рационально зависит от x и от выражения $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, то можно сделать замену $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (конечно, если коэффициенты a, b, c, d таковы, что x однозначно выражается через t с выполнением условий теоремы 7.5), т. е. подстановку

$x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$. В результате получаем интеграл от рациональной функции, после нахождения которого возвращаемся к старой переменной x.

2. При интегрировании функций, рационально зависящих от x и от выражения $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, могут быть полезны *подстановки Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t, \quad \text{если } a > 0, \tag{7.19}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}, \quad \text{если } c > 0, \tag{7.20}$$

$$\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1), \tag{7.21}$$

приводящие к интегрированию рациональной функции от t.

3. При интегрировании функций вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где P, Q — полиномы, бывает полезно разложить дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей.

4. При интегрировании функции вида $x^m(a + bx^n)^p$, где m, n, p рациональны, следует сделать такие подстановки:

1) если p целое, то полагают $x = t^N$, где N — общий знаменатель дробей m, n;

2) если $\dfrac{m+1}{n}$ целое, то полагают $a + bx^n = t^N$, где N — знаменатель дроби p;

3) если $\dfrac{m+1}{n} + p$ целое, то полагают $ax^{-n} + b = t^N$, где N — знаменатель дроби p.

В других случаях интеграл от функции $x^m(a + bx^n)^p$ в элементарных функциях не выражается.

7.15. Примеры.

1. Найдем интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}},$$

рассматривая для простоты случай $a < b$ и $x > b$ (остальные получаются аналогично). Положим

$$t = \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}},\ a \neq b, \quad x = \frac{a - bt^n}{1 - t^n}, \quad dx = \frac{(a-b)nt^{n-1}}{(1-t^n)^2}\,dt,$$

$$x-b=\frac{a-b}{1-t^n},\quad x-a=t^n(x-b)=\frac{(a-b)t^n}{1-t^n}.$$

Тогда

$$I=\int\frac{(a-b)nt^{n-1}\,dt}{(1-t^n)^2\frac{(a-b)t^n}{1-t^n}\frac{a-b}{1-t^n}t}=\frac{n}{a-b}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{n}{(b-a)t}=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}.$$

2. Сведем следующий интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx.$$

Воспользуемся подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2+3x+2}=x+t$. Тогда $x^2+3x+2=x^2+2tx+t^2$, или

$$x(3-2t)=t^2-2,\quad x=\frac{t^2-2}{3-2t},\quad dx=-2\frac{t^2+3t-2}{(3-2t)^2}\,dt.$$

Подставив, получим

$$I=2\int\frac{t(t^2+3t-2)}{(3t-4)(3-2t)}\,dt.$$

7.16. Задачи. Найти интегралы

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$, **(2)** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$,

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$, **(4)** $\displaystyle\int\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,\frac{dx}{x^3}$, **(5)** $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$,

(6) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$, **(7)** $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$,

(8) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, **(9)** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$,

(10) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, **(11)** $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$, **(12)** $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

7.17. Интегралы вида $\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, где $R(u,v)$ — рациональная функция переменных u,v, приводятся к интегрированию рациональной функции заменой $\operatorname{tg}(x/2)=t$, т. е. подстановкой $x=2\operatorname{arctg}t$. При этом полезно помнить формулы (7.25) (см. ниже).

Если функция R обладает дополнительно некоторыми свойствами, то можно применить другие подстановки, которые, как правило, приводят к уменьшению объема вычислений. А именно, если

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x), \tag{7.22}$$

то можно положить $\cos x = t$, а если

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x), \tag{7.23}$$

то можно взять $\sin x = t$. В случае, если

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x), \tag{7.24}$$

полагают $\operatorname{tg} x = t$.

7.18. Пример. Найдем интеграл $I = \int \dfrac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$. Положим $\cos x = t$, тогда $x = \arccos t$, $dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Имеем

$$I = -\int \frac{dt}{(2+t)\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{(2+t)(t-1)(t+1)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}.$$

7.19. Задачи.

1. Найти интегралы

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ при $0<\varepsilon<1$ и при $\varepsilon>1$,

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$, **(3)** $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$, **(4)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$,

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$, **(6)** $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$,

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$, **(8)** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

2. Вывести формулы понижения для интегралов

(а) $I_n = \int \sin^n x\,dx$; (б) $K_n = \int \cos^n x\,dx$ $(n>2)$

и с их помощью вычислить $\int \sin^6 x\,dx$ и $\int \cos^8 x\,dx$.

3. Вывести формулы понижения для интегралов

$$\text{(а)}\quad I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x};\quad \text{(б)}\quad K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}\quad (n>2)$$

и с их помощью вычислить $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ и $\int \frac{dx}{\cos^7 x}$.

7.20. Задачи. Найти интегралы

(1) $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx$, **(2)** $\int xe^x \sin x\,dx$, **(3)** $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$,

(4) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$, **(5)** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^x}$, **(6)** $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+e^x)^2}$,

(7) $\int x\operatorname{arctg}(x+1)\,dx$, **(8)** $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}\,dx$, **(9)** $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\,dx$,

(10) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x\,dx$, **(11)** $\int \cos^5 x\,dx$, **(12)** $\int \cos^3 x \sin^5 x\,dx$,

(13) $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$, **(14)** $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$, **(15)** $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$,

(16) $\int \cos^2 ax \cos^2 bx\,dx$, **(17)** $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}}$,

(18) $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$, **(19)** $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, **(20)** $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

(21) $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$, **(22)** $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$, **(23)** $\int |x|\,dx$,

(24) $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, **(25)** $\int (x+|x|)^2\,dx$, **(26)** $\int e^{-|x|}\,dx$,

(27) $\int \max(1,x^2)\,dx$.

7.21. Приведем небольшой список формул, которые могут пригодиться при нахождении первообразных:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \tag{7.25}$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}\sin(x\pm y)&=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\\ \cos(x\pm y)&=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,\end{aligned}\tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\ \sin x-\sin y&=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\end{aligned}\tag{7.28}$$

$$\begin{aligned}\cos x+\cos y&=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\ \cos x-\cos y&=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\end{aligned}\tag{7.29}$$

$$\begin{aligned}\sin x\sin y&=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)),\\ \cos x\cos y&=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)),\end{aligned}\tag{7.30}$$

$$\begin{aligned}\sin x\cos y&=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)),\\ \cos x\sin y&=\frac{1}{2}(\sin(x+y)-\sin(x-y)),\end{aligned}\tag{7.31}$$

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},\tag{7.32}$$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\quad \operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,\quad \operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x,\tag{7.33}$$

$$y=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\tag{7.34}$$

$$y=\operatorname{arch}x=\ln(x-\sqrt{x^2-1}),\quad x\ge1,\ -\infty<y\le0,\tag{7.35}$$

$$y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad x\ge1,\ 0\le y<+\infty.\tag{7.36}$$

7.22. Ответы. К п. 7.8.

