В этом семестре нам предстоит изучить следующие вопросы:

- основы гладкого анализа
- равномерная сходимость и пространство непр. функций
- Теория меры и интеграла Лебега

Коллоквиум, предположительно будет после равн. сх-ти и простр. непр. функций.

Глава VIII Основы гладкого анализа

Обзор главы. Данная глава будет продолжением предыдущей, в которой изучались функции многих переменных заданные на открытых мн-вах в $\mathbb{R}^n$. Было развито дифференциальное исчисление и доказаны основные теоремы вплоть до теоремы об обратной функции. Теперь нам предстоит научиться работать с функциями, заданными на гладких поверхностях в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что основная линейка, по которой мы следуем такова:

обл. определения → непрерывность функций → дифф-ние → интегрир.

	dom	cont	diff	int
$\mathbb{R}^1$	+	+	+	+
$\mathbb{R}^n$	+	+	+	позже
пов-ти	•		• + 4 сем.	4 сем.

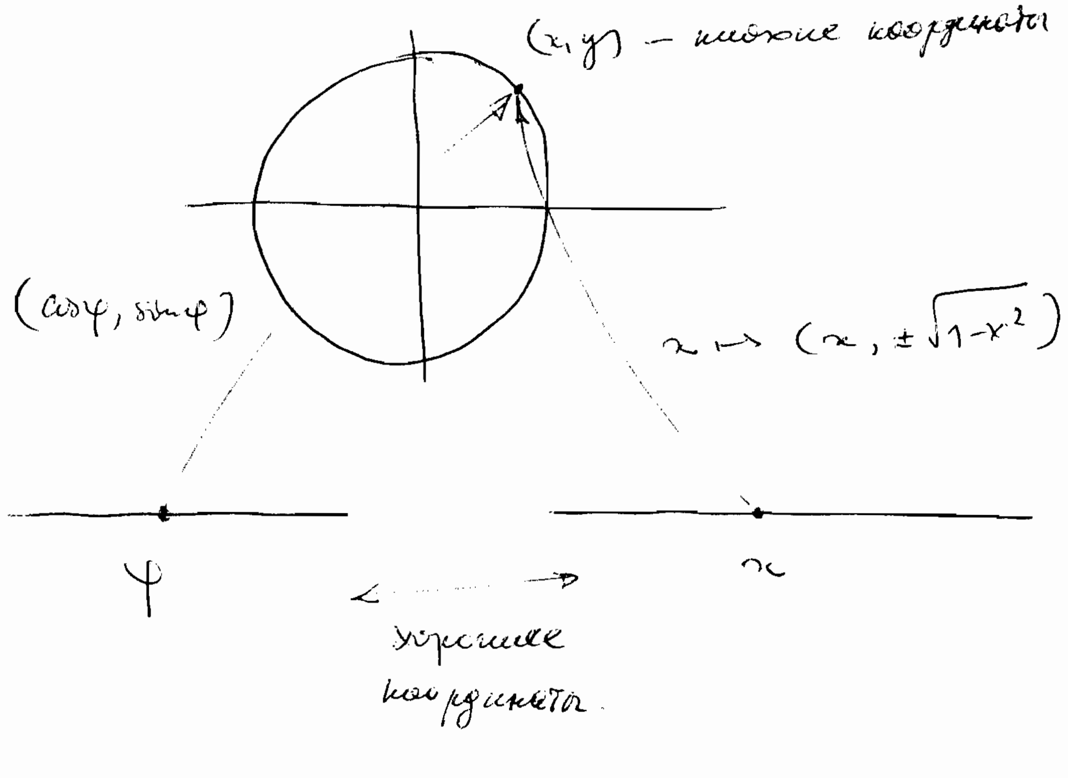
Как задавать поверхности в $\mathbb{R}^n$?
Начиная с области определения, нужно понять, как задавать поверхности в $\mathbb{R}^4$. Из аналитической геом. известно:

- уравнением: $x^2+y^2=1$ (неявно)
- параметрически: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ $\quad -1\le x\le 1$
(явно)

или
$$x=\cos\varphi$$
$$y=\sin\varphi \qquad 0\le\varphi<2\pi$$

Для перехода от неявного способа задания к параметр. нужна теорема о неявной функции, которая экв-на теореме об обратной функции.

Дифф-ция. Для того, чтобы дифф-ть функции на поверхн. нужно поверхностей дифференциал, т.е. нужно поименовать точки поверхности числами (или n-ками чисел), причем так чтобы координаты пробегали открытые мн-ва.



Поскольку систем координат много то возникают функции перехода $x = x(\varphi)$ и $\varphi = \varphi(x)$. Системы координат должны быть согласованы в том смысле, что функции перехода должны быть диффеоморфизмами, т.е. взаимнооднозн. и класса C^1 вместе с обратными.

Функции. После изучения поверхностей, будем изучать функции на поверхностях. Тут возникают понятия касательного пространства и дифференциала. Окажется, что первый дифференциал — это инвариант. Вещь не касат. рассмотрение, а второй — нет. Закончится все условными экстремумами, т.е. экстремумами ф. на поверхности. Интегрирование будет обсуждаться в след семестре после интеграла Лебега

§1. ~~Следствия~~ Теорема об обратной функции и ее следствия.

1.1 Теорема об обратной функции.

