

§ 27. Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода

27.1. Введение. Понятие дифференциальной формы. Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода будем рассматривать в рамках более общей ситуации, а именно как проявления интегрирования дифференциальных форм по ориентированным многообразиям.

Криволинейные и поверхностные интегралы связаны с определенными физическими понятиями, в которых участвуют векторные поля, а именно, с работой векторного поля вдоль кривой и с потоком векторного поля через поверхность. Эти величины можно описать и с помощью интегралов первого рода, однако связанные с векторными полями интегралы по ориентированным кривым или поверхностям допускают обобщения на многомерный случай и соответствующие математические средства оказываются полезными и для других моделей.

Составим предварительное впечатление о понятиях, приводящих к интегралам второго рода. Обрисуем обстановку. Будем для простоты считать, что все происходит в $\mathbb{R}^2$ или в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\mathbf{F}$ — векторное поле, т. е. отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Работа A поля вдоль вектора $\vec{v}$ представляет собой функцию двух групп переменных: одна из них — это точка плоскости, вторая — это вектор перемещения $\vec{v}$, т. е. $A = A(x, y)(\vec{v})$, причем свойства по отдельным группам переменных разные. Переход от одной точки плоскости к другой естественно считать гладким, т. е. при фиксированном $\vec{v}$ функция a гладкая как функция от (x, y) , а относительно второй группы работа является линейной функцией: $a(x, y)(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = \alpha_1 a(x, y)(\vec{v}_1) + \alpha_2 a(x, y)(\vec{v}_2)$.

Второй пример участия векторного поля доставляет поток поля. Пусть задано векторное поле $\mathbf{a}(x, y, z)$ в $\mathbb{R}^3$, т. е. отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$. Поток векторного поля через (ориентированный) параллелограмм, натянутый на векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, равен (ориентированному) объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\mathbf{a}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$, и может быть вычислен как смешанное произведение этих векторов, взятых в указанном порядке.

Тем самым объем (поток) V является, с одной стороны, функцией точки, а с другой — функций двух векторов, т. е. $V = V(x, y, z)(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. При этом, поскольку рассматривается объем ориентированного параллелепипеда, естественно полагать, что у натянутого на $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ параллелепипеда выбрана «сторона», т. е. задана его ориентация, и смена ориентации должна вызывать изменение знака. Кроме того, зависимость от векторов

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ должна обладать естественными свойствами, а именно, должна быть линейна по каждому из векторов при фиксированных остальных (здесь, правда, остальных не так много, но в ситуациях большей размерности их может оказаться много), и менять знак при перестановке местами этих векторов (эффект смены ориентации). Рассматривая поток как функцию точки, естественно считать, что при переходе от точки в близлежащие объем меняется незначительно, т. е. естественно предполагать, что объем как функция точки пространства (при фиксированных векторах) меняется по крайней мере непрерывно, а лучше гладко.

Эти наводящие соображения приводят к понятию дифференциальной формы как функции двух групп переменных: точки пространства и набора векторов. Приведем его в общем случае n -мерного пространства, чтобы не было проблем с формами конкретного порядка в пространствах конкретной размерности.

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Дифференциальной формой порядка k или k -формой на области Ω называют функцию $\omega(x; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$, зависящую от точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ и набора $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, векторов пространства $\mathbb{R}^n$, если она обладает следующими свойствами:

- (α) при фиксированном $x \in \Omega$ она полилинейна и кососимметрична по $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, т. е. линейна по каждому из $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ при фиксированных остальных и меняет знак при перемени мест любых двух векторов этого из набора;
- (β) при каждом фиксированном наборе $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ она гладкая как функция от x (т. е. имеет в Ω непрерывные частные производные первого порядка).

В дальнейшем будем подразумевать, что переменная x изменяется в некотором открытом множестве, как правило не оговаривая этого отдельно.

В обозначении дифференциальной формы векторную группу обычно не указывают, более того, и пространственную переменную бывает тоже не указывают.

Совокупность k -форм снабжается обычными (поточечными) операциями сложения форм и умножения их на вещественные числа. Относительно этих операций множество k -форм становится векторным пространством.

Нас будут интересовать дифференциальные формы первого, второго и третьего порядков в $\mathbb{R}^3$. Будем использовать для переменных привычные обозначения (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3) .