(1) $x-\operatorname{arctg}x$; (2) $(\cos x+\sin x)\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)$; (3) $x-\operatorname{th}x$; (4) $-x-\operatorname{ctg}x$; (5) $\frac{1}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt2+x\sqrt3}{\sqrt2-x\sqrt3}\right|$; (6) $\frac{1}{\sqrt3}\ln|x\sqrt3+\sqrt{3x^2-2}|/2$; (7) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; (8) $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; (9) $-\sqrt{1-x^2}$; (10) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; (11) $-\arcsin\frac{1}{|x|}$; (12) $2\operatorname{sgn}x\cdot\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})$; (13) $2\arcsin\sqrt{x}$; (14) $\frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}$; (15) $-\ln|\cos x|$; (16) $\ln|\sin x|$; (17) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; (18) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$; (19) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x)$; (20) $\frac{1}{2}(1-x)^2+\ln|1+x|$; (21) $\frac{1}{2(1-x^2)}$; (22) $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$; (23) $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$; (24) $\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$; (25) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x$; (26) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin2x$; (27) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x$; (28) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x$; (29) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x$; (30) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$; (31) $2\left(\frac{1}{11}\sin^4x-\right.$

$\frac{2}{7}\sin^2 x+\frac{1}{3}\big)\sqrt{\sin^3 x}$; (32) $x-\ln(1+e^x)$; (33) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|$; (34) $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$; (35) $-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$; (36) $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$; (37) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$; (38) $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$, если $x>a$; $-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$, если $x<-a$; (39) $2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, если $x+a>0$ и $x+b>0$; $-2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})$, если $x+a<0$ и $x+b<0$; (40) $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, если $x+a>0$ и $x+b>0$; (41) $-\frac{e^{-2x}}{2}\big(x^2+x+\frac{1}{2}\big)$; (42) $x\sin x+\cos x$; (43) $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$; (44) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; (45) $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\big|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\big|$; (46) $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$; (47) $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; (48) $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ $(a\neq 0)$; (49) $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$; (50) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$; (51) $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$; (52) $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

К п. 7.11. (1) $\frac{1}{2}\ln\big|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\big|$; (2) $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|$; (3) $\frac{1}{12}\ln\frac{(x+1)^4|x-2|^5}{(x-1)^4|x+2|^5}$; (4) $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)$; (5) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; (6) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; (7) $\frac{1}{4}\ln\big|\frac{x-1}{x+1}\big|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; (8) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\big|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\big|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$; (9) $\frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2}-\frac{3}{625}\ln\big|\frac{x-2}{x+3}\big|$; (10) $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\big|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\big|$; (11) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2(x+1)}$; (12) $\frac{1}{4}\ln|x^4-1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2(x-1)}$.

К п. 7.13. (1) $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\big|\frac{x+1}{x-1}\big|$; (2) $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x$; (3) $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)$; (4) $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

К п. 7.16. (1) $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$; (2) $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$; (3) $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$; (4) $\frac{5}{4}z^{4/5}-\frac{5}{9}z^{9/5}$, где $z=\frac{x+1}{x}$; (5) $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$, где $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$; (6) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\ln\big|\frac{3x+1+2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\big|$; (7) $\ln\big|\frac{z-1}{z}\big|-2\operatorname{arctg}z$, где $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; (8) $\ln\frac{x+1}{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}$; (9) $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, где $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$; (10) $\frac{1}{4}\ln\big|\frac{z+1}{z-1}\big|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z$, где $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$; (11) $\frac{6}{7}(1+x^{1/3})^{7/2}-\frac{18}{5}(1+x^{1/3})^{5/2}+6x^{1/3}(1+x^{1/3})^{1/2}$; (12) $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z$, где $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

К п. 7.19. 1. (1) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\big)$, если $0<\varepsilon<1$; $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}$, если $\varepsilon>1$; (2) $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)$; (3) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\big|\operatorname{tg}\big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\big)\big|$; (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\big(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\big)$; (5) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x)$;

(6) $-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}$ – $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\big(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\big)$; (7) $\operatorname{arctg}\big(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x\big)$; (8) $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2 x$. **2.** (а) $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; (б) $K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}k_{n-2}$; $I_6=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x-\frac{5}{24}\cos x\sin^3 x-\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x$; $K_8=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x$. **3.** (а) $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; (б) $\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$; $I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\big|$; $K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5}{24}\frac{\sin x}{\cos^4 x}+\frac{5}{16}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{5}{16}\ln\operatorname{tg}\big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\big)$.

К п. 7.20. (1) $2e^t(t^5-5t^4+20t^3-60t^2+120t-120)$, где $t=\sqrt{x}$; (2) $\frac{e^x}{2}(x(\sin x-\cos x)+\cos x)$; (3) $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})$; (4) $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$; (5) $e^x-\ln(1+e^x)$; (6) $\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$; (7) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)$; (8) $\ln\frac{x^2}{1+4x^2}-\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}$; (9) $\frac{a\operatorname{ch}ax\sin bx-b\operatorname{sh}ax\cos bx}{a^2+b^2}$; (10) $\frac{\operatorname{ch}^7 x}{7}-\frac{\operatorname{ch}^5 x}{5}$; (11) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$; (12) $\frac{1}{6}\sin^6 x-\frac{1}{8}\sin^8 x$; (13) $-x-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg}x$; (14) $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$; (15) $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}$; (16) $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+\frac{\sin 2bx}{8b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}$; (17) $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{|x-1|}$; (18) $\big(\frac{x^5}{6}-\frac{x^3}{6}-x\big)\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\big(\frac{x}{2}\big)$; (19) $\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}$; (20) $-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x$ ($|x|<1$); (21) $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x/2+1}{\sqrt{3}}$; (22) $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$; (23) $\frac{x|x|}{2}$; (24) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;
(25) $\frac{2x^2}{3}(x+|x|)$; (26) e^x-1, если $x<0$, $1-e^{-x}$, если $x\ge 0$; (27) x, если $|x|\le 1$, $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x$, если $|x|>1$.

§ 8. Определенный интеграл

8.1. Пусть f — ограниченная функция, заданная на отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Разбиением* отрезка $[a,b]$ называют такой набор точек $\tau=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}\in[a,b]$, что $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. Число $|\tau|=\max\limits_{i=1,\ldots,n}(x_i-x_{i-1})$ называют *модулем разбиения* τ. В каждом из промежутков $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, разбиения τ возьмем по точке $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. Сумму $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ называют *интегральной суммой (Римана), соответствующей разбиению τ промежутка* $[a,b]$. Число I такое, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое,

что для любого разбиения τ, у которого $|\tau| < \delta$, и для любого выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon, \tag{8.1}$$

называют *определенным интегралом от функции f по промежутку* $[a, b]$ и обозначают символом $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Левый конец a промежутка интегрирования называют *нижним пределом интегрирования*, правый конец b промежутка интегрирования называют *верхним пределом интегрирования* и говорят, что *берется* (*рассматривается*) *интеграл от функции f в пределах от a до b.* Функцию, у которой существует интеграл, называют *интегрируемой на* $[a, b]$. Отметим, что непрерывные функции и монотонные функции на $[a, b]$ интегрируемы на этом промежутке.

Допуская небольшую вольность речи, можно сказать, что определенный интеграл от функции f по промежутку $[a, b]$ — это предел, к которому стремятся интегральные суммы при стремлении к нулю модуля разбиения.

Определение интеграла распространяют на тот случай, когда $a > b$, полагая

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx, \quad b < a. \tag{8.2}$$

8.2. Теорема (линейность интеграла). *Если f, g интегрируемы от a до b, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема от a до b и*

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

8.3. Теорема (формула интегрирования по частям). *Пусть функции f, g дифференцируемы на отрезке с концами a, b. Тогда если функция $f'(x)g(x)$ интегрируема от a до b, то этим свойством обладает и функция $f(x)g'(x)$ и имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx, \tag{8.3}$$

или, в иной форме записи,

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\,df(x). \tag{8.4}$$

8.4. Теорема (о подстановке и замене переменной). *Пусть f — интегрируемая от a до b функция и φ — дифференцируемая функция, отображающая отрезок с концами α, β на отрезок с концами a, b, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема от a до b и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{8.5}$$

Если при этом φ имеет дифференцируемую обратную, то из интегрируемости $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ от α до β следуют интегрируемость $f(x)$ от a до b. и справедливость (5.3).