Напоминание:

Теорема 1 (об обр. ф.) Пусть

(1) $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, где Ω – область в $\mathbb{R}^n$, – отображение класса C^1, т.е. все коорд ф. $f^j \in C^1(\Omega)$.

(2) $x_0 \in \Omega \mid \det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0) \neq 0$.

Тогда

(1) $\exists$ открытые окрестности $\mathcal{U}(x_0)$ и ~~$V(y_0), y_0 = f(x_0)$~~ $V = f(\mathcal{U})$ (являющаяся образом $\mathcal{U}$), а также функция $g: V \to \mathcal{U}$ |

$f \circ g(y) = y \quad \forall y \in V$

$g \circ f(x) = x \quad \forall x \in \mathcal{U}$

(2) если $f \in C^k$, то $g \in C^k$

(3) $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(f(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(x)$ для любого $x \in \mathcal{U}$.

Определение диффеоморфизма. ~~Сто~~ Если $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, где Ω – область в $\mathbb{R}^n$, – взаимнооднозначное (обратимое) отображение, такое, что сами f и $f^{-1}: f(\Omega) \to \Omega$ принадлежат классу C^k, т.е. соотв. координатные функции k раз непрерывно дифферен, то f называется диффеом (между Ω и $f(\Omega)$) класса C^k.

Замечания (о диффеоморфизме)

1. Теорема об обратной ф. означает, что гладкое (C^1) отображение $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ с невырожд. матр. Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ является локально диффеом, т.е. x_0 имеет окрестность U, в которой f - диффеом.

2. Если $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ обратимо и $f \in C^k(\Omega)$, то это еще не означает, что f - диффеом. Например, $f(x) = x^3$.

3. В случае $n \geq 2$ условие невырожденности $\frac{\partial f}{\partial x}$ в каждой точке не гарантирует обратимость f. Например,

отображение $f: (0,1) \times (0, 4\pi) \to \mathbb{R}^2$

$$f^1(r, \varphi) = r\cos\varphi$$

$$f^2(r, \varphi) = r\sin\varphi$$

имеет невыр. матрицу Якоби $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

однако $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$, т.е. f необратима

4. Если $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ - диффеом, то $f(\Omega)$ автоматически открыто т.к. $f(\Omega)$ - прообраз открытого мн-ва Ω при непр отобр f^{-1}. Пояснить!

1.2. Теорема о неявной функции.

Замечание (о линейном случае)

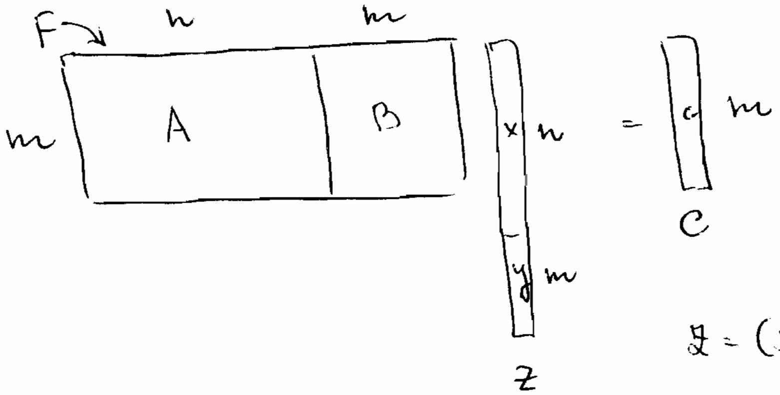
Прежде чем формулировать и доказывать теорему о неявной ф. обратимся к прост. случаю. Очевидно, что теорема об обр. функции является обобщением известного утверждения лин. алгебры: если квадратная матрица невырождена ($\det A \neq 0$), то она обратима.

В свою очередь теорема о неявной ф-ции обобщает следующий факт лин. алгебры о решении сист. линейн. ур-ний:

Пусть F — матрица $m\times(n+m)$ (m строк, $n+m$ столбцов).

Требуется найти (общее) решение системы $Fz = c$, где $z \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Если минор F соотв. последним m переменным невырожден, то эти последние переменные можно выразить через первые n переменных. В обозначениях:



$$z = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$$

или

$$Ax + By = c$$

Тогда, очевидно, $y = B^{-1}(-Ax + c) = -B^{-1}Ax + B^{-1}c$

<u>Замечание (об обозначениях)</u> Рассматривая ниже ~~точки~~ пространства $\mathbb{R}^{n+m}$ будем обозначать его точки через $(x,y) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$. Если $f: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, то

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ — часть матрицы Якоби, соотв $y^1, \dots, y^m$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial y^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial y^m} \end{pmatrix}.$$ Она квадратная!

Теорема 2 (о неявной функции). Пусть

(1) $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^1, где Ω — обл. в $\mathbb{R}^{n+m}$

(2) $(x_0, y_0) \in \Omega$ такова, что $f(x_0, y_0) = 0$

(3) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ невырождена

Тогда

(1) $\exists$ окрест. U точки x_0 в $\mathbb{R}^n$ и окрест. W точки (x_0, y_0) в $\mathbb{R}^{n+m}$

а также единственная функция $g : U \to \mathbb{R}^m$

такие, что $\forall x \in U$ $f(x, g(x)) = 0$, в частности

$y_0 = g(x_0)$. $(x, g(x)) \in W$ и — отсюда внешние комментарии нет, иначе док-ва

(2) Если $f \in C^k$, то $g \in C^k(U)$

Док-во. Шаг 1 (Вспомогательная функция)

Построим функцию $F: \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$ след. образом:

$$F(x,y) = (x, f(x,y))$$

Заметим, что мат. Якоби F равна

$$\frac{\partial F}{\partial (x,y)} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & 0 & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & 1 & & & & \\ \hline \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} & \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & & \frac{\partial f^1}{\partial y^m} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} & \frac{\partial f^m}{\partial y^1} & \cdots & & \frac{\partial f^m}{\partial y^m} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} m \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{n} \underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{m} \end{array}$$

→ в частности $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial (x,y)} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ невырожденная.