Поскольку ниже будет рассматриваться интегрирование дифференциальных форм по ориентированным многообразиям, напомним понятие многообразия, его ориентации, многообразия с краем и индуцированной ориентации края. При этом будем ориентироваться на наиболее технологичное представление о многообразии и его ориентации.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой элементарное k -мерное многообразие, если оно может быть представлено как образ $\varphi(D)$ открытого множества D в $\mathbb{R}^k$, $k \leq n$, при невырожденном гладком отображении φ , т. е. отображении, ранг которого максимален (матрица Якоби имеет ранг k). Отображение φ называют *параметризацией* M . Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является многообразием (без края), если каждая его точка обладает окрестностью, представляющей собой элементарное многообразие.

Если кроме точек, окрестность которых — элементарное многообразие, в M присутствуют еще точки такие, что некоторая их окрестность является образом при невырожденном отображении φ множества $\{(x_1, \dots, x_k) \in U : x_k \geq 0\}$, где U — некоторая окрестность нуля, то говорят, что M — *многообразие с краем*, а точки с указанным выше свойством образуют его край. В частности, край многообразия с краем является многообразием без края на единицу меньшей размерности.

При интегрировании дифференциальных форм по многообразию мы всегда будем иметь дело с элементарными многообразиями, в случае необходимости разбивая область интегрирования на элементарные многообразия.

Напомним, что каждое k -мерное векторное пространство обладает ориентацией. Это значит, что все его базисы разбиваются на два класса эквивалентности по знаку определителя матрицы перехода от одного базиса к другому: если такой определитель положителен, то базисы относятся к одному классу (одинаково ориентированы), если отрицателен, то — к разным классам. Визуально в малых размерностях это выглядит так. На прямой векторы базиса в одном классе, если они направлены в одну сторону. На плоскости векторы в одном классе, если переход от одного из них к другому осуществляется в одном направлении «часовой стрелки»: либо в обоих против часовой стрелки (обычная ситуация), либо против. В $\mathbb{R}^3$ положительной обычно считают ориентацию, при которой, если смотреть с конца последнего вектора, то обход первых двух осуществляется против часовой стрелки.

На многообразии ориентация задается посредством ориентации касательного пространства в каждой его точке. Если в каждой точке мно-

гообразия в касательном пространстве можно задать ориентацию (т. е. выбор базиса) так, что этот базис непрерывно зависит от точки, то на многообразии задана ориентация. Образно это можно представить так. Пусть на многообразии расположена замкнутая кривая, и пусть происходит движение по этой кривой от некоторой точки до этой же точки. Если при этом ориентация в конце движения окажется такой же, как в начале, и это произойдет для любой замкнутой кривой на многообразии, то на нем можно задать ориентацию. При этом говорят, что многообразие *ориентируемо*. (Есть и другие способы определения ориентируемости, на них останавливаться не будем.) Одномерное многообразие всегда ориентируемо, для бóльших размерностей это не так. Если на ориентируемом многообразии задана ориентация, то говорят, что оно *ориентировано*.

Пусть M — элементарное ориентированное многообразие и φ — его параметризация. Пусть $x = \varphi(u)$, $u \in U \subset \mathbb{R}^k$. Векторы $d\varphi(u)(e_1), \dots, d\varphi(u)(e_k)$ расположены в касательном пространстве к многообразию M в точке x , образуют там базис и задают свою ориентацию. Если она совпадает с ориентацией, заданной на многообразии, то говорят, что *параметризация согласована с ориентацией*.

Поскольку край многообразия является многообразием на единицу меньшей размерности, естественно, что ориентация края может быть индуцирована ориентацией многообразия. Происходит это так. Пусть дана точка края. Выберем ориентирующий базис в касательном к многообразию пространстве так, чтобы первый вектор располагался во внешнем полупространстве (как говорят, «смотрел наружу»), а остальные были в касательном к краю. Тогда они составляют базис, который и определяет индуцированную ориентацию края.

Для задания ориентации на ориентируемом многообразии достаточно указать ориентирующий базис в касательном пространстве в одной точке многообразия.

Как можно заметить, представленное здесь изложение во многом образное, более точные формулировки с использованием математических символов можно взять из лекционного материала.

27.2. Криволинейные интегралы второго рода (интегрирование 1-форм).