Замечание. Иногда, пользуясь подстановкой или заменой переменной при нахождении интеграла от a до b, мы будем использовать такие функции $\varphi(t)$, которые отображают бесконечный промежуток, например $[\alpha, +\infty)$, на заданный ограниченный, но не замкнутый промежуток $[a, b)$. В таком случае полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to b}\int_a^y f(x)\,dx$$

и при замене следует воспользоваться формулой

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{8.5a}$$

Более подробно с интегралами по промежуткам, у которых по крайней мере один из концов не входит в промежуток (в частности, по неограниченным промежуткам), мы познакомимся позже.

8.5. Теорема (аддитивность интеграла). *Пусть точка c лежит между точками a и b. Тогда f интегрируема от a до b в том и только в том случае, если она интегрируема от a до c и от c до b, при этом*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{8.6}$$

Принимая во внимание равенство (8.2), распространяющее определение на случай, когда нижний предел интегрирования больше верхнего, можно заметить, что равенство (8.6) верно для любых трех точек a, b, c.

8.6. Теорема (формула Ньютона — Лейбница). *Пусть функция f непрерывна на отрезке с концами a, b, и пусть F — ее первообразная на этом промежутке (которая заведомо существует для непрерывной функции). Тогда имеет место формула Ньютона — Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{8.7}$$

которая с использованием для приращения $F(b) - F(a)$ обозначения $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ может быть записана в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{8.8}$$

8.7. Задачи. При нахождении определенного интеграла, как правило, используется формула Ньютона — Лейбница. Однако для лучшего понимания структуры интегральных сумм сначала решим несколько примеров, в которых участвуют интегральные суммы.

Выбирая подходящим образом разбиения и используя определение интеграла, найти пределы

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$,

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$,

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, $\quad p>0$.

8.8. Пример. В интеграле $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ выполним замену $\sin x = t$.

При выполнении указанной замены мы должны совершить такие действия, чтобы сохранилось равенство $\sin x = t$ на отрезке $[0, 2\pi]$ изменения переменной x. Выразить однозначно x через t, когда $x \in [0, 2\pi]$, невозможно, поэтому разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на такие части, где синус будет обратимым (строго монотонным), воспользуемся аддитивностью интеграла и выполним замену в интегралах по каждому из участков монотонности синуса. Ясно, что в качестве точек, разбивающих $[0, 2\pi]$ на участки монотонности синуса, можно выбрать $\pi/2$ и $3\pi/2$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\cos x\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx.$$

Рассмотрим каждый интеграл по отдельности. На $[0, \pi/2]$ равенство $\sin x = t$ равносильно такому: $x = \arcsin t$, $0 \le t \le 1$. Если x меняется от $\pi/2$ до $3\pi/2$, то равенство $\sin x = t$ равносильно равенству $x = \pi - \arcsin t$, где t меняется от 1 до -1. Наконец, если $x \in [3\pi/2, 2\pi]$, то равенство $\sin x = t$ равносильно такому: $x = 2\pi + \arcsin t$, где t меняется от -1 до 0. Учитывая, что $\cos x\,dx = d\sin x$, получим

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{1} f(\arcsin t)\,dt + \int_1^{-1} f(\pi - \arcsin t)\,dt + \int_{-1}^{0} f(2\pi + \arcsin t)\,dt.$$

8.9. Задачи.

1. Найти интегралы

(1) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$, **(2)** $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **(3)** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $0 \le \varepsilon < 1$,

(4) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$, $0 < \alpha < \pi$, **(5)** $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$,

(6) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$, $ab \ne 0$, **(7)** $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$,

(8) $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$, **(9)** $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$, **(10)** $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$,

(11) $\int\limits_0^{3/4} \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$, **(12)** $\int\limits_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ **(13)** $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{x\,dx}{x^2+x+1}$,

(14) $\int\limits_{-2}^{-1} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, **(15)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$,

(16) $\int\limits_0^{\pi} (x\sin x)^2\,dx$, **(17)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, **(18)** $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$, полагая $x-1/x=t$.

3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{1/2}^2 \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+1/x}\,dx,$$

введя новую переменную $t=x+1/x$.

4. Доказать, что если функция f интегрируема от 0 до 1, то

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx,$$

$$\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

5. Доказать, что для интегрируемой на $[-l,l]$ функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^{l} f(x)\,dx,$$

если f четная, и

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0,$$

если f нечетная.

6. Доказать, что если f — непрерывная периодическая на $\mathbb{R}$ функция с периодом T, то

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

при любом $a \in \mathbb{R}$.

7. С помощью рекуррентных формул вычислить интегралы

(1) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, **(2)** $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$, **(3)** $K_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$.

8.10. Пусть функция f непрерывна на $[a,b] \subset \mathbb{R}$, и пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — дифференцируемые функции такие, что $\varphi(x), \psi(x) \in [a,b]$. Тогда согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x)), \tag{8.9}$$

где F — первообразная функции f на $[a,b]$. Дифференцируя (8.9) по x, получим *формулу дифференцирования определенного интеграла как функции от пределов интегрирования*:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x), \tag{8.10}$$

где символ $\dfrac{d}{dx}$ указывает на операцию дифференцирования по переменной x.

8.11. Задачи.

1. Найти

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,dx$, **(2)** $\dfrac{d}{da}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,dx$, **(3)** $\dfrac{d}{db}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,dx$.

2. Найти

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$, **(2)** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt$.

3. Найти

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$, **(2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$,

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$.

4. Доказать, что $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ при $x \to +\infty$.

5. Пусть $f(x)$ — непрерывная положительная функция. Доказать, что функция

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

возрастает при $x > 0$.

8.12. Теорема (монотонность интеграла). *Если $a \le b$ и f, g — интегрируемые на $[a,b]$ функции такие, что $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{8.11}$$

8.13. Теорема (1-я теорема о среднем). *Пусть f — непрерывная, а g — интегрируемая на $[a,b]$ функции, причем g знакопостоянная на*

$[a, b]$. *Тогда найдется такая точка* $\xi \in [a, b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{8.12}$$

Теорема (2-я теорема о среднем). *Пусть* f — *монотонная, а* g — *интегрируемая на* $[a, b]$ *функции. Тогда существует такая точка* $\xi \in [a, b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx. \tag{8.13}$$

Если, кроме того, f *убывает и неотрицательна, то*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx, \tag{8.14}$$

а если f *возрастает и неположительна, то*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx \tag{8.15}$$

для некоторого $\xi \in [a, b]$.

8.14. Задачи.

1. Определить знаки следующих интегралов:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$, **(2)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

2. Какой из интегралов больше:

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$ или $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$?

(2) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ или $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$?

3. Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интегралы

(1) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+0.5\cos x}$, **(2)** $\int\limits_0^1 \dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$, **(3)** $\int\limits_0^1 e^{-x^n}\,dx$, $n >$ 1.

4. Доказать равенства

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\,dx = 0$, **(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = 0$.

5. Найти пределы

(1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\varepsilon x^3+1}$, **(2)** $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\dfrac{dx}{x}$,

где $a>0$, $b>0$ и f непрерывна на $[0,1]$.

6. Пользуясь второй теоремой о среднем, оценить интегралы

(1) $\int\limits_a^b \dfrac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx$, $\alpha \ge 0$, $0<a<b$,

(2) $\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$, $0<a<b$.

8.15. Остановимся на двух геометрических приложениях определенного интеграла — нахождении площадей плоских фигур и длин плоских или пространственных кривых.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две функции, определенные на $[a,b]$, такие, что $f(x)\le g(x)$, $x\in[a,b]$. Тогда площадь S криволинейной трапеции, ограниченной слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, а снизу и сверху — графиками функций $f(x)$, $g(x)$ соответственно, равна

$$S = \int\limits_a^b (g(x)-f(x))\,dx. \tag{8.16}$$

Рассмотрим две функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, заданные на промежутке $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ и такие, что в каждой точке этого промежутка их производные не обращаются в нуль одновременно. Определяемое этими функциями отображение $\Phi(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ отрезка $[\alpha,\beta]$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ называют *гладким* (*параметризованным*) *путем на*

плоскости $\mathbb{R}^2$. Если отображение $\Phi(t)$ взаимно однозначно на интервале (α, β), будем говорить о нем как о (*простой параметризованной*) *гладкой кривой* на плоскости. Образ $\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ при отображении Φ называют *носителем* пути (кривой).