Очевидно, что $\det \frac{\partial F}{\partial (x,y)} = \det \frac{\partial f}{\partial y}$ и

Шаг 2 (применение теоремы об обратной функции)

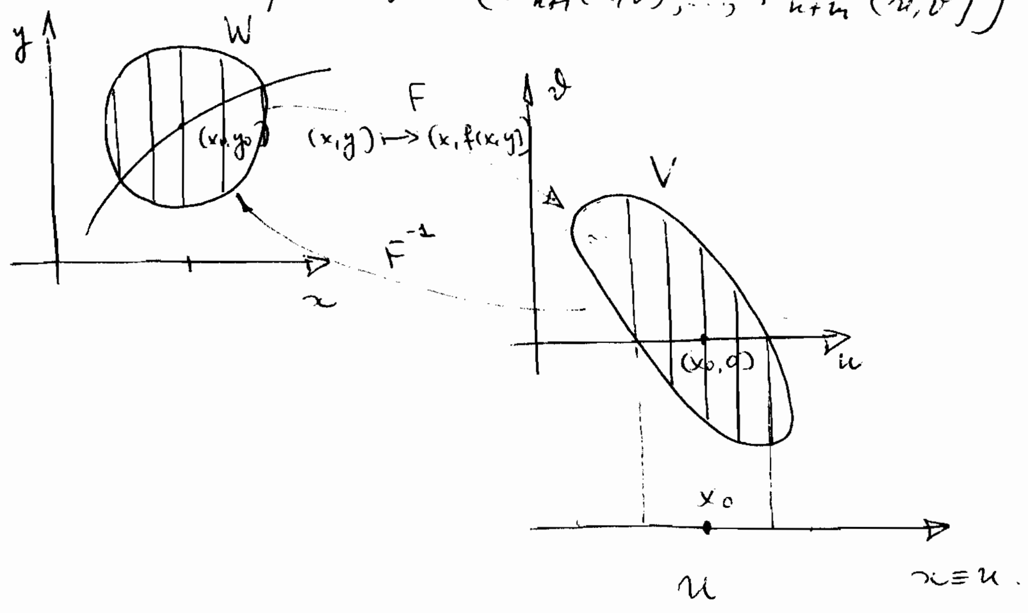
По теореме об обратной функции $\exists$ открыт. окр W точки (x_0, y_0) такая, что $F: W \to F(W)$ — диффеоморфизм, т.е. $V = F(W)$ — открытая окрест. точки $F(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ и $\exists\, F^{-1}: \underbrace{F(W)}_{=V} \to W$, причем $F^{-1} \in C^1(V)$.

Шаг 3 (вид F и F^{-1}).

По определению F имеет вид $F(x,y) = (x, f(x,y))$, т.е. первые n значений — это в точности $x^1, \dots, x^n$. Покажем, что обратное отображение F^{-1} имеет аналогичный вид: $F^{-1}(u,v) = (u, \varphi(u,v))$ с некоторой ф-цией φ. Действительно, пусть $(x,y) \in W$ и $(u,v) \in V$ — точки, соответств. друг другу при отобр F, т.е. $(u,v) = F(x,y)$ и $(x,y) = F^{-1}(u,v)$. Из первого равенства имеем $(u,v) = (x, f(x,y))$ т.е. $u^i = x^i$, $i = 1, \dots, n$. Это означает, что $F^{-1}(u,v) = (x^1, \dots, x^n, F^{-1}_{n+1}(u,v), \dots, F^{-1}_{n+m}(u,v))$

Здесь мы немного не обозначаем компоненту функции индексом снизу, т.к. сверху пишем „-1“

Обозначим $\varphi(u,v) = (F^{-1}_{n+1}(u,v), \dots, F^{-1}_{n+m}(u,v))$



Итак, для точки (x,y) и (u,v) имеют место соотношения:

$$\begin{cases} x = u \\ v = f(x,y) \\ y = \varphi(u,v) \end{cases}$$

Они означают, что при прямом и обратном отображениях вертикальные отрезки переходят опять в вертикальные отрезки ~~прямые~~ с некоторым искривлением, но над той же самой точкой $x \equiv u$. При этом поверхность $\{f(x,y)=0\}$ переходит в $\{v=0\}$, т.е. происходит выпрямление.

Наконец, подставляя $y = \varphi(u,v)$ в $v = f(x,y)$ и замечая что $x = u$, получаем тождество $v = f(x, \varphi(x,v))$.

Шаг 4 (выбор окрестностей и функции g).

Окрестность W уже построена. Определим $U = \{x \mid (x,0) \in V\}$ как проекцию сечения V плоскостью $\{v=0\}$.