ТЕОРИЯ

Начнем с форм первого порядка. Поскольку для форм 1-го порядка полилинейность несколько условна (в векторной группе всего один вектор

и говорить о перестановке местами векторов вряд ли имеет смысл), форма 1-го порядка — это линейный по вектору функционал. Размерность векторного пространства 1-форм равна трем. Его базис может быть составлен из трех проекторов dx , dy , dz , а именно из функционалов, действующих для любого $\xi \in \mathbb{R}^3$ по формулам

$$dx(\xi; v) = v_x, \quad dy(\xi; v) = v_y, \quad dz(\xi; v) = v_z, \quad v = (v_x, v_y, v_z).$$

Тем самым любая 1-форма ω^1 может быть представлена в виде разложения по указанному базису, т. е. в виде

$$\omega_1 = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Форма ω_1 полностью характеризуется коэффициентами $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ в ее разложении по базису. Таким образом, каждой 1-форме можно сопоставить векторное поле

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Нетрудно понять, что и обратно, каждому векторному полю можно сопоставить 1-форму, у которой коэффициенты в разложении по (каноническому) базису суть координатные функции данного векторного поля.

Учитывая указанную связь между 1-формами и векторными полями, в зависимости от удобства или традиций будем говорить либо о 1-форме, либо о векторном поле, называя его при этом *силовым полем* (причина такого наименования кроется в физике, и мы не будем пытаться ее оттуда достать). Связанную с полем $\mathbf{F}(x, y, z)$ 1-форму будем обозначать через $\omega_{\mathbf{F}}^1$.

Дать определение интеграла от 1-формы по ориентированной кривой можно разными способами. Здесь остановимся на самом технологичном, а именно с использованием параметризации.

Напомним детали, связанные с ориентацией кривой. Ориентацию одномерного многообразия (кривой) можно задавать несколькими способами. Один из них состоит в указании ее начала и конца. Второй способ — путем задания на кривой непрерывного поля касательных векторов. При этом достаточно указать направление касательного вектора в какой-то одной точке кривой. Еще один способ применяется для замкнутых кривых. Он основан на том, что такая кривая ограничивает некоторую область, т. е. служит краем двумерного многообразия, и состоит в указании обхода кривой по отношению к ограничиваемой ею области. Обычно

при использовании последнего способа кривую ориентируют так, чтобы в каждой точке кривой близлежащая часть ограничиваемой кривой области оказалась слева.

Пусть γ — гладкое одномерное ориентированное многообразие, расположенное в области задания 1-формы $\omega_1 = \omega_{\mathbf{F}}^1$, и $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ — какая-то параметризация γ , согласованная с заданной на γ ориентацией. Тогда интеграл от формы ω^1 по многообразию (кривой) γ , обозначаемый через

$$\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

определяется так:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt. \end{aligned} \quad (27.1)$$

Известно, что число (27.1) не зависит от выбора параметризации и тем самым может выступать в качестве определения интеграла от формы по кривой.

В кратком виде определение интеграла от 1-формы можно описать с помощью замены переменной, т. е. операции переноса 1-формы из $\mathbb{R}^3$ в пространство параметров. Пусть дана 1-форма $\omega_{\mathbf{F}}^1 = P dx + Q dy + R dz$, где $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. Пусть $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, — параметризация кривой γ . Определим в пространстве параметров форму $\varphi^*\omega$, полагая

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega(t) &= P(x(t), y(t), z(t)) dx(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) dy(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t)) dz(t) \\ &= (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt \end{aligned} \quad (27.2)$$

В терминах формы $\varphi^*\omega$ определение интеграла от $\omega_{\mathbf{F}}^1$ выглядит так:

$$\int_{\gamma} \omega_{\mathbf{F}}^1 = \int_I \varphi^*\omega_{\mathbf{F}}^1. \quad (27.3)$$

Укажем связь между интегралами первого рода и второго рода. Пусть даны векторное поле $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ и ориентированная кривая γ (разумеется, лежащая в области определения поля $\mathbf{F}$). Тогда

$$\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{\gamma} \langle \mathbf{F}(x, y, z) | \tau(x, y, z) \rangle ds, \quad (27.4)$$

где τ — (ориентирующий) касательный вектор в точке (x, y, z) .