Длина l определяемого функциями φ, ψ гладкого пути может быть найдена по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \tag{8.17}$$

Если добавить к двум функциям φ, ψ еще одну, т. е. рассмотреть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \eta(t)$ с сохранением налагаемых условий, то полученное отображение $\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t), \eta(t))$ называют путем (кривой) *в пространстве* $\mathbb{R}^3$, длина в этом случае находится по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \tag{8.18}$$

Если кривая на плоскости задается как график явно заданной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то ее длина может быть найдена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{8.19}$$

8.16. Задачи.

1. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах:

(1) $ax = y^2$, $ay = x^2$, $a > 0$, **(2)** $y = \sin^2 x$, $y = x \sin x$, $0 \le x \le \pi$,

(3) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$,

(4) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

2. Найти длины кривых:

(1) $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$, $y \ge 0$,

(2) $x = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$, $0 \le t \le \pi/2$,

(3) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le t_0$,

(4) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $0 \le t \le t_0$.

8.17. Положение точки (x, y) на координатной плоскости может быть полностью определено не только ее декартовыми координатами,

т. е. значениями x и y, но и другими числовыми характеристиками. В качестве таких характеристик можно взять, например, угол φ, на который надо сместиться относительно положительного направления оси абсцисс, чтобы попасть в данную точку, и расстояние r от начала координат до данной точки. В таком случае декартовы координаты можно выразить через r, φ так:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Величины r, φ в указанном контексте называют *полярными координатами* точки (x, y).

Если задана зависимость $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — дифференцируемая функция аргумента φ, то этим задается некоторая кривая в полярных координатах на декартовой плоскости, и можно либо находить площади фигур, в формировании которых участвует данная кривая, либо искать ее длину. Укажем формулы для обоих указанных возможностей. Площадь S фигуры, ограниченной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi, \tag{8.20}$$

а длина l пути $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, — по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \tag{8.21}$$

8.18. Задачи.

1. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

(1) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, **(2)** $r = a(1+\cos\varphi)$, **(3)** $r = a\sin 3\varphi$.

2. Найти длины кривых, заданных в полярных координатах:

(1) $r = a\sin\varphi$, **(2)** $r = a(1-\cos\varphi)$,

(3) $r = a(1-\sin\varphi)$, $-\pi/2 \le \varphi \le -\pi/6$, **(4)** $r = a\varphi^2$, $0 \le \varphi \le 4$.

8.19. Ответы. К п. 8.7. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{\pi}{4}$; (3) $\frac{2}{\pi}$; (4) $\frac{1}{p+1}$;

К п. 8.9. 1. (1) 2; (2) $\frac{\pi}{3}$; (3) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$; (4) $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$; (5) π; (6) $\frac{\pi}{2|ab|}$; (7) 4π; (8) 1; (9) $\frac{1}{6}$; (10) $\frac{\pi a^4}{16}$; (11) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$; (12) $\frac{\pi^2}{4}$; (13) $\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$;

(14) $-\frac{\pi}{3}$; (15) $2\pi\big(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\big)$; (16) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$; (17) $2\pi\sqrt{2}$; (18) $\frac{3}{5}(e^\pi-1)$. **2.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **3.** $\frac{3}{2}e^{5/2}$. **7.** (1) $I_n=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, если $n=2k$; $I_n=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, если $n=2k+1$; (2) $J_n=I_n$, см. (1); (3) $(-1)^n\big(\frac{\pi}{4}-\big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\big)\big)$.

К п. 8.11. 1. (1) 0; (2) $-\sin a^2$; (3) $\sin b^2$. **2.** (1) $2x\sqrt{1+x^4}$; (2) $(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$. **3.** (1) 1; (2) $\frac{\pi^2}{4}$; (3) 0.

К п. 8.14. 1. (1) $-$; (2) $+$. **2.** (1) Второй; (2) первый. **3.** (1) $\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta$ $(0<\theta<1)$; (2) между $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{10}$; (3) между $1-\frac{1}{n+1}$ и 1. **5.** (1) 1; (2) $f(0)\ln\frac{b}{a}$. **6.** (1) $\frac{2}{a}\theta$ $(|\theta|<1)$; (2) $\frac{\theta}{a}$ $(|\theta|<1)$.

К п. 8.16. 1. (1) $\frac{a^2}{3}$; (2) $\frac{\pi}{2}$; (3) $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$; (4) $\sqrt{2}-1$. **2.** (1) $48a$; (2) $\frac{1}{4}(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))$; (3) $\sqrt{a^2+b^2}t_0$; (4) $2\operatorname{sh} t_0$.

К п. 8.18. 1. (1) a^2; (2) $\frac{3\pi a^2}{2}$; (3) $\frac{\pi a^2}{4}$. **2.** (1) πa; (2) $8a$; (3) $2a$; (4) $\frac{8}{3}a(5\sqrt{5}-1)$.

§ 9. Несобственный интеграл

9.1. Говоря в предыдущем параграфе об определенном интеграле, мы рассматривали ограниченные функции, заданные на ограниченных замкнутых промежутках числовой прямой (если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то интегральные суммы не могут иметь предела в указанном в начале § 8 смысле). Однако при выполнении замены переменной нам доводилось сталкиваться с необходимостью интегрировать в ситуациях, выходящих за рамки указанных ограничений (см. об этом замечание в п. 8.4). Здесь мы рассмотрим подход к интегрированию в случае, когда эти ограничения отсутствуют.

Рассмотрим функцию f, заданную на множестве $X\subset\mathbb{R}$, и пусть ω — предельная точка множества X. Будем говорить, что ω является *особой точкой для функции* f, если либо ω бесконечна, либо f неограниченна в любой окрестности этой точки.

Пусть X — это промежуток такой, у которого правый конец служит особой точкой функции f, т. е. $X=[a,\omega)$, $a\in\mathbb{R}$. Предположим, что для любого $b\in(a,\omega)$ функция f интегрируема на промежутке $[a,b]$. В этой ситуации будем говорить, что рассматривается *несобственный интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ от функции f. Если существует конеч-

ный предел $\lim\limits_{b\to\omega}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то говорят, что *несобственный интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится*, и при этом полагают

$$\int_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{9.1}$$

Если, в частности, f имеет первообразную F, то равенство (9.1) можно записать так:

$$\int_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega} F(b) - F(a) \tag{9.2}$$

Если несобственный интеграл не сходится, то говорят, что он *расходится*.

Аналогично можно определить сходимость интеграла по промежутку $(\omega, b]$, в котором особой точкой является левый конец.

Если функция имеет несколько особых точек, то надо всю область интегрирования разбить на промежутки так, чтобы на каждом из них данная функция имела одну особую точку. Интеграл по всему множеству в таком случае понимается как сумма интегралов по отдельным промежуткам. Мы в дальнейшем все теоретические вопросы будем относить к ситуации одной особой точки, обычно в правом конце промежутка.

Основной задачей при изучении несобственных интегралов будет установление их сходимости или расходимости. Поскольку сходимость несобственного интеграла — это существование конечного предела функции $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \to \omega$, для выяснения сходимости можно использовать результаты, относящиеся к пределу функции. Однако нередко трудно, а иногда в классе элементарных функций невозможно найти функцию $F(b)$. Поэтому задачу исследования сходимости несобственного интеграла можно сформулировать так: *как, используя свойства подынтегральной функции, установить, будет данный несобственный интеграл сходиться или нет*? Поскольку нам надо будет делать заключения о сходимости несобственного интеграла,

т. е. по существу о наличии предела первообразной, основываясь на свойствах совсем другого объекта — подынтегральной функции, мы сформулируем и будем использовать утверждения, называемые признаками сходимости и носящие достаточный характер — проверив выполнение их условий, мы получаем сходимость или расходимость данного интеграла (но вместе с тем сходимость не будет гарантировать выполнение условий того или иного признака).