Функцию $g(x)$ определим, глядя на $v = f(x, \varphi(x,v))$ и полагая $v=0$: $g(x) = \varphi(x,0)$.

Теперь действительно все в порядке: для $x \in U$ точка $(x,0)$ лежит в V и значит определено $g(x) = \varphi(x,0)$ причем $(x, g(x)) \in W$ и $0 = f(x, g(x))$.

Шаг 5 (единственность $g(x)$). Предположим что g строится не единственным образом, т.е. для $x \in U$ $\exists$ две точки $y', y'' \mid (x,y'), (x,y'') \in W$ и $f(x,y') = f(x,y'') = 0$.

Но тогда (см. рис.) точки (x,y') и (x,y'') переходят в одну и ту же точку $(x,0)$ окрест. V. В силу взаимной однозначности F на U получаем $y' = y''$.

<u>Шаг 6 (гладкость кл. C^k)</u>. Если $f \in C^k$, то $F \in C^k$.
По теореме об обр. функции F^{-1} на V тоже класса C^k.

Остается вспомнить, что $g(x) = (F^{-1}_{n+1}(x,0), \dots, F^{-1}_{n+m}(x,0))$ и понять, что сужение гладкой функции на „гиперплоскость" $\{ y = 0 \}$ тоже гладкое.

Теорема доказана.

<u>Примеры со стр 11+, 11#</u>

§3. <u>Теорема о разложении дифф-ма</u> ~~на простейшие~~

В следующем семестре, при доказат-ве формулы замены переменных в многомерном инт-ле нам понадобится один результат о разложении дифф-ма. Он является следствием теоремы об обратной функции, поэтому докажем его здесь.

<u>Определение (простейшего дифф-ма)</u>. Дифф-м $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω — обл. в $\mathbb{R}^n$, называется простейшим, если он имеет вид

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, f^i(x), \dots x^n),$$

т.е. нетождественно меняется лишь одна компонента.

<u>Теорема 3 (о локальном разложении дифф-ма)</u>
Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω - обл в $\mathbb{R}^n$, - дифф-м. Любая точка $x_0 \in \Omega$ имеет окрестность U, в которой f предст-ся в виде:

$f(x) = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n \circ \sigma(x)$, где g_i — простейшие, а $\sigma(x)$ — перестановка координат.

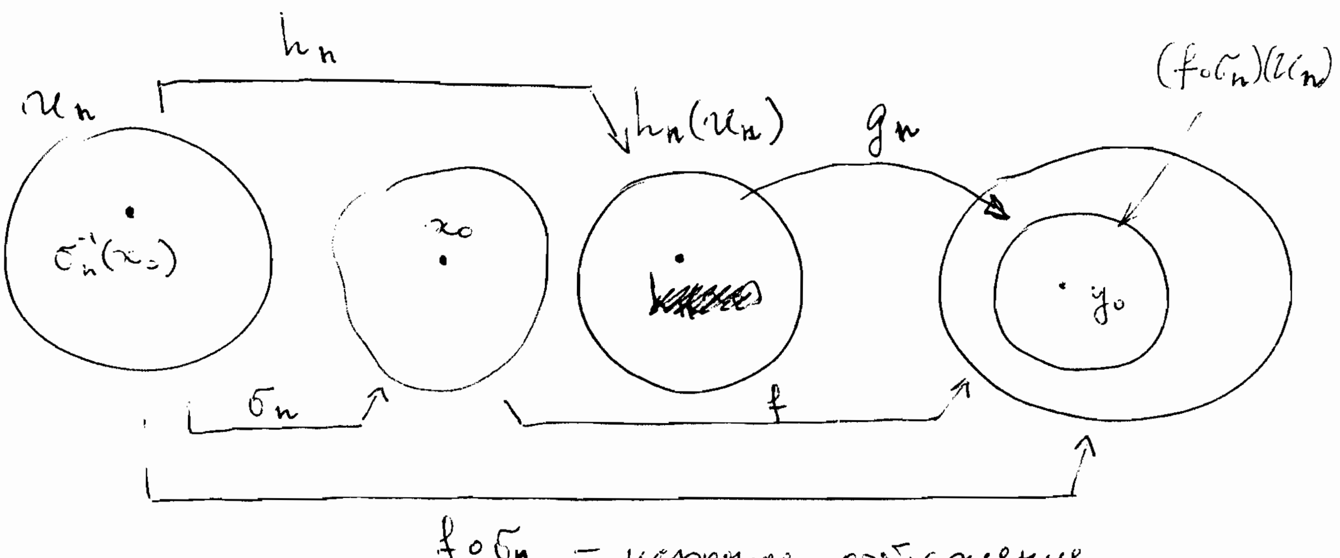
Док-во. Докажем по индукции: построим g_1, g_2, а затем скажем, что далее аналогично. Сначала перестановкой координат $\sigma_n(x)$ сделаем так, чтобы в матрице Якоби

$$\frac{\partial(f\circ\sigma_n)}{\partial x} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial(f\circ\sigma_n)^1}{\partial x^1} & \frac{\partial(f\circ\sigma_n)^1}{\partial x^n} \\ & \vdots \\ \hline \frac{\partial(f\circ\sigma_n)^n}{\partial x^1} \ \dots & \frac{\partial(f\circ\sigma_n)^n}{\partial x^n} \end{array}\right) \quad (\text{в точке } \sigma_n^{-1}(x_0))$$

заштрихованный минор был ненулевой. Это очевидно можно сделать, поскольку матрица $\frac{\partial(f\circ\sigma_n)}{\partial x}$ получается из $\frac{\partial f}{\partial x}$ перестановкой столбцов. (Отображение σ_n – это лин. отображение с матрицей из нулей и единиц, причем в каждом столбце и каждой строке ровно по одной единице) А матрица $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ невырожденная (т.к. f – дифф-м).