ТЕХНОЛОГИИ

Способ нахождения криволинейного интеграла от 1-формы (или, иначе говоря, от векторного поля $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, или *криволинейного интеграла второго рода*) заложен в его определении.

1. При заданных поле F и кривой γ следует параметризовать γ .
2. Проверить согласование параметризации с заданной на γ ориентацией.
3. Составив выражение (27.1), найти одномерный интеграл по отрезку.

Очередность пунктов 2 и 3 можно переставить, т. е. сначала вычислить интеграл, и если он ненулевой, то проверить согласование параметризации с ориентацией. Если параметризация φ не согласована с заданной на γ ориентацией, то следует изменить знак результата.

ПРИМЕР. Найти криволинейный интеграл

$$\int_{\gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

где γ — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z \geq 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a, 0, 0)$.

Начнем решение с задания параметризации. Можно в качестве параметра взять переменную x , остальные через нее выразив. Но в таком случае, во-первых, придется разбивать всю кривую на две части, соответствующие положительным и отрицательным значениям y , а во-вторых, относительно параметра могут получиться интегралы с радикалами, и если этого можно избежать, то так и надо поступить.

Можно сначала параметризовать расположенную на плоскости переменных x, y окружность и из первого равенства выразить последнюю

переменную. Скорее всего, такая параметризация окажется эффективнее первой. Записав второе равенство в определении кривой в виде

$$(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2,$$

положим

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{2} \sin \varphi, \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

В этот момент можно озаботиться согласованием параметризации с ориентацией. Однако, во-первых, ориентация задана образно, а какую ориентацию порождает параметризация, пока неясно. Либо мы займемся изобразительным искусством и попробуем все нарисовать, либо подойдем формально и используем касательный вектор в какой-то точке кривой. Во-вторых, может оказаться, что искомый интеграл равен нулю, и тогда все равно, согласована параметризация с ориентацией или нет. Так что вопрос согласования оставим до вычисления интеграла, и если он окажется ненулевым, то тогда и займемся согласованием.

Найдем порождаемый параметризацией касательный вектор в точках кривой. Он состоит из производных координатных функций. Имеем

$$x' = -\frac{a}{2} \sin \varphi, \quad y' = \frac{a}{2} \cos \varphi, \quad z' = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\sin \varphi}{2\sqrt{1 - \cos \varphi}}, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi.$$

Согласно определению искомый интеграл равен

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{4} \sin^2 \varphi \cdot \left(-\frac{a}{2} \sin \varphi + \frac{a^2}{2} (1 - \cos \varphi) \cdot \frac{a}{2} \cos \varphi + \frac{a^2}{4} (1 + \cos \varphi)^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} \right) d\varphi. \right.$$

Займемся его вычислением. Интеграл от первого слагаемого равен нулю, ибо интегрируется периодическая тригонометрическая функция $\sin^3 \varphi$ по промежутку длиной периода. Далее, от второго слагаемого

останется только интеграл $-\int_0^{2\pi} \frac{a^3}{4} \cos^2 \varphi d\varphi$. Интеграл от третьего слага-

емого равен нулю. Это можно объяснить например так. Интегрирование происходит по промежутку от 0 до 2π . Но функция под интегралом 2π -периодическая, а тогда интегралы от нее по любым промежуткам длиной

2π одинаковы. Перейдя к интегралу от $-\pi$ до π (в нуле доопределив функцию каким угодно значением, интеграл от этого не изменится), замечаем, что подынтегральная функция нечетна и интегрируется по симметричному промежутку, стало быть, интеграл от нее равен нулю.

Вычислим оставшийся интеграл. Чтобы вспомнить интегралы Эйлера, воспользуемся бета-функцией. Имеем

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{4} \cos^2 \varphi d\varphi &= -a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{a^3}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{a^3}{2} \frac{\Gamma(1/2) \cdot 1/2 \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} = -\frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$

Как видно, нуля не получилось, значит, придется заняться ориентацией. Переведем задание ориентации в более формальный вид. Для этого сообразим, куда направлен задающий ориентацию касательный вектор в какой-либо точке кривой. Возьмем самую высокую точку, а именно точку с координатами $(0, 0, a)$. Судя по описанию ориентирующий касательный вектор в этой точке направлен влево, если смотреть из $(2a, 0, 0)$, т. е. его вторая координата отрицательна. Этой точке соответствует значение параметра π . Для этого значения касательный вектор, задаваемый параметризацией, таков: $(0, -a/2, 0)$. У него вторая координата тоже отрицательна, так что параметризация согласована с ориентацией и найденный выше результат дает ответ.