9.2. Сначала сформулируем относящееся к общей теории предела необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла, правда, использующее не подынтегральную функцию, а интеграл от нее.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. *Для сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists b \in (a,\omega))(\forall b_1 \in [b,\omega))(\forall b_2 \in [b,\omega)) \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \le \varepsilon. \quad (9.3)$$

Отметим, что использование критерия Коши для установления сходимости затруднительно и как правило не применяется. Вместе с тем его нередко используют для доказательства расходимости путем проверки отрицания соотношения (9.3).

9.3. Первая группа признаков будет относиться к тому случаю, когда функция f сохраняет знак в некоторой окрестности точки ω. Для определенности будем считать, что $f(x) \ge 0$ для x, близких к ω.

Признак сравнения. *Пусть функции* f, h *таковы, что* $0 \le h(x) \le f(x)$ *для* x *из некоторой окрестности точки* ω. *Тогда если интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^\omega h(x)\,dx$ *также сходится, а если интеграл* $\int\limits_a^\omega h(x)\,dx$ *расходится, то интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *тоже расходится.*

В случае, если существуют такие ненулевые положительные постоянные C_1, C_2, *что* $C_1 f(x) \le h(x) \le C_2 f(x)$ *для* x, *близких к* ω,

сходимость интегралов $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^\omega h(x)\,dx$ *одновременна, т. е. сходимость одного из них равносильна сходимости другого.*

В частности, если существует ненулевой конечный предел $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f(x)}{h(x)}$, *то и в этом случае сходимость рассматриваемых интегралов одновременна.*

Использование признаков сравнения эффективно, если имеется набор функций, для которых известна сходимость или расходимость несобственных интегралов от них в данной особой точке. Наиболее широко используемым при сравнении является набор функций вида x^α, если $\omega = +\infty$, и функций вида $(\omega - x)^\alpha$, если $\omega \in \mathbb{R}$. А именно, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^\alpha\,dx$, где $a > 0$, сходится при $\alpha < -1$ и расходится при $\alpha \geq -1$. Для конечной особой точки утверждение таково: интеграл $\int\limits_a^\omega (\omega - x)^\alpha\,dx$, $a < \omega < +\infty$, сходится при $\alpha > -1$ и расходится при $\alpha \leq -1$. Те же факты немного в другой форме можно выразить так: интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$, $0 < a < +\infty$, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$, а интеграл $\int\limits_a^\omega \dfrac{dx}{(\omega - x)^p}$, $a < \omega < +\infty$, сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

9.4. Примеры.

1. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$. Здесь две особые точки: 0 и $+\infty$. Изучим сходимость интеграла отдельно в каждой из них, т. е. сходимость интегралов $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$ и $\int\limits_0^a \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$, где a — некоторое строго положительное число. Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2,$$

имеем

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^\alpha}$$

при $x \to +\infty$ и сходимость на бесконечности интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, которая имеет место при $\alpha > 1$. Далее, $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$, поэтому

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

при $x \to 0$, и сходимость в нуле интеграла $\int\limits_0^a \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$, а последний сходится при $\alpha - 1 < 1$, т. е. при $\alpha < 2$. Итак, исходный интеграл сходится при $1 < \alpha < 2$.

2. Изучим сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Здесь также две особые точки: 1 и $+\infty$. Фиксируем произвольно $a > 1$. Сначала рассмотрим интеграл $\int\limits_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 1} x^p = 1$, а $\ln x \sim x - 1$ при $x \to 1$, то

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x-1)^q}$$

при $x \to 1$, значит, сходимость интеграла $\int\limits_1^a \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_1^a \frac{dx}{(x-1)^q}$, а он сходится при $q < 1$.

Обратимся к интегралу $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. Соображения при исследовании его сходимости таковы. Поскольку на бесконечности логарифм растет медленнее степенной функции, то основную роль в сходимости будет играть поведение функции $1/x^p$, так что ожидается сходимость

при $p > 1$ независимо от q. Если же $p = 1$, то сходимость будет определяться значением q, а при $p < 1$ скорее всего будет расходимость снова при любом q.

Проведем подробное обоснование. Пусть $p > 1$. Возьмем какое-либо $\alpha \in (1, p)$ и покажем, что при достаточно далеких x выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^\alpha}.$$

Действительно, последнее неравенство равносильно такому:

$$\frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} < 1,$$

в котором $p - \alpha > 0$. Но, как известно,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\gamma} = 0 \tag{9.4}$$

при любом β и любом $\gamma > 0$. В частности,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} = 0,$$

поэтому найдется такое $\Delta > 0$, что

$$\frac{\ln^{-q} x}{x^{p-\alpha}} < 1$$

для всех $x > \Delta$. Итак, мы получили при далеких x оценку

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 1$. Поскольку интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, то и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ сходится (при любом q).

Пусть $p = 1$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \int_a^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^q x} = \int_{\ln a}^{+\infty} \frac{dy}{y^q},$$

так что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln^q x}$ сходится при $q > 1$ и расходится при $q \le 1$.

Пусть теперь $p < 1$. Возьмем какое-либо $\beta \in (p, 1)$ и докажем, что при далеких x будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^\beta} < \frac{1}{x^p \ln^q x}$$

Действительно, последнее неравенство равносильно такому: $\dfrac{\ln^{-q} x}{x^{\beta-p}} < 1$, которое выполняется для далеких x при $\beta - p > 0$, или $\beta > p$ (см. (9.4)). Следовательно, если $p < 1$, то, взяв β так, что $p < \beta < 1$, можно ограничить снизу подынтегральную функцию $\dfrac{1}{x^p \ln^q x}$ функцией $\dfrac{1}{x^\beta}$, интеграл от которой на бесконечности расходится, тем самым и интеграл от исходной функции также расходится.

Соберем воедино полученные результаты. Исследуемый интеграл сходится в особой точке 1 при $q < 1$ и любом p, а на бесконечности сходится при $p > 1$ и любом q, а также при $p = 1$ и $q > 1$, и расходится при $p < 1$ и любом q. Окончательно, весь интеграл сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \le 1$.

9.5. Задачи. Исследовать сходимость интегралов:

(1) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$, **(2)** $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\ln x}$, **(3)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$, **(4)** $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{\ln(1+x)}$,

(5) $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$, **(6)** $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \dfrac{1}{x}\, dx$, **(7)** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^m}{1+x^n}\, dx,\ n \ge 0$,

(8) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^n}\, dx$, **(9)** $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$, **(10)** $\int\limits_0^1 \dfrac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$,

(11) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p + x^q}$, **(12)** $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln x}{1-x^2}\, dx$,

(13) $\int\limits_0^{+\infty} (e^{-1/x^2} - e^{-4/x^2})\, dx$, **(14)** $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x\, dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

9.6. Теперь снимем предположение о том, что подынтегральная функция f сохраняет знак вблизи особой точки ω. В этом случае для изучения сходимости несобственного интеграла используют (достаточные) признаки Абеля и Дирихле, которые позволяют судить о сходимости в особой точке интеграла от произведения двух функций.