Зададим новую функцию $h_n(x) = (\overset{(f\circ\sigma_n)^1}{\cancel{f^1}}(x), \dots, \overset{(f\circ\sigma_n)^{n-1}}{\cancel{f^{n-1}}}(x), y^n)$

Имеем
$$\frac{\partial h_n}{\partial x} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial(f\circ\sigma_n)^1}{\partial x^1} \dots & * \\ \dots & \\ \hline 0 \ \dots \ 0 & 1 \end{array}\right).$$
Следовательно $\frac{\partial h_n}{\partial x}(x_0)$ невырождена и по теореме об обратной функции $\exists$ окр U_n точки $\sigma_n^{-1}(x_0)$ ~~x_0~~, в которой h_n – диффеоморфизм



$f\circ\sigma_n$ – исходное отображение

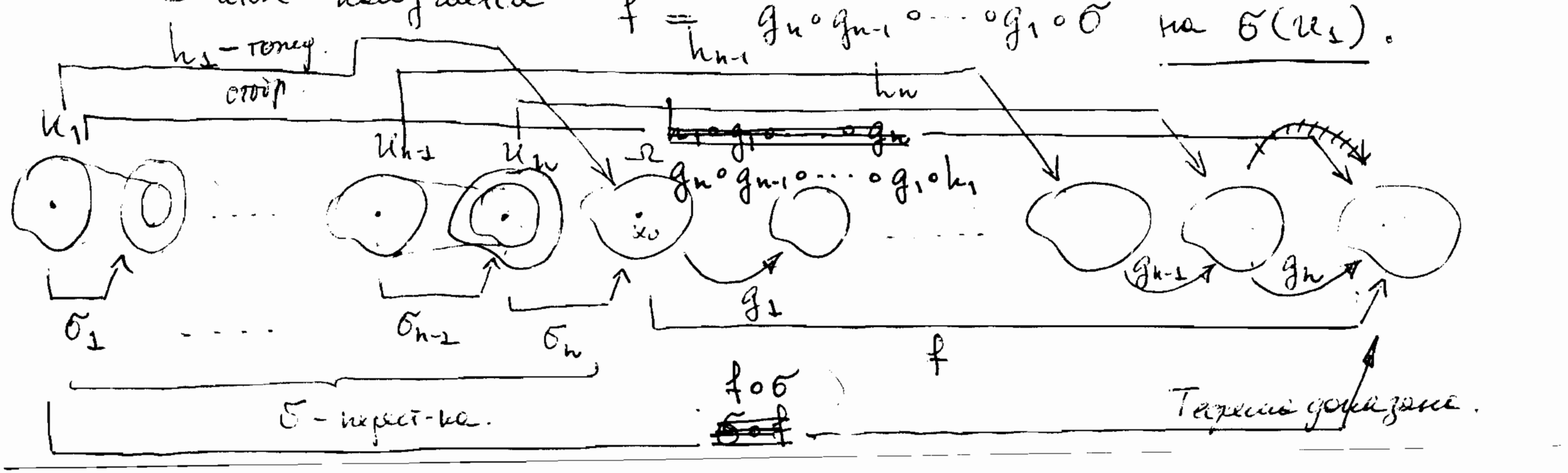
т.е. $\exists\, h_n^{-1}: h_n(U_n) \to U_n$. Тогда возникает новый диффеоморфизм: $g_n = (f\circ\sigma_n)\circ h_n^{-1}$ (композиция двух диффеоморфизмов — снова дифф-м). Смотрим как действует g_n.

Запишем
$$(f\circ\sigma_n)(x) = ((f\circ\sigma_n)^1(x),\dots,(f\circ\sigma_n)^{n-1}(x),(f\circ\sigma_n)^n(x))$$
$$h_n(x) = ((f\circ\sigma_n)^1(x),\dots,(f\circ\sigma_n)^{n-1}(x), x^n)$$
для $x\in U_n$. У точек $(f\circ\sigma_n)(x)$ и $h_n(x)$, соотв. одному и тому же $x\in U_n$, первые координаты совпадают. Значит,
$$g_n(x) = (x^1,\dots,x^{n-1},\varphi^n(x))$$
с некоторой $\varphi^n: h_n(U_n)\to\mathbb{R}$ класса C^1. Т.о. $g_n(x)$ — простейший дифф-м.

Итак, на U_n имеем $g_n\circ h_n = f\circ\sigma_n$ или
$$f = g_n\circ h_n\circ\sigma_n^{-1}$$

Далее показывается, что h_n предст-ся в виде $h_n = g_{n-1} h_{n-1}\sigma_{n-1}^{-1}$ где g_{n-1} — простейший диффеом, σ_{n-1} — перестановка ~~первых~~ координат, а $h_{n-1}(x) = (h^1_{n-1}(x),\dots,h^{n-2}_{n-1}(x), y^{n-1}, x^n)$, т.е. действует тождественно по последним двум координатам. При этом возможно придется сузить окрестность!