ПРАКТИКА .

1. Вычислить криволинейные интегралы по кривым γ , пробегаемым в направлении возрастания параметра:

$$(1) \int_{\gamma} \frac{y}{x} dx + dy, \gamma - \text{кривая } y = \ln x, 1 \leq x \leq e;$$

$$(2) \int_{\gamma} 2xy dx - x^2 dy, \gamma - \text{дуга параболы } y = \sqrt{x/2}, 0 \leq x \leq 2.$$

2. Вычислить криволинейные интегралы по кривым, пробегаемым от точки A до точки B :

$$(1) \int_{\gamma} \frac{3x}{y} dx - \frac{2y^3}{x} dy, \gamma - \text{дуга параболы } x = y^2, A(4, 2), B(1, 1);$$

(2) $\int_{\gamma} x dy$, γ — полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geq 0$, $A(0, -a)$, $B(0, a)$.

3. Вычислить криволинейные интегралы по отрезкам AB , ориентированным в направлении от точки A до точки B :

(1) $\int_{\gamma} (2x - y) dx + (4x + 5y) dy$, $A(3, -4)$, $B(1, 2)$;

(2) $\int_{\gamma} (4x + 5y) dx + (2x - y) dy$, $A(1, -9)$, $B(4, -3)$.

4. Вычислить криволинейные интегралы по кривым, пробегаемым в направлении возрастания параметра:

(1) $\int_{\gamma} (2a - y) dx + (y - a) dy$, γ — дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$,
 $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

(2) $\int_{\gamma} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, γ — дуга астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

5. Вычислить криволинейные интегралы по кривым, пробегаемым в направлении возрастания параметра:

(1) $\int_{\gamma} yz dx + z\sqrt{a^2 - y^2} dy + xy dz$, γ — дуга винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{a}{2\pi}t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

(2) $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$, γ — окружность

$$x = a \cos \alpha \cos t, \quad y = a \cos \alpha \sin t, \quad z = a \sin \alpha \quad (\alpha = \text{const}).$$

6. Вычислить криволинейные интегралы по отрезкам AB , ориентированным в направлении от точки A до точки B :

(1) $\int_{\gamma} x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$;

$$(2) \int_{\gamma} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}, A(1, 1, 1), B(4, 4, 4).$$

Ответы. 1. (1) $3/2$; (2) $12/5$. 2. (1) -11 ; (2) $\pi a^2/2$. 3. (1) 8 ; (2) 6 . 4. (1) πa^2 ; (2) $3\pi a^{4/3}/16$. 5. (1) 0 ; (2) $-\pi a^2 \cos^2 \alpha$. 6. (1) 13 ; (2) $3\sqrt{3}$.

27.3. Интегрирование 2-форм.

ТЕОРИЯ

Формы второго порядка образуют 3-мерное векторное пространство, но для описания его канонического базиса потребуется еще одно понятие.

Рассмотрим какие-либо две 1-формы из канонического базиса, например dx и dy . Дифференциальную 2-форму, обозначаемую через $dx \wedge dy$ и действующую при любом $\xi = (x, y, z)$ на векторах $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ следующим образом:

$$dx \wedge dy(\xi; \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} dx(u) & dy(u) \\ dx(v) & dy(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix},$$

называют *внешним произведением форм* dx, dy (здесь u_x, u_y и т. п. суть проекции вектора на соответствующие координатные оси, а не производные по x или по y). Иначе говоря, для нахождения внешнего произведения форм dx, dy следует взять соответствующие координаты векторов и составить из них определитель (т. е. найти площадь проекции векторов $\vec{u}, \vec{v}$ на указываемые базисными формами координаты). Подобным образом определяются произведения $dy \wedge dz$ и $dz \wedge dx$. Эти три 2-формы и образуют канонический базис векторного пространства 2-форм в $\mathbb{R}^3$.