Теорема (признак Дирихле). *Пусть функция $\varphi(x)$ монотонна вблизи точки ω и $\lim\limits_{x\to\omega}\varphi(x)=0$, а функция $g(x)$ имеет ограниченную первообразную на $[a,\omega)$, т. е. интегралы $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ ограничены при $b\in[a,\omega)$. Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega \varphi(x)g(x)\,dx$ сходится (в точке ω).*

Теорема (признак Абеля). *Пусть функция $\varphi(x)$ монотонна и ограничена на $[a,\omega)$, а интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ сходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega \varphi(x)g(x)\,dx$ сходится (в точке ω).*

Применение одного из сформулированных признаков начинается с представления подынтегральной функции в виде произведения двух функций, причем такого, что одна из функций монотонна (вблизи особой точки), после чего о монотонной части надо установить либо сходимость ее к нулю и пойти на дальнейшую проверку условий признака Дирихле, либо ограниченность и тогда нацелиться на признак Абеля.

Важно учитывать, что признаки Дирихле и Абеля, хоть и не предусматривают ограничений на знак функции вблизи особой точки, обычно недостаточно эффективны при исследовании интегралов от положительных функций. Для знакопеременных функций наиболее эффективно применение признаков к таким произведениям $\varphi(x)g(x)$ (на промежутке $[a,+\infty)$), где функция g имеет «ощутимые» промежутки сохранения знака. Если же длины таких промежутков стремятся к нулю, полезно заменой переменной интегрирования прийти к указанной ситуации.

Наконец, обратим внимание на то, что признаки Дирихле и Абеля дают только достаточные условия сходимости (в то время как некото-

рые варианты признака сравнения гарантируют равносильность сходимости интегралов).

9.7. Говорят, что несобственный интеграл от функции f сходится в особой точке ω *абсолютно*, если сходится интеграл от ее модуля, т. е. интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$. Если интеграл сходится абсолютно, то он и просто сходится, обратное неверно. Если интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно*.

9.8. Пример. Исследуем абсолютную и условную сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} x^p \sin x^q\,dx$, рассматривая $p \in \mathbb{R}$, $q > 0$. Иными словами, ответим на вопрос: при каких значениях p, q он сходится абсолютно, а при каких условно.

Начнем со сходимости самого интеграла, абсолютную сходимость изучим позже. Поскольку нет знакоопределенности подынтегральной функции, будем ориентироваться на признаки Абеля и Дирихле. Монотонная составляющая в подынтегральной функции очевидна — это функция x^p. Присмотревшись к множителю $\sin x^q$, можем заметить, что в случае $q \neq 1$ длины участков знакопостоянства этой функции при удалении x изменяются, и чтобы исключить негативное влияние этого эффекта, сделаем замену $x^q = y$, т. е. совершим подстановку $x = y^{1/q}$. Тогда сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} y^{(p+1)/q-1} \sin y\,dy$. Обозначим $(p+1)/q - 1 = \alpha$ и изучим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} y^\alpha \sin y\,dy$. Функция y^α монотонна, а $\sin y$ имеет ограниченную первообразную $-\cos y$, так что последний интеграл сходится, если $\lim\limits_{y\to+\infty} y^\alpha = 0$, что будет при $\alpha < 0$. Итак, при $\dfrac{p+1}{q} - 1 < 0$, т. е. при $p + 1 < q$, интеграл сходится.

Поскольку примененный здесь признак Дирихле не гарантирует расходимость при значениях $\alpha \geq 0$, требуется отдельно показать, что при таких α интеграл расходится. Для этого воспользуемся критерием Коши, согласно которому расходимость нашего интеграла на

бесконечности равносильна тому, что

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall b\in[1,+\infty))(\exists b_1\in[b,+\infty))(\exists b_2\in[b,+\infty))\quad\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}y^\alpha\sin y\,dy\right|>\varepsilon.$$

Значит, надо суметь при любой удаленности находить такие промежутки $[b_1,b_2]$, интеграл на которых ощутимо большой. Ясно, что такими участками могут оказаться промежутки, на которых синус положителен, т. е. в качестве b_1,b_2 будем брать точки вида $2n\pi$, $(2n+1)\pi$. Тогда ввиду положительности α получим

$$\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}y^\alpha\sin y\,dy\geq\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin y\,dy=2,$$

и в качестве требуемого $\varepsilon>0$ можно взять любое меньшее двух число, например, $\varepsilon=1$. Таким образом, взяв любое $b>1$, подберем n так, чтобы $2n\pi>b$, и, взяв $b_1=2n\pi$, $b_2=(2n+1)\pi$, получим, что $\int\limits_{b_1}^{b_2}y^\alpha\sin y\,dy>1$, следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}y^\alpha\sin y\,dy$ при $\alpha\geq0$ расходится. Итак, исходный интеграл сходится при $p+1<q$, при остальных значениях p,q он расходится.

Исследуем абсолютную сходимость, т. е. изучим сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}y^\alpha|\sin y|\,dy$. Поскольку $y^\alpha\geq y^\alpha|\sin y|$, наш интеграл сойдется при $\alpha<-1$, т. е. исходный интеграл сойдется абсолютно при $\dfrac{p+1}{q}-1<-1$, или $\dfrac{p+1}{q}<0$. Пусть теперь $-1\leq\alpha<0$ (при $\alpha\geq0$, как установлено выше, интеграл расходится, тем более он абсолютно расходится). Ориентируясь на применение признака сравнения, желательно было бы ограничить снизу функцию $y^\alpha|\sin y|$ функцией вида y^α. Однако этого сделать не удастся (нули синуса мешают), значит, придется для доказательства расходимости придумывать что-то отличное от непосредственного использования признака сравнения. Заметим, что имеет место очевидное неравенство $|\sin y|\geq\sin^2 y$. Воспользовавшись им, получим оценку снизу:

$$y^\alpha|\sin y|\geq y^\alpha\sin^2 y=y^\alpha\frac{1-\cos2y}{2}=\frac{1}{2}(y^\alpha-y^\alpha\cos2y),\qquad(9.6)$$

и займемся изучением сходимости интегралов от каждой из функции в правой части (9.6). При рассматриваемых $\alpha \in [-1, 0)$ интеграл

$$\int_1^{+\infty} y^\alpha \, dy$$

расходится, а интеграл

$$\int_1^{+\infty} y^\alpha \cos 2y \, dy$$

сходится согласно признаку Дирихле. В итоге интеграл

$$\int_1^{+\infty} (y^\alpha - y^\alpha \cos 2y) \, dy$$

расходится как разность расходящегося и сходящегося интегралов. Тем самым расходится и интеграл $\int_1^{+\infty} y^\alpha |\sin y| \, dy$ ввиду оценки (9.6) и признака сравнения.

Подведем итог всем нашим исследованиям: интеграл $\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q \, dx$ сходится абсолютно при $\dfrac{p+1}{q} < 0$, условно при $0 \le \dfrac{p+1}{q} \le 1$ и расходится при $\dfrac{p+1}{q} > 1$.

9.9. В тех случаях, когда недостаточно ясно, как представить подынтегральную функцию в виде произведения двух функций, из которых одна монотонна, можно попробовать провести исследование сходимости на основе выделения главной части подынтегральной функции. При этом можно воспользоваться следующим утверждением. *Если подынтегральная функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + R(x)$, где интеграл от $R(x)$ абсолютно сходится, то интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ одновременно либо абсолютно сходятся, либо условно сходятся, либо расходятся.*

9.10. Пример. Исследуем абсолютную и условную сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} \, dx.$$

Преобразуем подынтегральную функцию, воспользовавшись разложением по формуле Тейлора функции $\dfrac{1}{1-t}$ по степеням t до такого порядка, чтобы получить достаточно быстро сходящуюся к нулю составляющую (здесь в качестве t будет выступать величина $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$):

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

За счет достаточно быстрой сходимости к нулю функция $O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ абсолютно интегрируема на бесконечности (по признаку сравнения), так что сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x}\right) dx.$$

Этот интеграл расходится, поскольку интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$$

сходится по признаку Дирихле, а интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

расходится (см. пример 9.8). В итоге мы получили расходимость исходного интеграла.