В итоге получается $f = g_n\circ g_{n-1}\circ\dots\circ g_1\circ\sigma$ на $\sigma(U_1)$.



Пример (к теореме о разложении дифф-мов)

Рассмотрим отображение $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, действ. по правилу $f(r,\varphi)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Локально, вдали от $r=0$ оно является дифф-ом. Как разложить его на простейшие?

Следуя схеме док-ва определим $h_2(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\varphi)$.

Обратное : $h_2^{-1}(x,y)=\left(\frac{y}{\cos y}, y\right)$, если $y\neq \pi/2+\pi k$.

$$g_2 = f\circ h_2^{-1}:(x,y)\longrightarrow \left(\frac{x}{\cos y}, y\right)=(r,\varphi)\to(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=$$

$$=\left(\frac{x}{\cos\varphi}\cos\varphi, \frac{x}{\cos\varphi}\sin\varphi\right)=$$

$$=(x, x\,\mathrm{tg}\,\varphi) \text{ — это простейший.}$$

Т.к. $n=2$ | h_2 сам уже простейший.

Т.о. $f=g_2\circ g_1$ где

$g_1(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\varphi)$ $\quad g_2(x,y)=(y\,; x\,\mathrm{tg}\,y)$.

Это разложение работает в окрестности любой точки (x,y) с $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$. В окрестностях таких точек нужно изменить порядок координат.

§ 2. Многообразия в $\mathbb{R}^n$

2.1. Гладкие многообразия в $\mathbb{R}^n$

Замечание (о терминологии). Сразу оговоримся о терминологии. Тот объект, который мы будем изучать в разных учебниках называется по-разному:

- k-мерные поверхности в $\mathbb{R}^n$
- подмногообразия в $\mathbb{R}^n$
- вложенные многообразия в $\mathbb{R}^n$.

Все эти термины подчеркивают, что наш объект естественно располагается в $\mathbb{R}^n$.

Когда говорят многообразие, подразумевают абстрактные многообразия (никуда не вложенные). Это несколько более общий объект. Его мы вкратце коснемся в самом конце главы.

Мы будем использовать слово многообразие, понимая под этим вложенные многообразия в $\mathbb{R}^n$.

Короче, многообразие.

Замечание (об ~~многообразии~~ обобщении понятия кривой/поверхности)

Когда хотят что-то обобщить из всех эквив. определений выбирают наиболее подходящее для этого.

Вспомним, как можно задать поверхность в $\mathbb{R}^n$.

1. Явно, т.е. как график функции. Например,

$$S = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}, (x,y) \in \text{нек. область}\}$$

2. Неявно, т.е. как ~~реш~~ мн-во решений сист. уравнений. Например,

$$S = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$$, где f достаточно хорошая

3. Параметрически, т.е. мн-во значений гладкой функции. Например,

$$S = \{(x(t,s), y(t,s), z(t,s)) \mid (t,s) \in \text{нек. область в } \mathbb{R}^2\}.$$

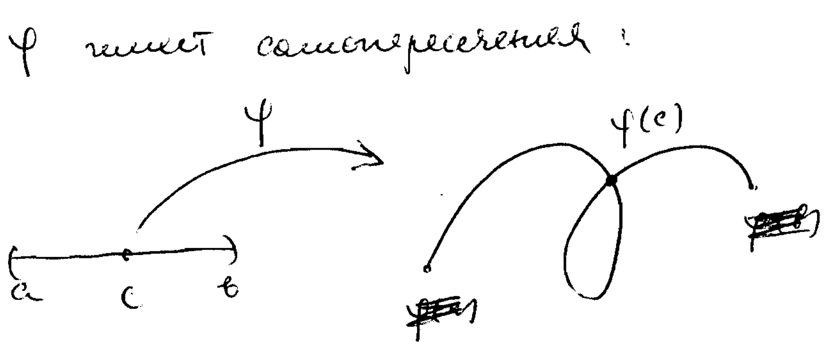
Первый способ позволяет описывать лишь поверхности проектирующиеся на одну из координатных плоскостей.

Второй способ не дает координат на поверх-ти и потому не очень удобен.

Третий — наиболее перспективный для обобщения

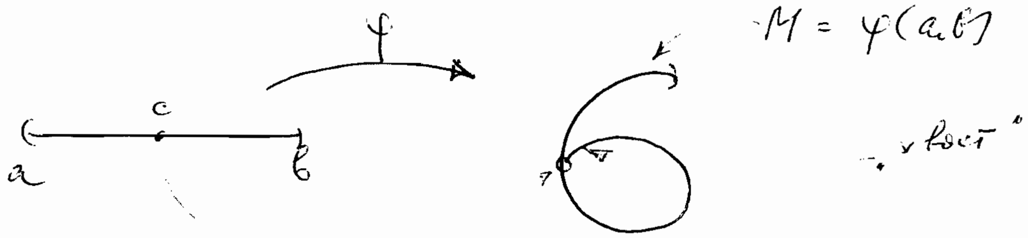
<u>Замечание (рассуждения, приводящие к определению мн-зия)</u>

1. Рассмотрим путь в $\mathbb{R}^n$: $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}^n$. Если ~~отоб~~ φ имеет самопересечения:



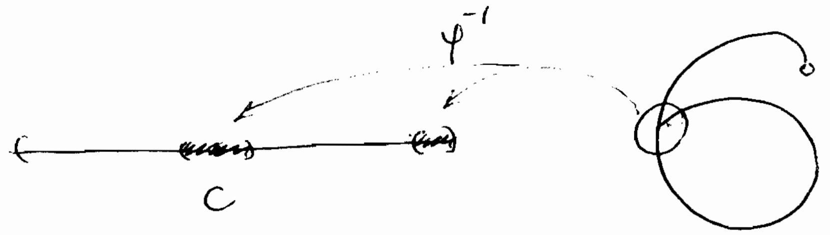
то в точке пересечения имеется не 2 направления, а четыре, что очевидно плохо. Т.е. нужно требовать, чтобы φ было взаимнооднозначным.

2. Можно усложнить ситуацию:



В этом случае φ взаимнооднозначно, но образы точек близких к b подходят сколь угодно близко к $\varphi(c)$ и находясь в $\varphi(c)$ мы можем сойти с верного пути и перескочить на „хвост". Плохо.

Как исключить такую патологическую ситуацию? Нужно потребовать, чтобы близкие точки на кривой M имели бы обязательно близкие параметры. А это в точности непрерывность обратного отображения $\varphi^{-1}: M \to (a,b)$. Действительно, рассмотренный пример не выдержит такое условие:



3. Хотелось бы, чтобы область определения параметризации всегда была открытым мн-вом (областью). Если взять окружность ($x^2+y^2=1$) нам не удастся найти одну параметризацию так, чтобы выполнялись все требования. Значит одной параметризацией не обойтись!

Все эти соображения приводят к следующему определению:

Определение (многообразие в $\mathbb{R}^n$) Мн-во $M \subset \mathbb{R}^n$ называется k-мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$ $(0 < k \le n)$, если $\forall x_0 \in M$ ~~выполнено~~

(1) $\exists$ окрестность U точки x_0 в $\mathbb{R}^n$

(2) $\exists$ область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$

(3) $\exists$ взаимно однозначное непрерывное отображение $\varphi : \Omega \to M \cap U$ такое, что обратное отображение $\varphi^{-1} : M \cap U \to \Omega$ тоже непрерывно

Отображение φ называется параметризацией (локальной), а φ^{-1} — (локальной) системой координат, компоненты $(\varphi^{-1})^1, \dots, (\varphi^{-1})^k$ называются (лок), координатами.

Объект φ который возник в определении многообразия заслуживает своего собственного имени.

Определение (гомеоморфизма). Обратимое отображение $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$, где X — мн-во в $\mathbb{R}^k$, такое, что само φ и его обратный $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ непрерывны называется гомеоморфизмом, а сами мн-ва X и $\varphi(X)$ — гомеоморфными.

Замечание. С учетом последнего определения можно сказать, что мн-ие в $\mathbb{R}^n$ — это такое мн-во M в $\mathbb{R}^n$, что каждая его точка имеет окрестность (в $\mathbb{R}^n$) пересечение которой с M гомеоморфно области в $\mathbb{R}^k$.

Замечание Размерности n и k в определении гомеоморфизма могут быть различны, в отличие от определения диффеоморфизма (см выше).

Примеры многообразий в $\mathbb{R}^n$ (и не многообразий)

1. Сфера в $\mathbb{R}^3$. Привести параметризации

2. График функции $x \mapsto |x|$ в $\mathbb{R}^2$ — многообразие.

3. Отрезок $[a,b]$ ($\subset \mathbb{R}^1$) (с концами!) — вообще говоря уже не многообразие. (Это будет многообразием с краем, которые будут позже). Проблема с концами: у него нет окрестностей гомеоморфных области.

4. По той же причине замкнутый круг $\{x^2+y^2 \le 1\}$ не многообразие, а открытый — уже многообразие.

Перейдем к гладким многообр., которые будут нашими основными объектами. Понятно, что многообр. будут областями определения функций и мы захотим их дифференцировать. Сделать это можно будет, только рассматривая композицию $f(\varphi(x))$, где φ - некоторая параметризация. Т.о. необходимо требовать дифф-ть φ. Но этого мало! Хотелось бы чтобы и обратное отобр φ^{-1} было диффуемо. Но оно определено на $M \cap U$, а это уже не открытое мн-во. Придется заменить это условие другим.

Если $k=n$, то дифф-ть φ^{-1} равносильно невырожденности $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.
А в случае $k \neq n$ условие невырожденности $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ заменяют на требование, чтобы $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ имела максимальный ранг.

С другой стороны (в одномерной ситуации) требование $\operatorname{rank} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \max$ означает, что мы проходим точки M с ненулевой скоростью, т.е. нигде не замираем.

Итак,

Определение дифф-мого ~~гладкого~~ многообразия в $\mathbb{R}^n$.

Многообразие $M \in \mathbb{R}^n$ называется ~~гладким или~~ дифф-мым (гладким) класса C^p, если

(1) все его параметризации $\varphi: \Omega \to M \cap U$) принадлежат классу C^p

(2) $\operatorname{rank} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = k$ всюду в Ω.

Пример недифф-емого многообразия в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим многообразие $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R},\ y = |x|\}$ — график модуля. Это действительно мн-дие, т.к. M имеет глобальную параметризацию $\varphi: u \in \mathbb{R} \longmapsto (u, |u|) \in M$. Однако, она очевидно не гладкая.