Для каждой точки (x, y, z) запишем разложение 2-формы по каноническому базису:

$$\omega^2(x, y, z) = P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy.$$

Из этого разложения видно, что каждой 2-форме сопоставляется векторное поле $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ или, если не указывать координаты точки пространства, поле (P, Q, R) . Обратно, каждому векторному полю соответствует 2-форма, в которой координатные функции этого поля суть коэффициенты в разложении формы по каноническому базису. Указанное взаимно однозначное соответствие позволяет вместо 2-форм

обращаться к векторным полям, а также вместо векторных полей рассматривать в подходящей постановке 2-формы. При сопоставлении полю (P, Q, R) 2-формы поле называют *полем потока* и нередко вместо (P, Q, R) используют обозначение $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Перейдем к определению интеграла от 2-формы, т. е. определим интеграл

$$\iint_S \omega_{\mathbf{a}}^2 = \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$

(как правило, знак $\wedge$ внешнего умножения будем опускать, если это не вызовет недоразумений).

Рассмотрим ориентированную поверхность S и будем считать, что она может быть параметризована одной параметризацией, т. е. пусть существуют область $D \subset \mathbb{R}^2$ и гладкое невырожденное взаимно однозначное отображение $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ области D на S . Будем предполагать, что параметризация φ согласована с заданной на поверхности ориентацией, т. е. векторы

$$\begin{aligned} d\varphi(u, v)(e_1) &= (x'_u(u, v), y'_u(u, v), z'_u(u, v)), \\ d\varphi(u, v)(e_2) &= (x'_v(u, v), y'_v(u, v), z'_v(u, v)) \end{aligned}$$

ориентированы положительно (в смысле заданной на поверхности ориентации).

Сделаем замену переменных в форме ω , т. е. пересадим форму в пространство параметров ω , и перейдем к форме $\varphi^*\omega$. Делается это так: в функциях P, Q, R просто выполняется замена, т. е. на места переменных x, y, z ставятся значения $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ соответствующих координатных функций параметризации φ , а на места dx, dy, dz ставятся дифференциальные формы первого порядка $dx(u, v), dy(u, v), dz(u, v)$, представляющие собой дифференциалы координатных функций, после чего раскрываются скобки во внешних произведениях. Получается форма второго порядка вида $g(u, v) du \wedge dv$ на области D в $\mathbb{R}^2$, интеграл от которой есть интеграл от функции g по области D . В случае, если параметризация не согласована с заданной ориентацией, то перед интегралом ставится знак минус. Проведя намеченные действия для согласованной с ориентацией параметризацией φ , можно получить выражение для ин-

теграла:

$$\begin{aligned}
\int_S \omega_{\mathbf{a}}^2 &= \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\
&= \int_D \varphi^* \omega_{\mathbf{a}}^2 = \iint_D \left(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \\ z'_u(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix} \right. \\
&\quad + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} z'_u(u, v) & z'_v(u, v) \\ x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \end{vmatrix} \\
&\quad \left. + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix} \right) dudv. \tag{27.5}
\end{aligned}$$

Известно, что определение интеграла не зависит от параметризации.

Укажем связь между поверхностными интегралами первого рода и второго рода. Пусть S — поверхность, ориентированная единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, и пусть

$$\omega_{\mathbf{a}}^2 = P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$

— 2-форма, порожденная полем $\mathbf{a}$. Тогда

$$\int_S \omega_{\mathbf{a}}^2 = \int_S \langle \mathbf{a} | \mathbf{n} \rangle dS, \tag{27.6}$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned}
&\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\
&= \int_S (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS, \tag{27.7}
\end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, а α, β, γ — углы, составляемые вектором нормали с соответствующими координатными осями.

ТЕХНОЛОГИИ

Способ вычисления поверхностного интеграла от 2-формы указан в его определении. Последовательность действий при этом можно описать так.

1. Задать параметризацию поверхности.

Этот шаг может оказаться одним из трудных. Можно, разумеется, всегда иметь в виду параметризацию графика, но она может привести к трудностям в вычислении получаемого двойного интеграла. Можно привлекать соображения, относящиеся к полярной, цилиндрической или сферической системам координат. Естественно, при параметризации будет учитываться специфика поверхности.

2. Выполнить замену переменных в заданной 2-форме. Для этого обычно используют формулу (27.5), но можно выписывать дифференциалы соответствующих координатных функций параметризации и выполнять действия, связанные с внешним произведением.