9.11. Задачи. Исследовать абсолютную и условную сходимости следующих интегралов:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, **(2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+10}\, dx$, **(3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx$,

(4) $\int\limits_0^{+\infty} x\cos x^4\,dx$, **(5)** $\int\limits_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)\,dx$, **(6)** $\int\limits_0^{+\infty} \sin^3(x^2+2x)\,dx$,

(7) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^p\sin x}{1+x^q}\,dx$, $q\geq 0$, **(8)** $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\cos\sqrt{x}}{x^\alpha\ln x}\,dx$,

(9) $\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$, **(10)** $\int\limits_1^{+\infty} (1-e^{(\sin x)/x})\sqrt{x}\,dx$,

(11) $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, **(12)** $\int\limits_2^{+\infty} \sqrt{x}\ln\left(1-\dfrac{\sin x^2}{x-1}\right)dx$.

9.12. Ответы. К п. 9.5. (1) Сходится; (2) расходится; (3) сходится; (4) расходится; (5) сходится при $p>0$; (6) сходится, если $p>-1$ и $q>-1$; (7) сходится, если $m>-1$, $n-m>1$; (8) сходится при $1<n<2$; (9) сходится, если $p<1$, $q<1$; (10) сходится при $n>-1$; (11) сходится, если $\min(p,q)<1$, $\max(p,q)>1$; (12) сходится; (13) сходится; (14) сходится.

К п. 9.11. (1) Сходится условно; (2) сходится условно; (3) сходится условно; (4) сходится условно; (5) сходится условно; (6) сходится условно; (7) сходится абсолютно, если $p>-2$, $q>p+1$; сходится условно, если $p>-2$, $p<q\leq p+1$; (8) сходится абсолютно при $\alpha>1$; условно при $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq 1$; (9) сходится условно; (10) сходится условно; (11) сходится условно; (12) сходится условно.

§ 10. Числовые ряды

10.1. Пусть дана числовая последовательность x_n. Если эту последовательность рассматривают с точки зрения нахождения «суммы» всех ее членов, то говорят, что рассматривают *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, а члены последовательности x_n называют при этом *общим членом* данного ряда.

Суммы $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ называют *частичными суммами ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм, его называют *суммой данного ряда* и обозначают, как

и ряд, символом $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. О самом ряде говорят при этом, что он *сходится*. Если ряд не сходится, то его называют *расходящимся*.

Для доказательства расходимости ряда может оказаться полезным необходимый признак сходимости

Утверждение 1 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.*

Важно помнить, что обратное неверно.

Утверждение 2 (критерий Коши сходимости ряда). *Для сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *необходимо и достаточно следующее свойство:*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0)\,(\forall n \geq n_0\,\forall p \geq 0) \quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right| \leq \varepsilon. \tag{10.1}$$

10.2. Обращаясь к числовому ряду, обычно ставят вопрос о его сходимости. Здесь аналогично несобственному интегралу возникает ситуация, в которой желательно сделать заключение о сходимости какой-то последовательности (частичных сумм) на основе информации о другой последовательности (общего члена). Поэтому для исследования сходимости рядов формулируют специальные утверждения, называемые признаками сходимости.

Сначала коротко опишем перечень вопросов, сопровождающих изучение сходимости ряда, а потом сообщим содержание соответствующих признаков.

В первую очередь смотрим, сходится ли к нулю общий член данного ряда, и если нет, то ряд расходится, если да, то мы продолжаем исследование ряда.

Затем констатируем, знакопостоянен ли общий член ряда, и если да, то обращаемся к признакам сравнения или основанным на них признакам Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса или изучаем асимптотику общего члена ряда с целью возможного сравнения с общим членом сходящегося ряда. Если общий член ряда меняет знак, то смотрим на возможность применения к нему признаков Дирихле и Абеля. Для доказательства расходимости можно использовать критерий Коши.

10.3. Напомним формулировки признаков сходимости знакопостоянных рядов.

Утверждение 1 (признак сравнения). *Рассмотрим два ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *с положительным членами. Предположим, что* $x_n \le y_n$ *по крайней мере для всех далеких номеров* n. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *также сходится, а если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *расходится.*

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = K$ *и* $0 < K < \infty$, *то сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *равносильна сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. *Так будет, в частности, если* $x_n \sim y_n$, *т. е. если* $x_n = y_n + o(y_n)$ *при* $n \to \infty$.

На сравнении с геометрической прогрессией (быстро сходящимся рядом) основаны признаки Даламбера и Коши.

Утверждение 2 (признак Даламбера). *Предположим, что* $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = d$. *Тогда если* $d < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, если* $d > 1$, *то расходится, если же* $d = 1$, *то признак не дает информации о сходимости ряда.*

Утверждение 3 (признак Коши). *Предположим, что* $x_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c$. *Тогда если* $c < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, если* $c > 1$, *то расходится, если же* $c = 1$, *то признак не дает информации о сходимости ряда.*

Более тонкими являются признаки, основанные на сравнении с рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{10.2}$$

Напомним, что ряд (10.2) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Тем самым если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ мы нашли, что $x_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$, то при $\alpha > 1$ наш ряд сойдется, а при $\alpha \le 1$ разойдется.

Утверждение 4 (признак Раабе). *Предположим, что для ряда*

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$, *существует предел*

$$p = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right).$$

Тогда если $p > 1$, *то исходный ряд сходится, если* $p < 1$, *то расходится, если же* $p = 1$, *то признак не дает информации о сходимости ряда.*

Утверждение 5 (признак Гаусса). *Если* $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и*

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\gamma}},$$

где $|\gamma_n| < c$, $\gamma > 0$, *то*

(a) *при* $\alpha > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится, при* $\alpha < 1$ *расходится;*

(b) *при* $\alpha = 1$ *данный ряд сходится в случае, если* $\beta > 1$, *и расходится в случае, если* $\beta \le 1$.

10.4. Пример 1. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}, \tag{10.3}$$

воспользовавшись разными признаками и проследив, как эти признаки применяются и срабатывают.

Начнем с необходимого признака. Поскольку здесь неочевидно, сходится ли к нулю общий член ряда, можно отказаться от применения необходимого признака и перейти к применению других признаков.

Обратимся к признаку Даламбера. Для этого составим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}n^{n+p}}{(n+1)^{n+1+p}n!e^n} = \frac{en^{n+p}}{(n+1)^{n+p}} = \frac{e}{(1+1/n)^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

так что признак Даламбера информации о сходимости не дает.

Прибегнем к признаку Гаусса. Составим

$$\begin{aligned} p_n &= n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} - 1\right) \\ &= n\left(e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right) \end{aligned}$$

полагаем $x = 1/n$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x}(e^{-1}(1+x)^{1/x}(1+x)^p - 1) = \frac{1}{x}(e^{-1}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}(1+x)^p - 1)\\
&= \frac{1}{x}\left(e^{-1}e^{\frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x}}(1+px+o(x)) - 1\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(e^{-\frac{x}{2}+o(x)}(1+px+o(x)) - 1\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)(1+px+o(x)) - 1\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(1+\left(p-\frac{1}{2}\right)x+o(x)-1\right) = p-\frac{1}{2}+o(1),
\end{aligned}
$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p - \frac{1}{2},$$

так что исходный ряд сходится при $p - \dfrac{1}{2} > 1$, т. е. при $p > \dfrac{3}{2}$, и расходится при $p < \dfrac{3}{2}$. Для значения $p = \dfrac{3}{2}$ признак Раабе информации о сходимости не дает.