Может быть можно найти гладкую? Попробуем такую: $\varphi: u \longmapsto (u^2, u|u|)$. Она уже имеет класс C^1. (Проверьте!). $\varphi' = (2u, 2|u|)$. Однако $\varphi'(0) = (0,0)$ т.е. $\operatorname{rank} \varphi'(0) = 0$. Опять не получилось

Предположим, что нам удалось найти правильную параметризацию $\varphi(u) = (x(u), y(u))$ в окрестн. $(0,0)$. Т.к. $\operatorname{rank}(x'(0), y'(0)) = 1$ имеем либо $x'(0) \neq 0$, либо $y'(0) \neq 0$

В первом случае $x(u)$ — дифф-м в окр. $u=0$ т.е. $\exists$ дифф-мая обратная функция $x \mapsto u(x)$ и

$y(u(x)) = |x|$ должна быть гладкой как композиция.

Во втором случае $y(u)$ является локальным дифф-ом в окрестности $u=0$, а это означает, что M в окрестности $(0,0)$ можно параметризовать y, т.е. однозначно спроектировать на ось Oy. Итак, M — многообр., но не гладкое.

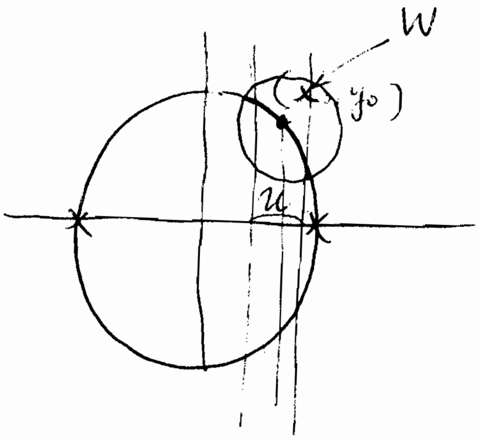
Пример (локализация по y в теореме о н.ф.).

Важно понять, что локализация в т. о н.ф. происходит не только по перем. x, через которую выражают, но и по „выражаемой" переменной y.

Рассмотрим пример $f(x,y) = x^2+y^2-1$.

Требуется выразить y через x в уравнении $f(x,y)=0$.

Считаем $\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = (2x, 2y)$. Выразить y через x можно в тех точках (x,y), где $y \neq 0$.



Пусть (x_0,y_0) — такая точка.

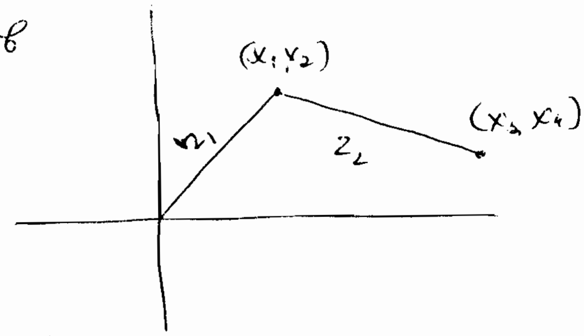
Тогда $-1 < x_0 < 1$ и x_0 имеет окрестность $U \subset (-1,1)$. В этой окр-ти опр-ны две функции

$g_\pm(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$, каждая из которых решает уравнение $f(x, g_\pm(x)) = 0$. Чтобы устранить эту неединственность нужно указать окрестность W точки (x_0,y_0), в которую должна попасть точка $(x, g(x))$.

Указывая W мы вырезаем часть кривой, которую нужно параметризовать перемен. x.

Пример (двойной математический маятник)

Рассмотрим двойной математический маятник, т.е. пару точек плоскости с жестким расстоянием от нач. коорд до первой и от первой до второй. Обозначим коорд первой через (x_1, x_2), а второй — (x_3, x_4).



Всевозможные положения — это в точности решения сист уравн.

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - l_1^2 = 0$$

$$f_2(x) = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 - l_2^2 = 0$$

Ясно, что система имеет 2 ст. свободы $(4-2)$

Вопрос: можно ли определить положение системы двумя из четырех перем? Через какие? При каких усл?

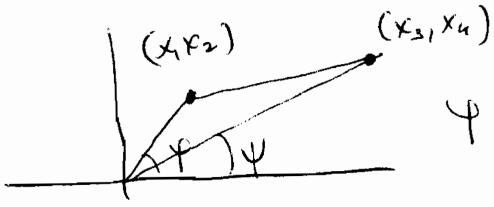
Считаем м. Якоби $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 2(x_1 - x_3) & 2(x_2 - x_4) & 2(x_3 - x_1) & 2(x_4 - x_2) \end{pmatrix}$

Можно ли взять x_1, x_2? Нет. т.к. минор $\frac{\partial f}{\partial(x_3, x_4)}$ вырожд.

Можно ли взять x_3, x_4? Да, если $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \end{vmatrix} \neq 0$

т.е. $x_1 x_4 \neq x_2 x_3$ или $\frac{x_2}{x_1} \neq \frac{x_4}{x_3}$. Это условие запрещает положения при которых нач. координат и обе точки находятся на одной прямой. Вдали от них можно

Можно ли использ-ть x_1, x_3? Когда?



$\varphi \neq \psi (\pm\pi)$