3. Вычислить полученный в результате замены двойной интеграл. Если он оказался ненулевым, то проверить согласование параметризации с заданной на поверхности ориентацией.

Если поверхность ориентирована заданием вектора нормали $\mathbf{n}(x, y, z)$ в точке $(x, y, z) \in S$, называемой ориентирующей нормалью, то согласованность параметризации с заданной на поверхности ориентацией означает, что определитель матрицы

$$(\mathbf{n}(x, y, z), d\varphi(u, v)(e_1), d\varphi(u, v)(e_2)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ \cos \beta & y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \\ \cos \gamma & z'_u(u, v) & z'_v(u, v) \end{pmatrix}$$

положителен. Для выяснения знака определителя можно рассмотреть его в какой-то одной точке поверхности, т. е. можно взять какие-то конкретные значения параметров u, v и посчитать определитель для этих значений, в других точках знак будет тот же.

ПРИМЕР. Вычислим интеграл

$$\iint_S (x^6 dydz + y^4 dzdx + z^2 dxdy),$$

где S — нижняя сторона части эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$.

Для заданной поверхности можно использовать параметризацию графика, но в таком случае надо будет вычислять двойной интеграл по «кривой» области, почти наверняка прибегая к полярным координатам. А можно сразу использовать полярные координаты в плоскости x, y и z выразить из уравнения.

Пусть $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r^2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$. Составим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, r)} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & \cos \varphi \\ r \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 2r \end{pmatrix}.$$

Согласованием параметризации с ориентацией пока не занимаемся. Вычислим получаемый согласно определению двойной интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^6 \cos^6 \varphi \cdot (2r^2 \cos \varphi) + r^4 \sin^4 \varphi \cdot (2r^2 \sin \varphi) + r^4 \cdot (-r) dr = 2\pi \cdot \frac{-r^6}{6} \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{3}.$$

Здесь в скобках записаны значения соответствующих миноров матрицы Якоби и принято во внимание то обстоятельство, что интегралы от нечетных степеней синуса и косинуса по промежуткам длиной периода равны нулю.

Как видим, нуля в результате не получилось, придется заняться вопросом согласования параметризации с ориентацией. Ориентация поверхности задана указанием выбора ее стороны. Это означает, что в каждой точке поверхности из двух нормалей надо брать ту, которая направлена вниз, т. е. у которой последняя координата отрицательна. Проведем формальную проверку, хотя здесь легко проводимые рассуждения «на пальцах» показывают, что выбранный нами порядок следования параметров дает согласованную с ориентацией параметризацию. Однако такие рассуждения предполагают визуализацию ситуации и трудно поддаются описанию в тексте.

Возьмем какую-либо точку поверхности, например, $(0, 1, 1)$. Она получается при параметризации как образ точки $\varphi = \pi/2$, $r = 1$. Вектор нормали в этой точке можно определить как градиент при неявном задании поверхности в виде $x^2 + y^2 - z = 0$. Он равен $(0, 2, -1)$ и направлен вниз, т. е. является ориентирующим вектором нормали. Составив матрицу, первым столбцом которой является вектор нормали, а второй и третий суть столбцы матрицы Якоби в данной точке, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

определитель которой положителен. Следовательно, выбранная параметризация согласована с ориентацией, и полученный выше результат окончательный.

ПРАКТИКА

Вычислить интегралы

(1) $\iint_S (2z - x) dydz + (x + 2z) dzdx + 3z dxdy$, S — верхняя сторона треугольника $x + 4y + z = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

(2) $\iint_S yz dydz + zx dzdx + xy dxdy$, S — внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

(3) $\iint_S y dzdx$, S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

(4) $\iint_S (x^5 + z) dydz$, S — внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leq 0$;

(5) $\iint_S (y - z) dydz + (z - x) dzdx + (x - y) dxdy$, S — одна из сторон поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < z \leq H$;

(6*) $\iint_S yz^2 dxdz$, S — внутренняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = r^2$, $y \leq 0$, $0 \leq z \leq r$.

Ответы. (1) $128/3$; (2) 0 ; (3) $4\pi R^3/3$; (4) $-2\pi R^7/105$; (5) 0 ; (6) $-\pi r^5/6$.