Исследуем теперь сходимость этого ряда, используя асимптотику его общего члена. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Имеем

$$\frac{n!e^n}{n^{n+p}} = \frac{(2\pi)^{1/2}n^{1/2}n^n e^n}{e^n n^{n+p}}e^{-\frac{\theta}{12n}} = \sqrt{2\pi}\frac{e^{-\frac{\theta}{12n}}}{n^{p-1/2}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-1/2}},$$

так что исходный ряд, как и ряд с общим членом $\dfrac{1}{n^{p-1/2}}$, сходится при $p > \dfrac{3}{2}$ и расходится при $p \le \dfrac{3}{2}$.

Мы получили исчерпывающую информацию о тех p, при которых ряд сходится, правда, при этом нам пришлось воспользоваться асимптотической формулой для $n!$.

Попробуем применить к исследованию сходимости признак Гаусса. Для этого составим отношение $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$ и при анализе его асимптотики воспользуемся промежуточными выкладками, проделанными при использовании признака Раабе. Делая, как и выше, замену $x = \dfrac{1}{n}$,

проведем вычисления:

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n+p}}{en^{n+p}} \\ &= e^{-1}e^{x-x^2/2+x^3/3+o(x^3)}\left(1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+o(x^2)\right) \\ &= \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\left(1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+o(x^2)\right) \\ &= 1+\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2},\end{aligned}$$

где в коэффициент γ_n вошло всё, что собралось при дроби $\dfrac{1}{n^2}$ в процессе приведения подобных членов. По признаку Гаусса ряд будет сходиться, если $p-\dfrac{1}{2}>1$, и расходиться, если $p-\dfrac{1}{2}\le 1$.

Пример 2. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}.$$

Ясно, что предел его общего члена равен нулю, так что начнем применение какого-либо признака. Величина показателя степени подсказывает, что для начала стоит обратиться к признаку Коши. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}e^{n^2\ln(1-\frac{a^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3}))} = \lim_{n\to\infty}e^{n^2(-\frac{a^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{a^2}{2}}<1\end{aligned}$$

при любом $a\neq 0$, так что ряд сходится при любом $a\neq 0$.

Пример 3. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+k/\ln n}}.$$

Ясно, что предел общего члена этого ряда равен нулю. Исследуем асимптотику общего члена:

$$\frac{1}{n^{1+k/\ln n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+k/\ln n} = e^{(1+\frac{k}{\ln n})\ln\frac{1}{n}} = e^{\ln\frac{1}{n}-k} = e^{-k}\cdot\frac{1}{n},$$

и ряд расходится, каково бы ни было k

10.5. Задачи. Исследовать сходимость следующих рядов:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$, **(4)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$, **(6)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$, **(8)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$,

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$, **(10)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$,

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$, **(12)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$,

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$, **(14)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$,

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{1/n}-\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right)$, $a,b,c>0$, **(16)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$,

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n^\alpha}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$, **(18)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$,

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$, $q>0$,

(20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$, $a>0$.

10.6. Рассмотрим теперь ряды, у которых общий член может быть знакопеременным. Для исследования сходимости таких рядов применяют формулируемые ниже признаки Дирихле, Абеля или частный случай признака Дирихле — признак Лейбница. Кроме исследования простой сходимости, знакопеременные ряды исследуют также на абсолютную сходимость. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. В том случае, когда ряд сходится, но не абсолютно, его

называют *условно сходящимся*. Для исследования абсолютной сходимости применяют, разумеется, признаки, приспособленные для изучения сходимости знакопостоянных рядов. Расходимость ряда иногда можно установить с помощью критерия Коши.

Утверждение 1 (признаки Абеля и Дирихле). *Рассмотрим числовые последовательности a_n, b_n и предположим, что последовательность a_n монотонна.*

Допустим, что выполнены условия какого-либо из следующих пунктов:

(α) *имеет место сходимость $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, а частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ряда, составленного из b_n, ограничены, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leq C$$

при всех $n \in \mathbb{N}$;

(β) *последовательность a_n ограничена, т. е. существует такая постоянная $K > 0$, что $|a_n| \leq K$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.*

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

При выполнении условия (α) говорят о *признаке Дирихле*, а условия (β) — о *признаке Абеля.*

Утверждение 2 (признак Лейбница). *Если x_n — монотонная сходящаяся к нулю последовательность, то знакочередующийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

сходится.

10.7. Пример 1. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$.

Заметим, что если $x = k\pi$, то $\sin x = 0$, и наш ряд нулевой, так что сходится, даже абсолютно. Будем рассматривать теперь $x \neq k\pi$.

Если бы общий член ряда сходился к нулю достаточно быстро, можно было бы, воспользовавшись признаком сравнения, доказать

абсолютную сходимость и тем самым сходимость данного ряда. Однако здесь общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что признак сравнения не сработает. Поэтому обратимся к признакам, приспособленным для исследования сходимости знакопеременных рядов.

Сначала выделим монотонную составляющую. Это, конечно, последовательность $\dfrac{1}{n}$. Теперь отметим, что она сходится к нулю, тем самым мы ориентируемся на применение признака Дирихле. Согласно этому признаку остается доказать ограниченность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$. Найдем сумму S_n. Умножив равенство

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

на $2\sin\dfrac{x}{2}$ и воспользовавшись (7.30) для произведения синусов, получим

$$\begin{aligned} 2S_n \sin\frac{x}{2} &= 2\left(\sin x \cdot \sin\frac{x}{2} + \sin 2x \cdot \sin\frac{x}{2} + \cdots + \sin nx \cdot \sin\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \ldots \\ &\qquad \cdots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ &= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Значит, $|S_n| \le \dfrac{1}{\sin x/2}$. Итак, суммы S_n ограничены, а следовательно, по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ сходится при любом x.

Обратимся к изучению абсолютной сходимости, т. е. рассмотрим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}.$$

Ввиду медленной сходимости к нулю общего члена этого ряда ограничить его сверху общим членом сходящегося ряда не удастся. Поэтому

попробуем обосновать гипотезу о его расходимости. Здесь можно воспользоваться критерием Коши. Однако проще применить искусственный прием. Ясно, что $|\sin nx| \geq \sin^2 nx = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$, поэтому

$$\frac{|\sin nx|}{n} \geq \frac{1}{2n}(1 - \cos 2nx) = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}.$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ расходится, а ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ сходится (по признаку Дирихле). Тем самым ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$ расходится как разность расходящегося и сходящегося рядов. Общий член исследуемого ряда оказался ограниченным снизу общим членом расходящегося ряда, значит, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ расходится.

Пример 2. Исследуем сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

Как и при изучении сходимости несобственных интегралов, обратимся к асимптотике общего члена ряда. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Тогда $1 - \cos \dfrac{\pi}{\sqrt{n}} = \dfrac{\pi^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$, откуда

$$(-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \frac{\pi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^2}{2n}$$

сходится по признаку Дирихле, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$$

сходится абсолютно по признаку сравнения, значит, исходный ряд сходится.

10.8. Задачи. 1. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих рядов:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}}$, **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^3\sin n\cdot e^{-\sqrt{n}}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$, **(4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}}\cos\frac{\pi n}{6}$, **(6)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4 n}{n}$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1/n}}$, **(8)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+(-1)^n)^{\alpha}}$.

2. Исследовать сходимость следующих рядов:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\sin\frac{1}{n}$, **(2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$, **(4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2\frac{n}{2}}{\sqrt[5]{n+1}}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$, **(6)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, **(8)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln(n+1)}$.

Ответы к п. 10.8. 1. (1) Сходится абсолютно, (2) сходится абсолютно, (3) сходится условно, (4) сходится условно, (5) сходится условно, (6) расходится, (7) сходится абсолютно при $\alpha>1$, условно при $0<\alpha\leq 1$, (8) сходится абсолютно при $\alpha>1$, условно при $0<\alpha\leq 1$.

2. (1) сходится, (2) расходится, (3) сходится, (4) сходится, (5) расходится, (6) сходится, (7) сходится, (8) сходится.